بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی، گرایش مالی

معادلات دیفرانسیل تصادفی و کاربرد آنها در بازارهای نقدی نفت

توسط:

حسن رنجبر

استاد راهنما:

دکتر عبدالساده نیسی

استاد مشاور:

دکتر کاظم نوری

اسفند ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدرم به پاس سالها تلاش تا

«بیاموزم»

مادرم به پاس دلسوزی ها تا

«بیاسایم»

برادرانم به پاس مهربانی ها تا

«بنگارم»

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از خانواده مهربانم، به‌ویژه پدر و مادرم که با لطف بی‌دریغ و حمایت‌های بی‌شائبه خود مرا یاری نمودند سپاس‌گزاری کنم.

همچنین لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی، که قطعاً بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید و جناب آقای دکتر کاظم نوری که زحمت مشاوره اینجانب را به‌عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

برخود لازم می دانم از جناب آقایان دکترمحمد جلودار ممقانی و دکتر جواد دمیرچی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود سبب بهبود این رساله شدند، سپاسگزاری نمایم.

در خاتمه از دوستان عزیزم آقایان امین زمانی راد، بهزاد عباسی و حمید جوادی مجلج که با کمکهای بی دریغ خود بر غنای علمی این اثر افزودند کمال تشکر را دارم.

چکیده

هدف از این پژوهش بررسی مدلهای قیمت گذاری نفت با پرش و بدون پرش است. در این خصوص ابتدا، جمله پرش را معرفی کرده، سپس با افزودن آن به معادله دیفرانسیل تصادفی، مدل پرش-انتشار را می سازیم.

این پژوهش با معرفی بسط های معادلات دیفرانسیل تصادفی با پرش و بدون پرش آغاز می شود. سپس برای هر کدام از این بسط های تصادفی مثال های عددی ارائه می کنیم. سرانجام، با استفاده از برآورد حداکثر درست نمایی و روش گشتاورها برای داده های قیمت نفت ایران، مدلی ارائه می کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل تصادفی، مدل پرش-انتشار، جمله پرش، برآورد حداکثر درست نمایی، روش گشتاورها

فهرست مطالب

پیشگفتار

با توجه به نقش حیاتی نوسانات در بازارهای مالی طی سال های اخیر توجه چشمگیری به تجزیه و تحلیل پیش بینی این نوسانات شده است. بر این اساس محققین با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی کوشیده اند مسیر حرکت این نوسانات را پیش بینی کنند. در نتیجه مدل های تصادفی با استفاده از این معادلات به وجود آمده است که از آن جمله می توان به حرکت براونی هندسی اشاره کرد. اگرچه این مدلها در پیش بینی قیمت توانا هستند اما در مقابل افت و خیز های ناگهانی قیمت ها ناتوانند. برای رفع این نقیصه، محققین عبارتی به عنوان پرش به مدل های تصادفی افزودند و به این شکل مدل های تصادفی با پرش به وجود آمد.

هدف ما در این پایان نامه این است که ابتدا عبارت پرش را تعریف کنیم. سپس با استفاده از بسط واگنر-پلاتن مدل هائی را ایجاد کنیم که بتوانیم با این مدل ها قیمت نفت را پیش بینی کنیم. ترتیب ارائه مطالب در این پایان نامه به شرح زیر است. در فصل اول تاریخچه ای از قیمت گذاری نفت را شرح می دهیم و سپس به بیان مفاهیم و تعاریف ریاضی مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوم بسط های تصادفی که منجر به تولید مدل های تصادفی می شود را ارائه می کنیم . در فصل سوم مثال های از این بسط های تصادفی می آوریم. سرانجام در فصل آخر با استفاده از این مدلها قیمت نفت را پیش بینی می کنیم.

فصل ۱

پیش نیازها

مقدمه

۱-۱ تاریخچه ی مختصر از قیمت گذاری نفت خام

از زمان کشف نفت در خاورمیانه تا اوایل ۱۹۷۰ کشورهای تولید کننده عضو اوپک، در تولید و قیمت گذاری نفت خام دخالتی نداشتند اما به راحتی درآمدی از محل حق الامتیاز (بهره مالکانه) و مالیات کسب می کردند. رژیم قیمت گذاری نفت در این دوران بر مبنای یک نظام امتیاز انحصاری قرار داشت که در این نظام، قیمت نفت خام بر اساس قیمتهای اعلان شده توسط شر کتهای نفتی تعیین می شود. از این رو قیمت نفت خام از ثبات نسبی برخوردار بود هر چند که نظام قیمت گذاری از شفافیت لازم برخوردار نبود.

تا اواخر دهه ۱۹۵۰، غولهای نفتی که اصطلاحاً به آنها هفت خواهران نفتی[۱] گفته می شد، ۸۵ درصد از تولید نفت خام خارج از ایالات متحد امریکا، کانادا، اتحاد جماهیر شوروی و چین را از طریق توافق نامه هایی که در خصوص تولید و قیمت گذاری با یکدیگر به توافق رسیده بودند، در اختیار داشتند. از آنجایی که برخی از این شرکتهای نفتی خریدار و برخی دیگر فروشنده نفت خام بودند، مبادله نفت در بین آنها بر اساس قراردادهای بلند مدت صورت می گرفت و قیمت این قراردادها نوعاً فاش نمی شد.

در دهه ۱۹۶۰، ورود شرکتهای مستقل نفتی و افزایش صادرات روسیه زمینه ی جهت ایجاد بازاری برای

[۱] Seven Sisters: BP, Exxon, Gulf, Mobil, Royal Dutch/Shell, Chevron and Texaco

خرید و فروش نفت خام، خارج از کنترل هفت خواهران نفتی فراهم نمود. اما قلمرو و اندازه این بازار با توجه به سطح اندک تولیدی نفت خام شرکت های مستقل آمریکایی و سایر شرکتهایی که در ونزوئلا، لیبی و سواحل خلیج فارس فعالیت می کردند، محدود شد. از عوامل دیگر می توان به تصمیم امریکا برای تحمیل سهمیه های اجباری واردات جهت افزایش قدرت رقابتی شرکت های امریکایی در بازار فروش خارج از امریکا و فشار بر سطح قیمت ها اشاره کرد. تشکیل اوپک در سال ۱۹۶۰ نیز تلاشی در راستای فرسایش نقش قیمت های اعلان شده بود.

در خلال سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۷۳ تقاضای جهانی برای نفت خام رشد چشمگیری داشت. این امر موجب افزایش سهم اوپک در تولید جهانی شد. با افزایش یکباره قیمت نفت تا ۱۱/۶۵۱ دلار در دسامبر ۱۹۷۳ تغییری در توازن قدرت به سود اوپک در بازارهای جهانی نفت ایجاد شد و اوپک به طور یکطرفه نقش تعیین قیمت را بر عهده گرفت. برخی از تحولات مانند ملی شدن صنعت نفت در الجزایر، عراق، و لیبی و تغییر قراردادهای امتیازی به قراردادهای جدید باعث ایجاد قراردادهای مشارکت در تولید شد. این گونه قراردادها به دولتها ی اوپک سهمی از تولید نفت اعطا می کرد که آنها باید به فروشندگان ثالث می فروختند. این جریان به معنای مقدمه ای جدید برای آغاز مفهوم دیگری از قیمت بود. همانند مالکان نفت خام، دولتها باید قیمت را برای خریداران ثالث تنظیم می کردند از این رو مفهوم قیمت فروش دولتی یا رسمی مطرح شد.

به علت فقدان تجربه در پالایش و بازاریابی در کشور های صادر کننده نفت، بیشتر سهم مربوط به کشورهای تولید کننده عملاً به همان شرکتهای بزرگ نفتی باز می گشت که به نوعی امتیاز انحصاری در بازارهای جهانی نفت داشتند. قیمت در این بازارهای فروش اجباری، در واقع بخشی از اصول قراردادهای مشارکت در تولید به شمار می آید. بدین ترتیب رژیم قیمت گذاری نفت در اوایل دهه ۱۹۷۰ بر اساس قیمت های اعلان شده و قیمت های فروش دولتی متمرکز بود که این جریان به میزان زیادی ناکارا بود. این رژیم قیمت گذاری بدان معنی بود که یک خریدار می توانست یک بشکه نفت را به قیمت های متفاوت تهیه کند. همچنین، فقدان اطلاعات و شفافیت در بازار به معنای آن بود که هیچ سازوکاری وجود ندارد که تضمین کند این قیمت ها به یکدیگر میل می کنند. این رژیم کوتاه مدت بود و در سال ۱۹۷۵ پایان یافت.

تولید کنندگان اوپک که در این مدت تصور می کردند نقش بسیار مهمی در تعیین قیمت نفت خام ایفا می کنند تصمیم گرفتند نفت خام سبک عربی را به عنوان نفت شاخص در نظر بگیرند و قیمت فروش

دولتی خود را بر مبنای آن و با در نظر گرفتن مابه التفاوتی تعیین کنند، اما از آنجا که مقدار مابه التفاوت برای نفت شاخص در هر دوره بر مبنای عوامل گوناگونی چون ارتباط عرضه و تقاضا و درصد محصولات پالایشی برای هر نوع نفت خام تعیین می شد، این انعطاف پذیری بیش از حد برای تعیین مابه التفاوت ها توسط کشورهای صادر کننده نفت، نحوه تعیین قیمت نفت خام شاخص را پیچیده تر می ساخت. پس از بحران ۱۹۸۳ که تقاضای نفت بر عرضه فزونی یافت، اوپک تلاش کرد سیستمی را با انعطاف پذیری کمتری برای تعیین قیمت ایجاد کند اما چندان موفق نشد.

تحولات لازم برای ایجاد رژیم فعلی قیمت گذاری نفت به تنهایی و جدا از رژیم های قبلی قابل درک نیست اما توجه به یک نکته اساسی ضروری است. رژیم فعلی در واکنش به تحولات عمده ای ایجاد شد که در دهه های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ بازار جهانی نفت را دگرگون ساخت و همچنین بحرانهایی که باعث رها سازی رژیم قبلی شد.

با برقراری نظام قیمت گذاری وابسته به بازار در سال ۱۹۸۳، فصل جدیدی در تعیین قیمت نفت خام آغاز شد. در این نظام جدید وظیفه تعیین قیمت نفت خام که در ابتدا بر عهده شرکتهای نفتی بود و سپس در برهه ای از زمان اوپک تا حدی توانست بر آن تأثیرگذار باشد به بازار سپرده شد.

ابتدا شرکت ملی نفت مکزیک این نظام قیمت گذاری را در سال ۱۹۸۶ اجرا کرد، سپس کشور های صادر کننده نفت به طور گسترده به آن روی آوردند و در نهایت در سال ۱۹۸۸ این نظام به عنوان نظام اصلی تعیین قیمت نفت خام در بازارهای جهانی پذیرفته شد و تاکنون نیز چنین است. قاعده اصلی این نظام مبتنی بر قیمت شاخص یا مرجع است البته به جای آنکه از قیمت اداره شده اوپک منتج شود از قیمت بازار مشتق می شود. چشم انداز بازار جهانی نفت آماده پذیرش چنین تحولی بود. همانطور که پیشتر گفته شد اتمام شیوه معاملات امتیازی (انحصاری) و ملی گرایی گسترده در صنعت نفت جهان که عرضه نفت از شرکتهای چند ملیتی را به ویژه در اواخر دهه ۱۹۷۰ مختل کرد، پایه های مبادلات آزاد و معاملات در بورسها و خارج از این شرکتها را مستحکم نمود. تقابل تعداد زیادی از عرضه کنندگان و تقاضا کنندگان در بازارهای نفت، اهمیت چنین معاملاتی را روشن تر نمود. بدین ترتیب ساختار پیچیده ای از بازار نفت اهمیت چنین معاملاتی را روشن تر نمود. بدین ترتیب ساختار پیچیده ای از بازار نفت شامل بازارهای نقدی، سلف، آتی ها، اختیارات و دیگر بازارهای مشتقه می شود .

۱-۲ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

دراین بخش با مفاهیم آماری و فرآیندهای تصادفی مورد استفاده در این پایان نامه آشنا خواهیم شد.
(میدان) فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه ای از زیر مجموعه های Ω باشد. آنگاه $\mathcal{A}$ یک میدان است اگر

۱. $\Omega \in \mathcal{A}$ و $\circ \in \mathcal{A}$

۲. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \in \mathcal{A}$

۳. A و $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(σ-میدان) میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های Ω، σ-میدان روی Ω است اگر برای هر دنباله $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ داشته باشیم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

از تعاریف بالا می توان این نتیجه گرفت که یک σ-میدان یک میدان نیز هست. ولی یک میدان ممکن است یک σ-میدان نباشد. برای فضای نمونه متناهی تفاوتی بین میدان و σ-میدان وجود ندارد.
اعضای $\mathcal{A}$ را پیشامد، یا زیر مجموعه های $\mathcal{A}$-اندازه پذیر Ω و یا زیر مجموعه های اندازه پذیر Ω می نامیم مشروط بر این که ابهامی در ارجاع به σ-میدان رخ ندهد. زوج مرتب $(\sigma, \mathcal{A})$ را یک فضای اندازه پذیر می نامیم. (احتمال) فرض کنید Ω مجموعه تهی و $\mathcal{A}$، σ-میدانی از زیر مجموعه Ω باشد. اندازه احتمال P تابعی است که به هر مجموعه $A \in \mathcal{A}$ عددی از $[\circ, 1]$ نسبت می دهد و احتمال A نامیده می شود که با $P(A)$ نشان می دهیم. می دانیم که

۱. $P(\Omega) = 1$

۲. (مجموعه شمارای جمعی) اگر $A_1, A_2, \ldots$ دنباله ی از مجموعه های مستقل از هم در $\mathcal{A}$ باشد آنگاه

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

سه تای $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ را فضای احتمال می نامند. پالایه [1] روی $(\Omega, \mathcal{A}, P)$، خانواده صعودی از σ-میدان های $(\mathcal{A}_t)_{t\geq ۰}$ است که برای $۰ \leq t_۱ < t_۲ < \ldots t_n \leq T$

$$\mathcal{A}_{t_۱} \subseteq \mathcal{A}_{t_۲} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_{t_n} \subseteq \mathcal{A}_T.$$

فضای احتمال مجهزبه پالایه $(\mathcal{A}_t)_{t\geq ۰}$ را یک فضای احتمال پالایه شده می نامند و با $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_{t\geq ۰}, P)$ نمایش می دهند.

۱-۲-۱ فرآیند تصادفی

فرض کنید $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی از دو متغیر $t \in I$ و $w \in \Omega$ باشد که I زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ یا زیر مجموعه ای از $[۰, \infty)$، و $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. اگر $X(t)$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$، به ازای هر $t \in I$ باشد یعنی $X(t) \in \mathcal{A}$ برای هر $t \in I$، آنگاه X را یک فرآیند تصادفی گویند.

۱-۲-۲ فرآیند مارکف

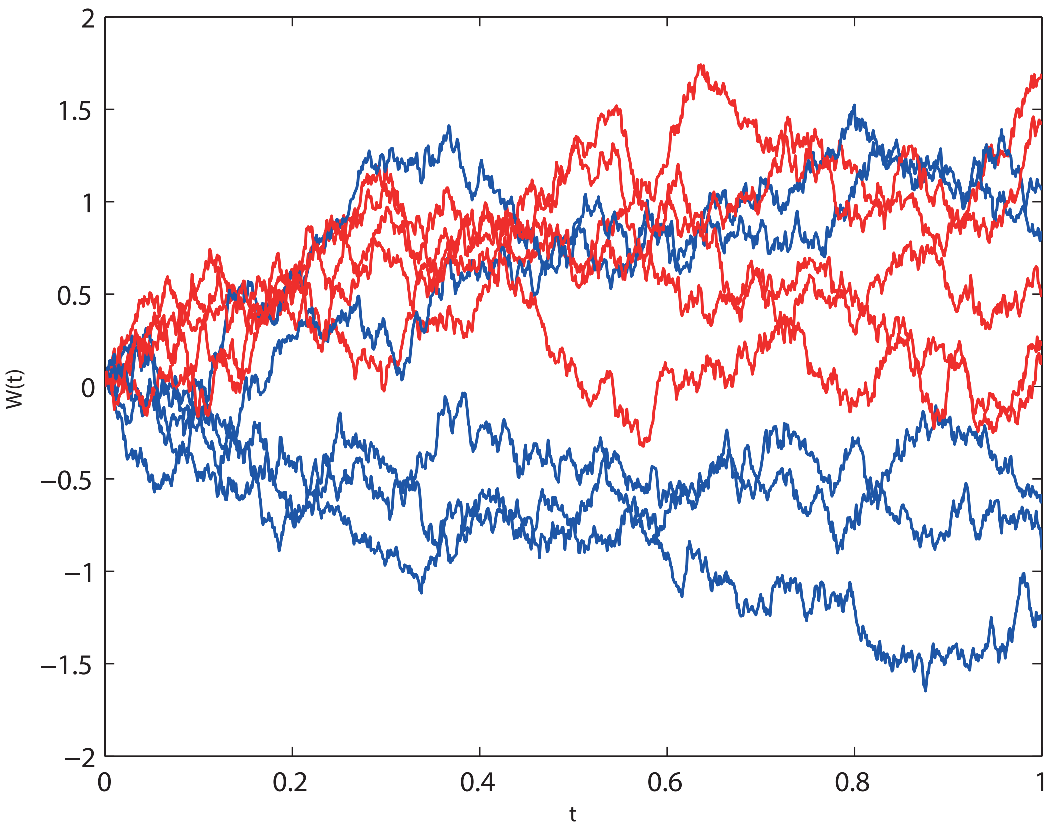
فرآیند تصادفی X را فرآیند مارکوف[2] گویند اگر برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ و زمانهای $t_۱ < \ldots < t_n$ متغیرهای تصادفی شرطی $X(t_n)|X(t_{n-۱})$ و $(X(t_{n-۲}), \ldots, X(t_۱)|X(t_{n-۱}))$ مستقل باشد، یعنی گذشته X مستقل از آینده آن به شرط حال باشد.

در این فرآیندها فرض براین است که ارزش جاری یک متغیر برای پیش بینی مقادیر آینده آن کفایت می کند. بنابراین در فرآیندهای مارکف، سابقه تغییرات یک متغیر و نیز چگونگی تعیین ارزش جاری این متغیر به کمک مقادیر گذشته، تأثیری در مقدار آینده آن ندارد، پس پیش بینی مقادیر آتی برای هر متغیر تصادفی، خود متغیر تصادفی است و لذا بر حسب توابع توزیع احتمال بیان می شود. فرض می کنیم تغییرات این متغیر در خلال یک سال آینده توزیعی نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ دارد، یعنی $N(\mu, \sigma^۲)$. فرض کنید این توزیع نرمال را استاندارد کرده ایم، لذا تابع توزیع احتمال این متغیر برابر است با $N(۰, ۱)$. توزیع تغییرات این متغیر در سال آینده برابر است با مجموع دو توزیع نرمال که

[1] filter

[2] Markov Process

میانگین و انحراف معیار هر کدام به ترتیب صفر و یک است، و چون این متغیر از فرآیند مارکف تبعیت می کند پس این دو توزیع نرمال از یکدیگر مستقل اند که در اینصورت اگر دو توزیع نرمال را جمع کنیم توزیع نرمال حاصل نیز نرمال خواهد بود؛ و لذا تابع توزیع احتمال برای متغیر مفروض طی دو سال آینده برابر است با $N(0, \sqrt{2})$. توزیع در خلال دوره ای سه ماهه برابر است با $N(0, \sqrt{0/25})$، زیرا واریانس متغیر در خلال یک سال برابر است با واریانس آن طی ۴ دوره سه ماهه. بنابراین توزیع احتمال طی دوره ای به طول T برابر است با $N(0, \sqrt{T})$ و طی دوره کوتاه به طول δt برابر خواهد بود با $N(0, \sqrt{\delta t})$.



شکل ۱-۱: نمونه مسیرهای فرآیند وینر.

۱-۲-۳ فرآیند وینر

فرآیند تصادفی $\{Z(t) : t \geq 0\}$، روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فرآیند وینر[۱] است هرگاه خصوصیت های زیر را داشته باشد:

[۱] Wiener Process

۱. $Z(0) = 0$،

۲. منحنی ها مسیر پیوسته باشند،

۳. نموها مستقل باشند: اگر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 < t_4$، متغیر های تصادفی $Z(t_2) - Z(t_1)$ و $Z(t_4) - Z(t_3)$ مستقل باشند،

۴. نموها گاوسی باشد: اگر $t_1 < t_2$ آنگاه $(Z(t_2) - Z(t_1)) \sim N(0, \sqrt{t_2 - t_1})$، در اینجا $\sqrt{t_2 - t_1}$ انحراف معیار استاندارد $(Z(t_2) - Z(t_1))$ را نشان می دهد.

این فرآیند حالت خاصی از فرآیند مارکف محسوب می شود که تابع توزیع احتمال آنها میانگین صفر و واریانس یک دارد. این نوع فرایند اساساً در فیزیک ذرات کاربرد وسیعی دارد زیرا به وسیله آن می توان جابجایی ذراتی را توضیح داد که تحت تأثیر شوک های کوچک مولکولی، حرکت های تصادفی دارند. فرایند وینر را «حرکت براونی هندسی[1]» نیز می نامند.

۱-۲-۴ حرکت براونی

حرکت براونی، یک فرآیند تصادفی $\{X(t) : t \geq 0\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ است که شرایط زیر برای آن برقرار است:

۱. هر نمو $X(t+s) - X(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t\sigma^2$ است که در آن σ یک پارامتر ثابت است،

۲. برای هر دو فاصله از هم جدا $[t_1, t_2]$ و $[t_3, t_4]$ با $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ نموهای $X(t_2) - X(t_1)$ و $X(t_4) - X(t_3)$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال شرط اول هستند،

۳. $X(0) = x$،

۴. $X(t)$ به احتمال نزدیک به یقین همه جا پیوسته است.

اگر در شرط اول، $\sigma^2 = 1$ و در شرط سوم ، $x = 0$ باشد، آنگاه حرکت براونی را استاندارد گویند.
بنا به تعریف این حرکت، هر اطلاعی مربوط به $X(\tau)$ که $\tau < s$ تأثیری روی توزیع $X(t+s) - X(s)$

[1] Gometric Brownion Montion

ندارد. در واقع اگر $t_\circ < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < t$ آنگاه

$$P[X(t) \leq x | X(t_\circ) = x_\circ, \ldots, X(t_n) = x_n] = P[X(t) \leq x | X(t_n) = x_n]$$

یعنی حرکت براونی خاصیت مارکف دارد.
از این به بعد حرکت براونی استاندارد را با $W(t)$ نشان می دهیم.

۱-۲-۵ فرآیند پواسن

فرآیند پواسن[1] $N = \{N_t, t \geq \circ\}$ با شدت $\lambda > \circ$ فرآیندی قطعه قطعه ثابت با نمو مستقل مانا و با مقدار اولیه $N_\circ = \circ$ است به طوری که $N_t - N_s$ پواسن توزیع شده با شدت λ_{t-s} است و برای هر $k = \{\circ, 1, \ldots\}$، $t \geq \circ$ و $s \in [\circ, t]$ دارای احتمال

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{e}{-\lambda(t-s)(\lambda(t-s))^k} k!$$

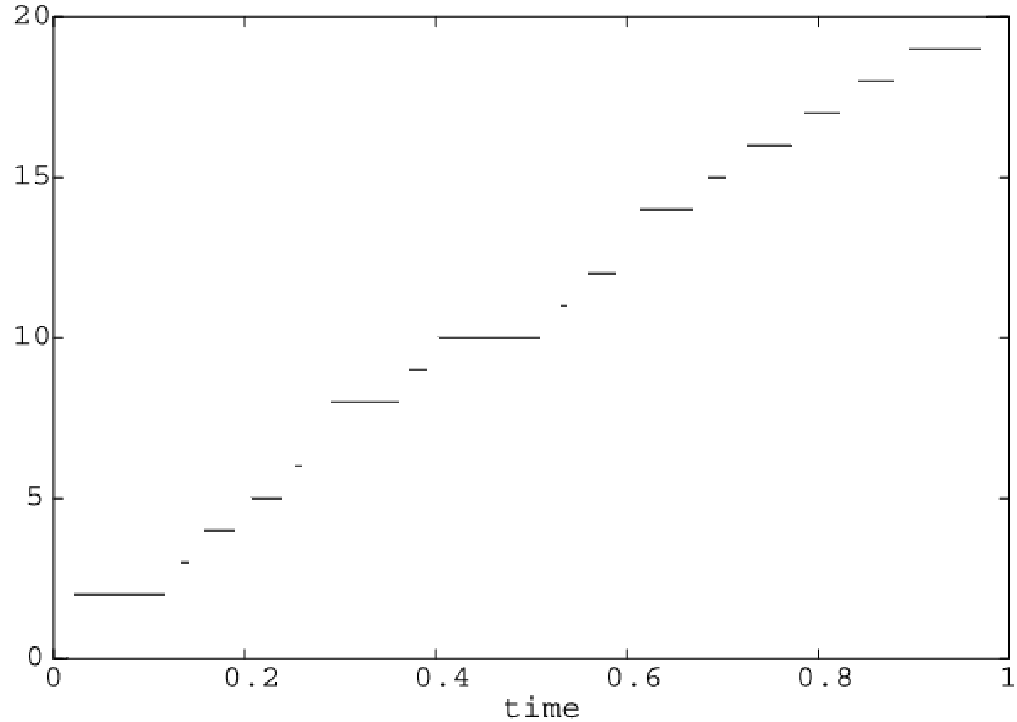
است.
برای فرآیند پواسن N با شدت λ، میانگین و واریانس برای $t \geq \circ$ برابر

$$\mu(t) = E(N_t) = \lambda t, \qquad \upsilon(t) = Var(N_t) = E\Big((N_t - \mu(t))^2\Big),$$

است. در شکل (۱ − ۲) فرآیند پواسن با شدت (میانگین نرخ ورود) $\lambda = ۲۰$ رسم شده است. در مورد این شکل، طبق میانگین فرآیند پواسن، انتظار داریم که به طور میانگین ۲۰ پیشامد در بازه زمانی $[\circ, 1)$ اتفاق بیفتد. تأکید می کنیم که فرآیند پواسن، فرآیندی مانای مشروط شده روی مقدار اولیه ی که می دانیم نیست. به هر حال نمو هایش همان توزیع پواسن را در سرتاسر بازه زمانی با طول یکسان دارند که این مفهوم مانایی است.
فرآیند پواسن N پیشامدها را می شمارد و دنباله صعودی از زمانهای پرش $\tau_1, \tau_2, \ldots$ که هرکدام وابسته به پیشامد محاسبه شده خود است، را تولید می کند. بنابراین N_t با تعداد پیشامد هایی که در زمان

[1] Poisson Process

$t \geq ۰$ رخ می دهد برابر است.



شکل ۱-۲: مسیر فرآیند پواسن با شدت ۲۰ $= \lambda$.

۱-۲-۶ اندازه پواسن

مجموعه نشانه را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$E = \mathbb{R} \setminus \{۰\}.$$

فرض کنید $\mathrm{B}(\Gamma)$ مشخص کننده کوچکترین σ-میدان شامل همه مجموعه های باز مجموعه Γ باشد. حالا، ما روی $\mathcal{E} \times [۰, \infty)$ داده شده، اندازه شدت را به شکل

$$\nu_\varphi(dv \times dt) = \varphi(dv)dt$$

در نظر می گیریم به طوری که $\varphi(.)$ روی $\mathsf{B}(\mathcal{E})$ با

$$\int_E \min(۱, v^۲)\varphi(dv) < \infty \tag{۱-۱}$$

اندازه است. متقابلاً اندازه پواسن $p_\varphi(.)$ روی $\mathcal{E}\times[۰,\infty)$، برای $T\in(۰,\infty)$ و هر مجموعه A از σ-میدان تولید شده $\mathsf{B}(\mathcal{E})$، متغیر تصادفی $p_\varphi(A)$، که تعداد نقاط در $A\subseteq\mathcal{E}\times[۰,\infty)$ را می شمارد، به طوری فرض شده است که پواسن توزیع شده دارای شدت

$$\nu_\psi(A) = \int_۰^t \int_{\mathcal{E}} ۱_(\{v,t)\in A\}\varphi(dv)$$

باشد [۲۵]. برای $\ell\in\{۰,۱,\ldots\}$ یعنی

$$P(p_\varphi(A)=\ell) = \frac{\nu_\varphi(A)^\ell}{\ell!}e^{-\nu_\varphi(A)}.$$

برای مجموعه های $A_۱,\ldots,A_r\subseteq\mathcal{E}\times[۰,T]$ و $r\in\mathbb{N}$ متغیرهای تصادفی $p_\varphi(A_۱),\ldots,p_\varphi(A_r)$ مستقل فرض شده اند. متغیر تصادفی $\tau:\Omega\to[۰,\infty)$ با توجه به پالایه $(\mathcal{A}_t)_{t\geq ۰}$ زمان توقف نامیده می شود اگر برای هر $t\geq ۰$ داشته باشیم $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{A}_t$.
رابطه بالا این حقیقت را بیان می کند که پیشامد $\{\tau\leq t\}$ ، $\mathcal{A}_t$-اندازه پذیر است و بنابراین در زمان t قابل مشاهده است.

۱-۳ مارتینگل

فرض کنید $\mathcal{A}_n$ یک دنباله غیر نزولی از σ-میدانها باشد و X_n یک متغیر تصادفی $\mathcal{A}_n$-اندازه پذیر باشد. آنگاه دنباله $\{X_n,\mathcal{A}_n\}$ را یک مارتینگل گوییم اگر

۱. X_n، انتگرال پذیر باشد یعنی $E(|X_n|)<\infty$، $n=۱,۲,\ldots$

۲. تقریباً به طور حتم $X_n = E(X_{n+۱}|\mathcal{A}_n)$