دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

یک مفهوم کمی از حشو برای قاب های متناهی

استاد راهنما:

دکتر احمد احمدی

نگارش:

محمدنبی بیگلری

دی ماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

با عنایت به آئین‌نامه آموزشی دوره‌ی کارشناسی ارشد، جلسه دفاعیه پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد **محمدنبی بیگلری** به شماره دانشجویی ۹۰۴۲۱۰۰۱۰ رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز در تاریخ ۹۲/۱۰/۲۵ در محل دانشگاه هرمزگان تحت عنوان یک مفهوم کمی از حشو برای قاب های متناهی با حضور هیئت داوران برگزار گردید و براساس کیفیت پایان‌نامه، ارائه دفاعیه و نحوه‌ی پاسخ به سئوالات، پایان‌نامه مورد قبول هیئت داوران قرار گرفت.

نمره‌ی پایان‌نامه به عدد (.........) و به حروف (.................................) اعلام گردید.

ردیف	سمت	نام ونام‌خانوادگی	دانشگاه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر احمد احمدی	دانشگاه هرمزگان	
۲	استاد مشاور			
۳	داور داخلی	دکتر جواد فتحی	دانشگاه هرمزگان	
۴	داور خارجی	دکتر عباس عسکری زاده	دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	نرگس امرالهی	دانشگاه هرمزگان	

مدیرکل تحصیلات تکمیلی:

دکتر شهرام گلزاری

مالکیت معنوی

باسمه تعالی

اینجانب محمدنبی بیگلری به شماره دانشجویی ۹۰۴۲۱۰۰۱۰ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش آنالیز مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد متعهد می‌شوم چنانچه براساس پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع کردن از استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر، کتاب و مقاله و ... به صورت مشترك و با ذکر نام استاد راهنما مقدم بر نام خود مبادرت کنم.

نام و نام خانوادگی: محمدنبی بیگلری

تاریخ و امضا:

باسمه تعالی

اینجانب محمدنبی بیگلری به شماره دانشجویی ۹۰۴۲۱۰۰۱۰ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش آنالیز مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد گواهی می‌کنم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام، با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و مأخذ را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی: محمدنبی بیگلری

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر احمد احمدی

تاریخ:

امضا:

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

چکیده

حشو یک خاصیت مهم از یک قاب می باشد که امکان رفع اغتشاشات سیگنال را فراهم می آورد. در این تحقیق مفهوم جدیدی از حشو برای قابهای متناهی در فضای هیلبرت ارائه داده و به خواص آن می پردازیم. این مفهوم بر اساس تعریف تابعی روی کره واحد صورت می گیرد که می توان تراکم بردارهای قاب حول نقاط روی کره اندازه گیری کرد.

همچنین تعریفی از حشو بالا و پایین بصورت ماکسیمم و مینیمم تابع حشو برای قاب های متناهی ارائه می کنیم. در پایان به توصیف قابهای متناهی بر اساس حشو آنها می پردازیم.

واژگان کلیدی: فضای هیلبرت، تابع حشو، قاب.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

چه جهل مقدسی، آنگاه که انسان بعد از سال‌ها رنج و تکاپو می‌فهمد که هنوز هیچ نمی‌فهمد

و چه جهل نامقدسی وقتی خداوند در متن آگاهیهایت نباشد...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

تقدیر و سپاس همسری مهربان را که حامی من شدند تا در محضر اساتیدی بزرگوار هم‌کلاس با دوستانی شوم که تا ابد خاطرشان در دلم باقی بماند.

استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احمد احمدی را که استاد راهنمای من در این پایان‌نامه بودند سپاس می‌گویم و از جناب آقای دکتر عباس عسکری زاده و دکتر جواد فتحی که داوری این پایان نامه را برعهده داشتند کمال تشکر را دارم و از دیگر اساتید بزرگوار آقای دکتر سبزواری، آقای دکتر میرحسین خانی و آقای دکتر مقدری که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم قدردانی می نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، همسر مهربان و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

محمدنبی بیگلری

دی ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

حشو

حشو بخش هایی از پیام است که بدون ایجاد کوچکترین کم و کاستی در اطلاعات قابل حذف هستند و به طور کلی اطلاعاتی که بیش از یکبار تکرار شده، حشو نامیده می شود.

مفهوم حشو ابتدا در ریاضیات و در نظریه اطلاعات مطرح گردید. که بر اساس آن می توان چگونگی انتقال اطلاعات را توصیف و اطلاعات موجود در هر پیام را بر اساس امکانات موجود در مجموعه، اندازه گیری نمود.

در هر نظام نشانه ای، مقدار حشو عبارت است از اختلافی که بین توانایی بالقوه و توانایی بالفعل وجود دارد. به عبارت دیگر وقتی از حداکثر توانایی مجموعه بهره برداری نشده باشد، گفته می شود که در مجموعه حشو وجود دارد.

نباید تصور کرد که حشو پدیده بدی است، برعکس در هر نظام ارتباطی وجود مقداری حشو به جهت از بین بردن تاثیر عوامل اخلالگر لازم است. هر مجرای ارتباطی در معرض عوامل اخلالگر قرار می گیرد که باعث از بین رفتن مقداری از اطلاعات موجود در پیام می شود. بنابراین پیام فرستاده شده با آنچه که گیرنده دریافت می کند، متفاوت است و اگر مجموعه ای به کلی فاقد حشو باشد، مقدار اطلاعات از دست رفته دیگر قابل برگرداندن نیست و در نتیجه علامت های دریافت شده توسط گیرنده به درستی کدگذاری نمی شود.

حشو در ارتباطات موقعی پیش می آید که مفهوم پیام تا حدی قابل پیش بینی باشد، هرچه بیشتر آن اطلاعات قابل پیش بینی باشد میزان حشو آن نیز در آن بیشتر است.

ما در کاربرد روزمره زبان بیش از آن مقداری که واقعا می شنویم حدس می زنیم یا به عبارت دیگر، بیش از مقداری که از جوهر صوتی زبان خبر می گیریم، از دانش ناآگاه خود درباره احتمال وقوع عناصر زبان کمک می گیریم.

مهندسان ارتباطات، از این امر در طراحی دستگاههای ارتباطی استفاده می کنند. صدای انسان در گفتار روزمره ارتعاشاتی بین ۵۰ تا۱۰۰۰۰ دور در ثانیه دارد، ولی دستگاه تلفن فقط در ارتعاشات بین ۲۰۰ تا ۳۴۰۰ دور را منتقل می کند یعنی وسعت باند آن $\frac{1}{۳}$ وسعت باند موردنیاز گفتار است. بدین ترتیب، تمام اطلاعات اکوستیک گفتار که در بالا و پایین این دو حد باشد، در مکالمات تلفنی از شنونده گرفته می شود. با این همه، ما در مکالمات عادی کمتر به اشکال بر می خوریم، زیرا حشو موجود در زبان، اطلاعات اکوستیک از دست رفته را جبران می کند. استفاده شنونده از حشو برای پر کردن خلا اکوستیک، در تحلیل نهایی به ساختمان گوش و نحوه پردازش اطلاعات شنیداری در مغز مربوط می شود، به همین دلیل ادراک گفتار در حوزه روانشناسی زبان قرار می گیرد.

حشو قاب

تابع حشو روی کره ای از فضای هیلبرت، با اندازه گیری های تراکم بردارهای قاب دور هر نقطه تعریف می شود.

امروزه حشو قاب ها، زمینه تحقیقی مناسب بعنوان یک مفهوم ریاضی و یا بعنوان پردازش سیگنال ها ارائه می گردد. بخشی از کاربرد قاب ها روش برطرف نمودن اغتشاش و تصحیح امواج مخابراتی است.

قاب ها یا سیستم های حشو یک مفهوم استاندارد در ریاضیات کاربردی و محاسبات علوم طبیعی و مهندسی دارند. بنابراین انتظار داریم که حشو از یک قاب، حداقل در یک بعد متناهی، یک روش اکتشاف مناسب است و نظریه قاب کاملا مبنی بر مفهوم حشو است.

خاصیت مفیدی از قاب ها که آنها را در مسائل کاربردی مفید واقع می کند، حشو آنها می باشد. یعنی هر بردار در فضا تعداد نامتناهی نمایش نسبت قابش دارد ولی همچنین یک نمایش طبیعی مشخص با ضرایب قابش دارد. نقش بازی شده توسط حشو با کاربردهای مخصوص تغییر پذیر است.

یک نقش مهم آنها توانایی آنهاست که با انتشار بخشیدن اطلاعات ما روی یک برد پهن تر از بردارها به ما توانایی بهتری به ثابت نگه داشتن تلفات (که در این وضع قسمت محذوف می نامیم) و نوسازی دقیق می دهد. این موارد در کدگذاری اینترنت (برای مخابره اطلاعات) و توزیع پردازش (که گیرنده ها در بیرون دائماً در حال نوسان هستند) و کاربردهای دیگری نشان داده شده است [۶]. مزیت دیگری از انتشار اطلاعات روی یک برد پهن تر تسکین دادن اثراتی از صدا در سیگنال است یا آن را به قدر کافی برجسته می سازد، بنابراین می تواند اغتشاشات پردازش سیگنال و تصویر را برطرف کند.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیمی است که در فصل های دو و سه موردنیاز است و سپس در فصل دوم تعاریف و قضایایی از قابها و حشو آن ارائه می دهیم. سرانجام در فصل سوم توابع حشو را معرفی کرده و به خواص آن می پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه:

در این فصل مفاهیم و تعاریفی که برای فصل های بعد موردنیاز است را به همراه مثال و قضیه هایی ارائه می کنیم و برای مطالعه مثال و قضایای بیشتر خواننده را به منابع [۶، ۷، ۸، ۱۲] ارجاع می دهیم.

۱.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یک نرم می نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق کند:

(۱) به ازای هر x، $\|x\| \geqslant 0$

و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

(۲) به ازای هر x و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.

(۳) به ازای هر X ∋x،y $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**نامساوی مثلث**).

فضای برداری X مجهز به نرم را یک فضای نرمدار می نامیم.

مثال ۲.۱.۱. [۸]

(۱) فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ به ازای هر $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ یک فضای نرمدار است، این نرم را نرم اقلیدسی می نامیم.

(۲) مجموعه همه دنباله های $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی یا مختلط به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ $l^p(\mathbb{N})$ نام دارد و یک فضای نرمدار با نرم زیر است:

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. یک ضرب داخلی، یک تابع از

$$< .,. >: X \times X \longmapsto \mathbb{C}$$

است که دارای خواص زیر باشد:

(۱) به ازای هر x, y در X؛ $< x, y > = \overline{< y, x >}$.

(۲) به ازای هر x, y در Xو هر α, β در $\mathbb{C}$ داریم؛ $< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$.

(۳) $< x, x > > 0$ و $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ضرب داخلی نرمی را به فضا القا می کند که به صورت $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ می باشد. یک فضای ضرب داخلی که تحت نرم القا شده تام باشد، یک **فضای هیلبرت** نامیده می شود.

مثال ۴.۱.۱. [۸، ۱۲]
(۱) ضرب داخلی استاندارد روی $\mathbb{C}^n$ بصورت زیر داده می شود.

$$<x,y>=\sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}y_j$$

که x_j, y_j متعلق به $\mathbb{C}$ و $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ، $y=(y_1,y_2,...,y_n)$.
این فضا تام است و بنابراین یک فضای هیلبرت با بعد متناهی است.
(۲) فضای $l^2(\mathbb{Z})$ یک فضای خطی مختلط با عمل های جمع و ضرب اسکالر است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$l^2(\mathbb{Z})=\Big\{\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\subset\mathbb{C} \quad | \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|z_n|^2<\infty\Big\}.$$

و یک ضرب داخلی روی آن با $<x,y>=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{x_n}y_n$ مشخص می شود. فضای $l^2(\mathbb{Z})$ یک فضای هیلبرت می باشد.

تعریف ۵.۱.۱. :

(۱) دو عضو x,y متعلق به فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ متعامد هستند اگر $<x,y>=0$.
(۲) متمم متعامد از یک زیرفضای S از $\mathcal{H}$ بصورت زیر می باشد:

$$S^{\perp}=\{x\in\mathcal{H}:<x,y>=0, \forall y\in S\}.$$

(۳) یک زیر مجموعه A از فضای ضرب داخلی X را یک دستگاه متعامد می نامند هرگاه برای هر دو عنصر ناصفر $x\neq y$ متعلق به A داشته باشیم: $<x,y>=0$
(۴) یک دستگاه متعامد B یک دستگاه متعامد یکه است هرگاه به ازای هر x متعلق به B داشته باشیم، $\|x\|=1$.
(۵) یک دستگاه متعامد S در یک فضای ضرب داخلی X را پایه متعامد یکه می نامند اگر به ازای هر $x\in X$ یک نمایش منحصرد بفرد $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ که $\alpha_n\in\mathbb{C}$ و x_nها عناصر مجزا از S هستند.

تعریف ۶.۱.۱. اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه باشد گوییم کامل است اگر به ازای هر $k\in\mathbb{N}$، داشته باشیم $<f,e_k>=0$، آنگاه $f=0$.

تعریف ۷.۱.۱. یک دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ را دنباله بسل گوییم اگر یک ثابت $B > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 \leq B\|f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

در قضیه زیر شرایط هم ارزی برای یک دستگاه متعامد یکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ با یک پایه متعامد یکه را بیان می کنیم:

قضیه ۸.۱.۱. [۷] *فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه برای یک دستگاه متعامد یکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ شرایط زیر هم ارزند:*

(۱) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *یک پایه متعامد یکه است،*

(۲) *به ازای هر* $f \in \mathcal{H}$، $f = \sum_{k=1}^{\infty} < f, e_k > e_k$،

(۳) *به ازای هر* $f, g \in \mathcal{H}$، $< f, g >= \sum_{k=1}^{\infty} < f, e_k >< e_k, g >$،

(۴) *به ازای هر* $f \in \mathcal{H}$، $\sum_{k=1}^{\infty} | < f, e_k > |^2 = \|f\|^2$ ***(اتحاد پارسوال)***،

(۵) $\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \mathcal{H}$،

(۶) *اگر به ازای هر* $k \in \mathbb{N}$، *داشته باشیم* $< f, e_k >= 0$، *آنگاه* $f = 0$.

۲.۱ عملگرها

مفهوم یک عملگر روی یک فضای هیلبرت، تعمیم طبیعی ایده ای از یک تابع از متغیر حقیقی است. در واقع در ریاضیات و مهندسی اساسی است. عملگرهای خطی روی یک فضای هیلبرت در موارد زیادی برای نمایش دادن کمیت های فیزیکی استفاده می شوند بنابراین خیلی مهم و سودمند هستند.

تعریف ۱.۲.۱. یک عملگر T از یک فضای برداری X به فضای برداری Y که X, Y اسکالرهایی از میدان F دارند، را عملگرخطی می نامند هرگاه برای هر x_1, x_2 متعلق به X و برای هر $a, b \in F$ داشته باشیم:

$$T\left(ax_1 + bx_2\right) = aTx_1 + bTx_2.$$

تعریف ۲.۲.۱. یک عملگر $T : X \longmapsto X$ را روی فضای برداری X کراندار می نامند اگر یک عدد K وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|Tx\| \leqslant K\|x\|$. نرم یک عملگر Tمعادل است با

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید T یک عملگر تعریف شده روی یک فضای برداری X باشد، یک عملگر S تعریف شده روی $\mathbf{R}\left(T\right)$ را معکوس T می نامند هرگاه برای هر x متعلق به $\mathbf{R}\left(T\right)$ داشته باشیم $\quad TSx = x$.
همچنین برای هر x متعلق به $\mathbf{D}\left(T\right)$، $\quad STx = x$.
که در اینجا $\mathbf{D}$ دامنه و $\mathbf{R}$ برد عملگر می باشد.
معکوس T را با T^{-1} نشان می دهیم و داریم

$$\mathbf{D}\left(T^{-1}\right) = \mathbf{R}\left(T\right) \quad , \quad \mathbf{R}\left(T^{-1}\right) = \mathbf{D}\left(T\right).$$

مثال ۴.۲.۱. [۱۲] فرض کنید$X = l^2(\mathbb{N})$. یک عملگر T روی X را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

در اینصورت T یک عملگر خطی معکوس پذیر روی $l^2(\mathbb{N})$ می باشد.

تعریف ۵.۲.۱. عملگر الحاقی: فرض کنید T یک عملگر کراندار از فضای هیلبرت $(K, <.,.>_K)$ به توی فضای هیلبرت $(\mathcal{H}, <.,.>_\mathcal{H})$ باشد، عملگر یکتا $T^* : \mathcal{H} \longmapsto K$ را عملگر الحاقی گوییم هرگاه

$$<x, Ty>_\mathcal{H} = <T^*x, y>_K \qquad \forall x \in \mathcal{H}, y \in K.$$

عملگر الحاقی خواص زیر را دارد:

$$(T+S)^*=T^*+S^* \quad ,(S^*)^{-1}=(S^{-1})^* \quad ,(ST)^*=T^*S^*.$$

و اگر $T=T^*$ برابر باشد می گوییم که T خود الحاقی است.

تعریف ۶.۲.۱. عملگر یکانی: یک نگاشت خطی $U:\mathcal{H}_1\longmapsto\mathcal{H}_2$ بین فضاهای هیلبرت حقیقی یا مختلط $\mathcal{H}_1$و$\mathcal{H}_2$، یکانی نامیده می شود اگر معکوس پذیر باشد و به ازای هر x,y متعلق به $\mathcal{H}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$<Ux,Uy>_{\mathcal{H}_2}=<x,y>_{\mathcal{H}_1}$$

و برای یک عملگر یکانی T رابطه $T^*T=TT^*=I$ برقرار است که در آن I عملگر همانی است.

مثال ۷.۲.۱. [۱۲] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت متناهی بعد و $\{e_n\}_{n=1}^k$ یک پایه متعامد یکه از $\mathcal{H}$ باشد در اینصورت عملگر

$$U:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathcal{H}$$

$$U(z_1,z_2,...,z_n)=z_1e_1+...+z_ne_n$$

یکانی است.

تعریف ۸.۲.۱. یک عملگر T را عملگر مثبت می نامند اگر آن، خودالحاق باشد و

$$\forall x\in\mathcal{H} \qquad <Tx,x>\geqslant 0.$$

یک کلاس مهم از عملگرهای خود الحاق، تصاویر متعامد است.

تعریف ۹.۲.۱. عملگر تصویر: اگر یک زیرفضای بسته V از $\mathcal{H}$ داده شده باشد، تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ به توی V عملگر $P:\mathcal{H}\longmapsto\mathcal{H}$ می باشد، بطوری که

$$Px=x \qquad x\in V \qquad , \quad Px=0 \quad x\in V^{\perp}$$

مثال ۱۰.۲.۱. [۷] اگر S یک زیرفضای بسته از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک سیستم متعامد یکه کامل در S باشد، در اینصورت عملگر تصویر P بتوی S را می توان بصورت زیر نوشت:

$$Px=\sum_{n=1}^{\infty}<x,e_n>e_n.$$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی و $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ یک عملگر باشد آنگاه اثر T بصورت زیر تعریف می شود:

$$Tr(T)=\sum_{i=1}^{N}<Te_i,e_i>$$

که $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می باشد.

قضیه ۱۲.۲.۱. *فرض کنید T یک عملگر مثبت با مرتبه متناهی با اثر صحیح k باشد. اگر $k\geqslant rank(T)$ باشد آنگاه T را می توان به صورت مجموعی از k تصویر از مرتبه یک نوشت.*

برهان. می خواهیم بردارهای یکه $x_1,x_2,...,x_k$ را طوری بسازیم که T مجموعی از تصاویر $x_i\oplus x_i$ باشد. برای برهان از استقراء روی k استفاده می کنیم. فرض کنید $n=rank(T)$ و $\mathcal{H}_n=range(T)$ که $\mathcal{H}_n$ یک فضای هیلبرت با بعد n می باشد.

اگر $k=1$ باشد آنگاه T باید خودش تصویر از مرتبه یک باشد.

فرض کنیم $k\geqslant 2$ باشد. یک پایه متعامد یکه $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ برای $\mathcal{H}_n$را می توان نوشت به طوری که T به عنوان یک ماتریس قطری با درایه های مثبت $a_1\geqslant a_2\geqslant ...\geqslant a_n>0$ روی $\mathcal{H}_n$ باشد.

حالت اول($k>n$): در این حالت داریم$a_1>1$ بنابراین می توان $x_k=e_1$ و

$$T-(x_k\oplus x_k)=diag(a_1-1,a_2,...,a_n)$$

یعنی باقیمانده روی $\mathcal{H}_n$ درایه های قطری مثبت می شود و هنوز مرتبه n دارد. حال اثر $k-1\geqslant n$ با فرض استقراء برقرار است.

حالت دوم ($k=n$): اکنون داریم $a_n\leqslant 1$ و $a_1\geqslant 1$. فرض کنید عملگر خودالحاق مرتبه متناهی، $R\in B(\mathcal{H})$ داده شده باشد و $\mu_n(R)$ علامت بزرگترین مقدار ویژه n-ام از شمارش مرتبه تکرار R باشد. می دانیم که

$$\mu_n(T-(e_1\oplus e_1))\geqslant 0\qquad \mu_n(T-(e_n\oplus e_n))<0$$

و $\mu_n(T-(x\oplus x))$ یک تابع پیوسته از $x\in\mathcal{H}_n$ است. بنابراین $y\in\mathcal{H}_n$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_n(T-(y\oplus y))=0.$$

حال $x_k=y$ انتخاب می کنیم. می دانیم که باقیمانده $(T-(x\oplus x))\geqslant 0$ و

$$trace(T-(x\oplus x))=n-1\quad ,rank(T-(x\oplus x))=n-1=k-1$$

و دوباره با فرض استقراء نتیجه برقرار است. ■

تعریف ۱.۲.۱۳. عملگر معین: یک عملگر خودالحاق T روی یک فضای برداری مختلط V، با بعد متناهی با ضرب داخلی خودالحاق، یک عملگر مثبت معین تعریف می شود اگر:

برای $v = 0$ داشته باشیم: $<Tv, v> = 0$.

و عملگر T یک عملگر نیمه معین مثبت است اگر:

$<Tv, v> \geqslant 0$ که این حالت ممکن است برای بردارهای غیر صفر v رخ دهد.

قضیه ۱.۲.۱۴. [۷] *اگر $U : X \longrightarrow X$ کراندارباشد و $\|I - U\| \leqslant 1$ باشد آنگاه U معکوس پذیر است و $U^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(I - U)^K$ علاوه بر این*

$$\|U^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|I - U\|}.$$