بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

عملگرهای ماکسیمال هاردی و لیتلوود روی فضای $L^{p(x)}$

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

اللەکرم شفیعی

استاد راهنما: دکتر جمال روئین

بهمن ۱۳۷۸۶

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز خداوند متعال را سپاسگزارم که اگر لطف بی‌کران او نبود من بر نمی خاستم و اگر یاریش نبود من هیچ بودم . در ابتدا وظیفهٔ علمی و اخلاقی خود می‌دانم که از استاد عزیزم جناب آقای دکتر جمال روئین بخاطر زحمات فراوان و فداکاریهایشان در طول این مدت کمال تشکر را داشته باشم . از اساتید محترم کمیتهٔ داوران جناب آقایان دکتر رشید زارع نهندی ، دکتر امیر رهنمای برقی و دکتر فرض الله میرزاپور سپاسگزارم.

در پایان نیز از تمامی عزیزانی که در جلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ اینجانب حضور یافتند قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه با معرفی عملگر هاردی — لیتلوود تعمیمی از فضای لبگ را ارائه داده و بر آن عملگر هاردی — لیتلوود را تعمیم می‌دهیم. سپس کرانداری عملگر تعمیم یافتهٔ هاردی — لیتلوود را مورد بررسی قرار داده و مثالهائی از جورج کانتور[1] در باب کراندار نبودن بعضی از این عملگرها ارائه می‌دهیم. در ادامه عملگرهای هاردی — لیتلوود را روی فضاهای تعمیم یافتهٔ لبگ با توانهای شعاعی تقریباً هموار مورد مطالعه قرار داده و میانگین عملگرها روی فضای گسستهٔ $l^{\{p_n\}}$ را بررسی می‌نمائیم. سرانجام هم‌ارزی نرمها بر فضای $l^{\{p_n\}}$ و $L^{p(x)}$ را مورد بحث قرار می‌دهیم.

---

[1] G.Cantor

فهرست

مقدمه

عملگرهای ماکسیمال هاردی — لیتلوود اولین بار در سال ۱۹۳۰ معرفی شدند. این عملگرها روی فضای $L^{p(x)}$ تعریف می‌شوند. در چند سال اخیر ریاضی‌دانان بزرگی چون : کالدرون زیگموند [۲] ، سی. بینت [۳] ، آر.شارپلی [۴]، اِس . جی . سامکو [۵] ، دی. ای . اِدموند [۶]، اِ . نِکویندا [۷]، اِل . پیک [۸] ، اِچ . ناکانو [۹] ، اِچ . هاردی [۱۰]، اِل . داینینگ [۱۱] ، اِل . ای . پرسون [۱۲] و دیگران از ابزارهای خیلی مهمی در بررسی ویژگی های این عملگرها و فضاهای باناخ—تابع—فضا (BFS) ، استفاده کرده‌اند. هدف از نگارش این پایان‌نامه که در پنج فصل تنظیم شده است ، بررسی و تحقیق بر روی ویژگی های عملگرهای ماکسیمال از جمله کرانداری و بی‌کرانی عملگرها و میانگین عملگرها می‌باشد. در فصل اول ، تعاریف و قضایای بنیادی که اصول اولیهٔ آنالیز حقیقی هستند و در فصلهای آتی به وفور از آنها استفاده می‌شود را از مراجع [۱۰] و [۱۳] آورده‌ایم. فصل دوم برگرفته از مرجع [۳] می‌باشد. که در آن به کرانداری عملگرهای ماکسیمال و مثالهایی از کانتور پرداخته‌ایم . فصل سوم بر گرفته از مرجع [۴] است. در این فصل بعد از تعاریف و مثالها توابع شعاعی نزولی را تعریف کرده‌ایم و شرایطی روی این توابع و مشتقات آنها می‌گذاریم که عملگر ماکسیمال M، روی فضای $L^{p(x)}$ کراندار می‌شود. همچنین کلاس $\mathcal{E}$ را که در بخش سه از این فصل تعریف شده است به کلاسی بزرگتر مانند $\mathcal{D}$ توسیع می‌دهیم که لزوماً شامل توابع شعاعی نزولی نیستند ولی کرانداری عملگرهای ماکسیمال در آن حفظ می‌شود. فصل چهارم برگرفته از مرجع [۲] می باشد. در این فصل فضای لبگ گسسته و تحلیلی $l^{\{P_n\}}$ را همانند فضای $L^{p(x)}$ با نرم لوکسمبورگ در نظر می‌گیریم. با تعریف میانگین عملگر T_k روی فضای $l^{\{p_n\}}$ کرانداری و بی کرانی این عملگر را بررسی

---

[۲] Calderon Zygmond

[۳] C.Bennet

[۴] R.Sharpley

[۵] S.G.Samko

[۶] D.E.Edmund

[۷] A.Nekvinda

[۸] L.Pick

[۹] H.Nakano

[۱۰] H.Hardy

[۱۱] L.Diening

[۱۲] L.E.Persson

می‌کنیم و در بعد مثالهایی از کانتور آورده شده است. فصل پنجم برگرفته از مرجع [٦] است. در این فصل نرمهای روی فضای $l^{\{p_n\}}$ و $L^{p(x)}$ را تعریف می‌کنیم و سپس هم ارزی نرمها روی این فضاها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم ابتدایی

در این فصل تعاریف و قضایای مهمی را که در آنالیز حقیقی مطرح هستند و در فصلهای آتی از آنها استفاده می‌شود را از مراجع [۱۰] و [۱۳] عنوان می‌نماییم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

قضیه ۱.۱.۱ **همگرایی یکنوایی لبگ :** فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر X باشد، و نیز

(۱) به ازای هر $x \in X$، $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty$؛

(۲) به ازای هر $x \in X$، وقتی $n \longrightarrow \infty$، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. در این صورت f اندازه‌پذیر است. و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

لم ۲.۱.۱ **فاتو**[1] : هرگاه $f_n : X \longrightarrow [\circ, \infty]$ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n اندازه‌پذیر باشد آنگاه

$$\int_X (\liminf_{n\longrightarrow\infty} f_n) d\mu \le \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنیم f و g در $L^1(\mu)$ باشند، و α و β اعدادی مختلط باشند در این صورت $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ و

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

قضیه ۴.۱.۱ **همگرایی تسلطی لبگ** : فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر X باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$. هرگاه تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد که

$$|f_n(x)| \le g(x) \qquad (n = 1, 2, ...; x \in X).$$

آنگاه $f \in L^1(\mu)$،

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \circ$$

و

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

---

[1] Fatou

تعریف ۵.۱.۱ اگر μ اندازه‌ای بر σ−جبر $\mathcal{M}$ بوده و $E \in \mathcal{M}$ ، (عبارت p تقریباً همه جا بر E برقرار است) مختصراً p ت.ه. بر E برقرار است. یعنی $N \in \mathcal{M}$ ی هست به طوری که $\mu(N) = \circ$، $N \subset E$، و p در هر نقطه از $E - N$ برقرار است.

قضیه ۶.۱.۱ هرگاه $f \in L^{1}(\mu)$ ، آنگاه

$$|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط باشد که ت.ه. بر X تعریف شده‌اند به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ ، در این صورت سری $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به ازای تقریباً هر x همگراست ، $f \in L^{1}(\mu)$ ، و

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر σ−جبر $\mathcal{M}$ باشد. هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، $A_n \in \mathcal{M}$ ، و $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$، آنگاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

تعریف ۹.۱.۱ تابع حقیقی ϕ تعریف شده بر بازهٔ (a,b) ، را که در آن $-\infty \leq a < b \leq \infty$، محدب نامنداگر نامساوی

$$\phi((1-\lambda)x+y) \leq (1-\lambda)\phi(x)+\lambda\phi(y)$$

به ازای هر $a<x<b$، $a<y<b$، و $0 \leq \lambda \leq 1$ برقرار باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱ نامساوی ینسن : فرض کنیم μ یک اندازهٔ مثبت بر $\sigma-$جبر $\mathcal{M}$ در مجموعهٔ Ω باشد. به طوری که $\mu(\Omega)=1$. هرگاه f یک تابع حقیقی در $L^1(\mu)$ بوده و به ازای هر $x \in \Omega$ ، $a<f(x)<b$ و ϕ بر (a,b) محدب باشد، آنگاه

$$\phi(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega (\phi o f) d\mu.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

تعریف ۱۱.۱.۱ هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p+q=pq$ یا معادلاً $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ آنگاه p و q را یک جفت از نماهای مزدوج می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۱.۱ نامساوی هلدر: فرض کنیم p و q نماهای مزدوج باشند و $1<p<\infty$. همچنین X یک فضای اندازه‌پذیر با اندازه μ باشد. و نیز f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0,\infty]$ باشند.در این صورت

$$\int_X fg d\mu \leq (\int_X f^p d\mu)^{1/p}.(\int_X g^q d\mu)^{1/q}.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه شود. □

۱.۱.۱ عملگر ماکسیمال هاردی — لیتلوود

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم $f \in L^1(\mu)$. عملگر ماکسیمال هاردی — لیتلوود f را با Mf نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(Mf)(x) = \sup_{x\in\mathbb{Q}} \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{Q}} |f(t)|dt$$

موقعی که سوپریمم روی تمام مکعبهای $\mathbb{Q}$ که شامل x است گرفته می‌شود.

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنیم $r \in \mathbb{R}$، $1 < r \leq \infty$. بنابراین $M_r > 0$ ، وجود دارد که

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^r dx \leq M_r. \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r dx.$$

برهان. به [۱۳] مراجعه می‌شود. □

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض می‌کنیم $B \subset \mathbb{R}^n$ ، اندازه‌پذیر باشد. مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیر روی B را با $\mathcal{M}(B)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ مجموعهٔ تمام توابع p را که $p \in \mathcal{M}(B)$ ، $\operatorname{esssup}\{p(x); x \in B\} \geq 1$ و $p(x) \geq 1$، است را با $\beta(B)$ نمایش می‌دهیم .

تعریف ۱۷.۱.۱ زیرفضای X از فضای $\mathcal{M}(B)$ ، یک فضای BFS می‌نامیم هرگاه نرم $||.||$ بر X موجود باشد که دارای پنج شرط زیر باشد.

(۱) نرم $||f||_X$ برای هر $f \in X$، تعریف شده باشد و $f \in X$ اگر و تنها اگر $||f||_X < \infty$؛

(۲) برای هر $f \in \mathcal{M}(B)$، $||f||_X = || \, |f| \, ||_X$ ؛

(۳) اگر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی باشد و $f_n \longrightarrow f$ ت.ه بر B. آنگاه $||f_n||_X \longrightarrow ||f||_X$ ؛

(۴) اگر $|E| < \infty$ آنگاه $\chi_E \in X$. (در اینجا χ_E ، تابع مشخصهٔ E می‌باشد.)؛

(۵) برای هر $E \subset B$، که $|E| < \infty$. عدد ثابت C_E وجود داشته باشد که نامساوی $\int_E f(t)dt \leq C_E.||f||_X$ برای هر $f \in X(B)$ برقرار باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم $p(x) \in \mathcal{M}(B)$، $1 \leq p(x) < \infty$. نرم لوکسمبورگ[2] $f \in \mathcal{M}(B)$ ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$||f||_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0; \int_B |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)} dx \leq 1\}.$$

و فضای $L^{p(x)}(B)$ ، نیز به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$L^{p(x)}(B) = \{f \in \mathcal{M}(B); ||f||_{p(x)} < \infty\}.$$

لم ۱۹.۱.۱ فضای $X = L^{p(x)}(B)$، یک فضای BFS می‌باشد.

برهان. با توجه به تعریف (۱۸.۱.۱) گزاره‌های (۱) و (۲) واضح هستند. برای اثبات گزارهٔ (۳) فرض کنیم دنبالهٔ صعودی $\{f_n\}$ موجود باشد که، $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$ ت.ه بر B. ثابت می‌کنیم $\lim_{n\longrightarrow\infty} ||f_n||_X = ||f||_X$. فرض کنیم چنین نباشد. قرار می‌دهیم $a_n = ||f_n||_X, a = ||f||_X$. بنابراین عدد مثبت δ چنان وجود دارد که $a_n \leq a - 2\delta$. دراین صورت برای هر $\eta > 0$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f_n(x)}{\eta} = \frac{f(x)}{\eta} \qquad a.e[x]$$

حال بنابر قضیهٔ (۱.۱.۱) داریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_B \frac{f_n(x)}{\eta} dx = \int_B \frac{f(x)}{\eta} dx \qquad (1.1)$$

[2] Luxemburg

از طرفی داریم

$$\int_B |\frac{f_n(x)}{a-\delta}|^{p(x)}dx \leq \int_B |\frac{f_n(x)}{a_n+\delta}|^{p(x)}dx \leq \int_B |\frac{f_n(x)}{a_n}|^{p(x)}dx = \int_B |\frac{f_n(x)}{||f_n||_X}|^{p(x)}dx \leq ۱ \qquad (۱.۲)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱.۱) و (۱.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_B |\frac{f(x)}{a-\delta}|^{p(x)}dx \qquad (۱.۳)$$

از طرفی چون $a-\delta < a$ بنابراین

$$a-\delta < \inf\{\lambda > ۰; \int_B |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx\} \quad \Rightarrow \quad a-\delta \notin \{\lambda > ۰; \int_B |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq ۱\}$$
$$\Rightarrow \quad \int_B |\frac{f(x)}{\lambda-\delta}|^{p(x)}dx > ۱$$

در نتیجه $\int_B |\frac{f(x)}{\lambda-\delta}|^{p(x)}dx > ۱$، و این نیز با (۱.۳) در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و داریم $\lim_{n\longrightarrow\infty} ||f_n||_X = ||f||_X$. برای اثبات گزارهٔ (۴) فرض کنیم $E \subset B$ دلخواه و $|E| < \infty$ باشد چون

$$\int_B |\chi_E|^{p(x)}dx = \int_B |\chi_E|dx = \int_E dx = |E| < \infty$$

بنابراین با توجه به لم (۲۰.۱.۱) خواهیم داشت $\chi_E \in L^{p(x)}(B)$ حال بنابر تعریف (۱۸.۱.۱) داریم $||\chi_E||_X < \infty$. برای اثبات گزارهٔ (۵) فرض کنیم $E \subset B$ و $f \in L^{p(x)}(B)$ دلخواه و $|E| < \infty$ باشند. بنابراین $||f||_X < \infty$. قرار می‌دهیم

$$||f|||_X = \inf\{\lambda > ۰; \int_B |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq ۱\} =: \inf A$$

بنابراین دنبالهٔ یکنوای $\{\lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ از عناصر A وجود دارد که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = ||f||_X$$

چون $||f||_X < \infty$ بنابراین برای هر $x \in B$ و هر $n \in \mathbb{N}$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{\lambda_n} = \frac{f(x)}{||f||_X} \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{f(x)}{\lambda_n}|^{p(x)} = |\frac{f(x)}{||f||_X}|^{p(x)}$$

حال بنابر قضیهٔ (۱.۱.۱) خواهیم داشت

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_B|\frac{f(x)}{\lambda_n}|^{p(x)}dx=\int_B|\frac{f(x)}{||f||_X}|^{p(x)}dx \qquad (۱.۴)$$

از طرفی چون $\lambda_n\in A$ لذا $\int_B|\frac{f(x)}{\lambda_n}|^{p(x)}dx\leq ۱$ حال با توجه به رابطهٔ (۱.۴) خواهیم داشت

$$\int_B|\frac{f(x)}{||f||_X}|^{p(x)}dx\leq ۱ \qquad (۱.۵)$$

با توجه به رابطهٔ $E\subset B$ و (۱.۵) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{\{x\in E;|f(x)|>||f||_X\}}|\frac{f(x)}{||f||_X}|^{p(x)}dx\leq\int_B|\frac{f(x)}{||f||_X}|^{p(x)}\leq ۱$$

حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_E\frac{|f(x)|}{||f||_X}dx &= \int_{\{x\in E;|f(x)|\leq||f||_X\}}\frac{|f(x)|}{||f||_X}dx+\int_{\{x\in E;|f(x)|>||f||_X\}}\frac{|f(x)|}{||f||_X}dx\\ &\leq \int_E dx+\int_{\{x\in E;|f(x)|>||f||_X\}}|\frac{|f(x)|}{||f||_X}|^{p(x)}dx\\ &\leq |E|+۱\end{aligned}$$

و این نیز نتیجه می‌دهد که

$$\int_E|f(x)|dx\leq(|E|+۱).||f||_X$$

بنابراین گزارهٔ (۵) برقرار است. لذا فضای $L^{p(x)}(B)$ یک فضای BFS است. □

لم ۱.۱.۲۰ فرض کنیم $p\in\beta(\mathbb{R}^n)$. بنابراین

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n);\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx<\infty\}.$$

برهان. فرض کنیم $||f||_{p(x)}<\infty$ و $p^*=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}p(x)$. بنابراین $\lambda>۰$ ی وجود دارد که

$\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq ۱$ و به دنبال آن داریم

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^{p(x)}}{\Big(\max(۱,\lambda)\Big)^{p^*}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^{p(x)}}{\Big(\max(۱,\lambda)\Big)^{p(x)}}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq ۱ \qquad (۱.۶)$$

در نتیجه

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq \max(۱,\lambda)^{p^*} < \infty$$

و این نیز نتیجه می‌دهد که $f \in \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx < \infty\}$ بنابراین

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^n) \subseteq \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx < \infty\}.$$

برای اثبات قسمت عکس قضیه فرض می‌کنیم $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. بنابراین $\lambda > ۰$ ی وجود دارد که $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq \lambda < \infty$ بدون خلل به کلیت فرض می‌کنیم که $\lambda \geq ۱$ باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda}dx \leq \frac{۱}{\lambda}.\lambda = ۱ \Rightarrow ||f||_{p(x)} < \infty \Rightarrow f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^n).$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx < \infty\} \subseteq L^{p(x)}(\mathbb{R}^n). \qquad (۱.۷)$$

حال از روابط (۱.۱) و (۱.۲) حکم به دست می‌آید.

□

لم ۲۱.۱.۱ فرض کنید $p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ و $X = L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. بنابراین گزاره‌های زیر هم ارز هستند.

(۱) عدد ثابت $c > ۰$ وجود دارد که برای هر $f \in X$، $||Mf||_X \leq c.||f||_X$ برقرار است،

(۲) اگر $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq ۱$ آنگاه $\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)|^{p(x)}dx < \infty$.

برهان. فرض کنیم (۱) برقرار باشد، و $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq ۱$. با توجه به لم (۸.۱.۱)، خواهیم داشت

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq ۱ < \infty \Longrightarrow f \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$$
$$f \in X \Longrightarrow ||f||_X < \infty \Longrightarrow ||Mf||_X < \infty \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)|^{p(x)}dx < \infty.$$

که رابطهٔ (۲) را ثابت می‌کند. حال فرض کنیم (۲)، برقرار باشد و (۱) برقرار نباشد بنابراین برای هر $c > 0$، تابع $f \in X$ ، موجود است که $||Mf||_X > c||f||_X$. حال با قرار دادن $c_n = n^3$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که $||f_n||_X \leq 1$ و $||Mf_n||_X > n^3$. قرار می‌دهیم $f = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^2}$. بنابراین خواهیم داشت

$$||f||_X = ||\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^2}||_X = \frac{6}{\pi^2}||\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^2}|| \leq \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}||\frac{f_n}{n^2}|| = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}||f_n||_X \leq \frac{6}{\pi^2}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1$$

بنابراین $||f||_X \leq 1$، و این نیز نتیجه می‌دهد که $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx \leq 1$. حال طبق فرض خواهیم داشت

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Mf(x)|^{p(x)}dx < \infty \qquad (*)$$

از طرف دیگر

$$||Mf||_X = \frac{6}{\pi^2}||\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n^2}||_X \geq \frac{6}{\pi^2}.||\frac{Mf_n}{n^2}||_X = \frac{6}{\pi^2}\frac{||Mf_n||_X}{n^2} \geq \frac{6}{\pi^2}.\frac{n^3}{n^2} = \frac{6n}{\pi^2}.$$

بنابراین با حدگیری از طرفین وقتی که $n \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت $||Mf||_X = \infty$. در نتیجه $\int_{\mathbb{R}^n}|Mf|^{p(x)}dx = \infty$ که این با(*) در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم برقرار است. $\square$

۲.۱.۱ تعمیم فضای لبگ

نمادها : مجموعهٔ همهٔ توابع اندازه‌پذیر $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ را با $\mathcal{P}(\Omega)$ نمایش می‌دهیم . برای $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ قرار می‌دهیم

$$\Omega_1^p = \Omega_1 = \{x \in \Omega; p(x) = 1\},\ \Omega_\infty^p = \Omega_\infty = \{x \in \Omega; p(x) = \infty\},\ \ \Omega_0^p = \Omega_0 = \Omega\backslash(\Omega_1 \bigcup \Omega_\infty).$$

اگر $|\Omega_0| > 0$ قرار می‌دهیم

$$p^* = \mathrm{esssup}_{x\in\Omega_0}\ p(x), \qquad p_* = \mathrm{essinf}_{x\in\Omega_0}\ p(x).$$

و اگر $|\Omega_0| = 0$ قرار می‌دهیم $p_* = p^* = 1$. دو عدد ثابت r_p, c_p ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$c_p = ||\chi_{\Omega_1}||_\infty + ||\chi_{\Omega_0}||_\infty + ||\chi_{\Omega_\infty}||_\infty, \qquad r_p = c_p + 1/p_* - 1/p^*. \qquad (1.8)$$

و قرارداد می‌کنیم که $1/\infty = 0$.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. مجموعهٔ همهٔ توابع روی Ω با نرم $||.||_p$ ، را با نماد ϱ_p نمایش داده که

$$\varrho_p(f) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}dx + \mathrm{esssup}_{\Omega_\infty}|f(x)|, \quad (1.9)$$

$$||f||_p = \inf\{\lambda > 0; \varrho_p(f/\lambda) \leq 1\}. \quad (1.10)$$

گزاره های زیر در مورد تابع ϱ_p به‌آسانی قابل اثبات است

(۱) برای هر تابع f، $\varrho_p(f) \geq 0$ ؛

(۲) $\varrho_p(f) = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$؛

(۳) برای هر تابع f ، $\varrho_p(-f) = \varrho_p(f)$؛

(۴) ϱ_p تابعی محدب است؛

(۵) اگر $|g(x)| \geq |f(x)|$ ، ت.ه. بر Ω و اگر $\varrho_p < \infty$.در این صورت $\varrho_p(g) \geq \varrho_p(f)$؛ درصورتی که $|g| \neq |f|$ ، نامساوی اکید است ؛

(٦) اگر $\infty > \varrho_p(f) > 0$ ، آنگاه تابع $\varrho_p(\frac{f}{\lambda}) \longrightarrow \lambda$ پیوسته است و روی بازهٔ $[1,\infty)$ نزولی است.

لم ۲۳.۱.۱ برای هر تابع f که $\infty > ||f||_p > 0$ داریم $\varrho_p(\frac{f}{||f||_p}) \leq 1$.

برهان. فرض می‌کنیم λ_n دنباله‌ای نزولی باشد که $||f||_p \longrightarrow \lambda_n$ وقتی $\infty \longrightarrow n$. چون تابع ϱ_p پیوسته‌است لذا $\varrho_p(||f||_p) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \varrho_p(\lambda_n)$. بنابراین

$$\varrho_p(\frac{f}{||f||_p}) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \varrho_p(\frac{f}{\lambda_n}) \leq 1.$$

□

لم ۲۴.۱.۱ اگر $\infty > p^*$ و برای هر f که $\infty > ||f||_p > 0$ ، آنگاه $\varrho_p(\frac{f}{||f||_p}) = 1$.