به نام عالم به همه‌ی علوم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی فیزیک

فضای فاز کاهش یافته‌ی ریسمان بوزونی جرمدار در حضور میدان B

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

اعظم بخشی

استاد راهنما:

دکتر احمد شیرزاد

فروردین ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک

تحت عنوان:

فضای فاز کاهش یافته‌ی ریسمان بوزونی جرمدار در حضور میدان B

توسط

اعظم بخشی

در تاریخ ۱۳۹۰/۱/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱—استاد راهنمای پایان نامه	دکتر احمد شیرزاد
۲—استاد مشاور پایان نامه	دکتر منصور حقیقت
۳—استاد مدعو	دکتر مهدی دهقانی
۴—استاد ممتحن داخلی	دکتر مسلم زارعی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر فرهاد شهبازی

تشکر و قدر دانی

از:

پروردگارم که اگر خواست او نبود بی‌شک در به پایان رساندن این امر موفق نمی‌شدم،

خانواده‌ی عزیزم به خصوص **پدر و مادر** گرامیم به خاطر همه‌ی محبت‌ها و فداکاری‌هایی که در حقم داشتند،

استاد راهنمای بزرگوارم **جناب آقای دکتر شیرزاد** به خاطر زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمندشان در طول انجام این تحقیق، همچنین تمام درس‌های اخلاق و زندگی که از رفتار شایسته‌ی ایشان آموختم،

استاد مشاور ارجمندم **آقای دکتر حقیقت** به خاطر مطالعه‌ی پایان‌نامه و رهنمودهای ارزنده‌شان،

همچنین از **آقای دکتر مسلم زارعی و آقای دکتر مهدی دهقانی** که به عنوان اساتید داور زحمت بازخوانی پایان نامه‌ی مرا به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

در پایان لازم می‌دانم از **آقای دکتر مهدی دهقانی** به خاطر پیشنهاد موضوع اولیه‌ی تحقیق و همین طور مطرح کردن بحث‌های سازنده در جهت پیشرفت کار نهایت قدردانی را به عمل آورم،

همچنین از سرکار خانم چنارانی که در کنترل پاره‌ای از محاسبات بنده را همراهی کردند و همه‌ی دوستانی که در این راه مشوقم بودند **سپاس‌گزارم.**

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و

همه‌ی آنان که دوستشان دارم

فهرست مندرجات

چکیده

ما در این پایان نامه فضای فاز کاهش یافته‌ی ریسمان بوزونی جرمداری که در فضای تخت قرار گرفته است و با یک میدان ثابت B برهمکنش دارد را به دست خواهیم آورد. در ابتدا با استفاده از روش گسسته‌سازی، معادلات حاکم بر نقاط مرزی یا همان شرایط مرزی را می‌یابیم. از آنجایی که شرایط مرزی، معادلات حرکت مستقل از شتاب هستند می‌توان آن‌ها را قید اولیه دیراک در نظر گرفت. در ادامه مطابق با هر دستگاه قیدی به بررسی سازگاری قیود اولیه می‌پردازیم. در نتیجه‌ی سازگاری قیود، ضرایب لاگرانژ در هامیلتونی کل برابر با صفر می‌شوند. اما برخلاف دستگاه‌های قیدی معمولی، تعدادی قید جدید نیز حاصل می‌شود. سازگاری این قیود جدید، قیدهای جدیدتری ایجاد می‌کند و این روند به طور نامحدود ادامه پیدا خواهد کرد. به این ترتیب ما دو زنجیره‌ی نامتناهی از قیود که همگی نوع دوم هستند در نقاط انتهایی ریسمان به دست می‌آوریم. چون وارون کردن یک ماتریس بینهایت بعدی از کروشه پواسون‌های قیود برای یافتن کروشه‌ی دیراک کار ناممکنی است. بنابراین مسئله را با روش دیگری دنبال می‌کنیم. بسط فوریه‌ی میدان‌های اولیه را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که به آسانی می‌توان قیود را بر روی آن‌ها اعمال کرد و با این کار تعداد زیادی از مدها را دور ریخت و تعداد کمتری از مدها را به صورت جفت‌های کانونی شمارش‌پذیر به دست آورد. پس از آن می‌توانیم با استفاده از مدهای باقی‌مانده و بدون نیاز به دانستن بستگی آن‌ها به زمان، بسط میدان‌های اولیه را محاسبه کنیم. لازم به تذکر است که در اکثر مواقع مردم با حل معادلات حرکت و استفاده از رابطه‌های جابجایی معین بین ضرایب مدها به بررسی مسئله می‌پردازند. در ادامه برای کوانتش مسئله از روش هم‌تافته که توسط فدیف و جکیو ارائه شده است استفاده می‌کنیم. با معرفی دو—فرم هم‌تافته نشان می‌دهیم که جملات ترکیب شده از مدهای صفرم با مدهای نوسانی پس از ساده‌سازی ناپدید می‌شوند. همچنین نشان می‌دهیم که ماتریس هم‌تافته‌ای که با روش متعارف فدیف و جکیو به دست می‌آید بستگی صریح به زمان ندارد. با معکوس کردن ماتریس هم‌تافته قادر هستیم که کروشه‌های مناسب در فضای فاز کاهش یافته را که همان کروشه‌ی دیراک هستند بیابیم. فرایند کوانتش را با تبدیل کروشه‌های دیراک (با تقسیم بر $i\hbar$) به رابطه‌های جابجایی انجام می‌دهیم. نتایج نهایی نشان می‌دهند که میدان‌های مختصات و تکانه جفت‌های کانونیک یکدیگر نیستند. در پایان نشان می‌دهیم که در حد $m \to 0$ همه‌ی نتایج به شکل نتایج آشنای ریسمان بوزونی (بدون جرم) تبدیل می‌شوند.

کلمات کلیدی: شرایط مرزی مخلوط، قیود نوع دوم دیراک، فضای فاز کاهش یافته، ماتریس هم‌تافته، کروشه‌های دیراک

فصل ۱

مقدمه

اکثر مسائل جذاب و قابل توجه دستگاه‌های مقید[۱]، در چارچوب نظریه میدان‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. یکی از این مسائل، ریسمان بوزونی باز در حضور میدان B به عنوان پس‌زمینه است. تا کنون فیزیکدانان زیادی به بررسی ساختار این مسئله و مخصوصاً کوانتش فضای فاز آن پرداخته‌اند. از جمله‌ی آن‌ها ویتن[۲] و سیبرگ[۳] بودند که طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۹۹ میلادی به چاپ رسید نشان دادند چنانچه یک میدان B در پس‌زمینه‌ی ریسمان قرار گیرد کوانتش از طریق مرسوم (کوانتش کانونی) نتایج درستی را در بر نخواهد داشت [۱]. بنابراین با یافتن کروشه‌ی مناسب بین مختصات فضای فاز (کروشه دیراک) روابط ناجابجایی را برای میدان‌های مختصات X در دو انتهای ریسمان به دست آوردند در حالی که در نقاط میانی روابط جابجایی برقرار بود و نیز سایر کروشه‌ها از همان کروشه پواسون‌های اساسی پیروی می‌کرد.

---

[۱] مبحث دستگاه‌های مقید در پیوست آورده شده است.

[۲] E. Witten

[۳] N. Seiberg

در همان سال در مرجع [۳] با یافتن پاسخ معادلات حرکت ریسمان بوزونی از طریق حل مستقیم، به کوانتش مسئله از روش ماتریس هم‌تافته [۴] پرداخته شد. هو و چو با این ادعا که لازم است برای کنار گذاشتن مختصه‌ی زمانی یک متوسط گیری زمانی انجام بگیرد در آخرین مرحله از محاسبات خود به نتایجی کاملاً مشابه با ویتن دست یافتند. روش ماتریس هم‌تافته برای کوانتش دستگاه‌های غیر قیدی و قیدی که توسط فدیف و جکیو در سال ۱۹۸۸ میلادی ارائه شد[۲]، روشی کاملاً هم ارز با روش کوانتش دیراک محسوب می‌شود [۱۴].

در سال ۲۰۰۰ میلادی باز هم این مسئله این بار در چارچوب دستگاه‌های مقید مورد بررسی قرار گرفت و نتایج قابل قبولی به دست آمد [۴]. پس از آن در سال ۲۰۰۱ میلادی برای اولین بار در مرجع [۵] بدون حل مستقیم معادلات حرکت و با در نظر گرفتن شرایط مرزی به عنوان قیدهای دیراک به بررسی این مسئله پرداختند. در هر دو مقاله‌ی اخیر فرایند کوانتش از طریق تبدیل کروشه‌ی دیراک به جابجاگر کوانتمی صورت گرفته است. همان طور که در پیوست گفته شده برای یافتن کروشه‌ی دیراک لازم است تا وارون ماتریس کروشه پواسون قیدها محاسبه شود. علی‌رغم تلاش این افراد برای وارون کردن این ماتریس (که یک ماتریس با ابعاد بینهایت است) آن‌ها تنها توانسته‌اند کروشه‌های دیراک را به صورت روابط حدسی به دست آورند.

در مرجع [٦] نیز در سال ۲۰۰۲ میلادی با در نظر گرفتن نسخه‌ی گسسته‌ی کنش ریسمان بوزونی و همچنین با استفاده از روش فدیف—جکیو برای کوانتیزه کردن مسئله به نتایجی مانند دیگران دست یافتند. غیر از کسانی که گفته شد افراد دیگری نیز به مسئله‌ی ریسمان ریسمان بوزونی در حضور میدان B توجه داشته‌اند اما در نهایت سرراست‌ترین روش برای کوانتش ریسمان بدون جرم در سال ۲۰۰٦ میلادی در مرجع [۷] ارائه گردید. در این مقاله مانند مرجع [۵] فضای فاز کاهش یافته با در نظر گرفتن بسط فوریه به عنوان یک مختصات بهنجار که قادر است فیزیک خالص نظریه را به خوبی توصیف کند و اعمال شرایط مرزی به عنوان قیود دیراک بر روی این بسط‌ها به دست می‌آید. در فضای کاهش یافته کروشه‌ی بین میدان‌های مختصات و میدان‌های تکانه‌ی همیوغ با مختصات در واقع کروشه‌ی دیراک

[۴] هم‌تافته اصطلاح فارسی واژه‌ی سیمپلکتیک است.

هستند که با تبدیل به جابجاگرهای کوانتمی، مسئله کوانتیزه می‌شود.

در سال ۲۰۰۲ میلادی در مرجع [۱۳] با اضافه کردن جمله‌ی جرمی به کنش کلاسیک ریسمان بوزونی به کوانتش ریسمان جرمدار با همان روشی که در مرجع [۳] از آن استفاده شده بود، پرداختند و نشان دادند که در صورت وجود جمله‌ی جرمی علاوه بر ناجابجا شدن میدان‌های مختصات در مرزها، برای میدان‌های تکانه‌ی همیوغ با مختصات نیز در نقاط ابتدایی و انتهایی ریسمان روابط ناجابجایی به دست می‌آید.

ما در این تحقیق تصمیم داریم که فضای فاز کاهش یافته‌ی فیزیکی ریسمان جرمدار در حضور میدان B را بدون حل معادلات حرکت آن به دست آوریم. این کار را با در نظر گرفتن شرایط مرزی به عنوان قیود دیراک انجام خواهیم داد. قسمت‌هایی از کار ما مشابه روشی است که در مرجع [۷] مورد استفاده قرار گرفته است. بنابراین در فصل دوم روند کار برای محاسبه‌ی فضای فاز کاهش یافته‌ی ریسمان بدون جرم را به اختصار توضیح می‌دهیم و کروشه‌ی بین میدان‌ها را در این حالت نمایش خواهیم داد.

در فصل سوم پس از معرفی کنش ریسمان جرمدار، عملیات ساده‌سازی را مشابه با فصل دوم انجام می‌دهیم. برخلاف فصل دوم که در آن مسئله در دو حالت پیوسته و گسسته مورد بررسی قرار گرفته است ما در این فصل تنها از روش گسسته‌سازی استفاده می‌کنیم. همچنین برای یافتن حل مد صفرم مسئله روش متفاوتی نسبت به فصل قبل ارائه خواهیم داد.

فصل چهارم را به کوانتش مسئله از طریق ماتریس هم‌تافته اختصاص می‌دهیم. در ابتدای این فصل روش ماتریس هم‌تافته را توضیح می‌دهیم و در ادامه با استفاده از این روش کروشه‌ی بین میدان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

آخرین قسمت این تحقیق که در قالب پیوست آورده شده است، توضیح مختصری درباره‌ی تاریخچه‌ی نظریه‌ی دستگاه‌های مقید و کوانتش این نظریه را در بر می‌گیرد. تعاریف بنیادی مانند لاگرانژی تکین، قیود اولیه و ثانویه و همچنین قیود نوع اول و دوم دیراک سایر مطالبی هستند که در پیوست به آن‌ها می‌پردازیم.

فصل ۲

ریسمان بوزونی باز و بدون جرم در حضور میدان B

۲—۱ مقدمه

علاقه به مطالعه‌ی مسائلی که در آن‌ها با یک ساختار ناجابجایی برای فضا—زمان مواجه می‌شویم مربوط به زمان‌های گذشته است. اما توجه ویژه به بررسی این مسائل پس از چاپ مقاله‌ی نپی و همکارانش [۸] در سال ۱۹۸۷ میلادی در مبحث نظریه ریسمان، به طور چشمگیری افزایش یافت. تا قبل از چاپ این مقاله اکثر مسائل شرایط مرزی که در نظریه میدان مورد بررسی قرار می‌گرفت از نوع شرایط مرزی نویمان و یا دیریکله بود و اعمال این شرایط بر معادلات حرکت دستگاه، منجر به نتایج قابل قبولی می‌شد. بر اساس نتایج کار نپی، ویتن و همکارانش نشان دادند که چنانچه در نظریه میدان ریسمان‌ها یک میدان B به عنوان پس زمینه حضور داشته باشد دیگر روش کوانتش کانونی در نقاط مرزی نتایج درستی

نخواهد داشت [۱]. مدتی پس از آن فیزیکدانان با مسائلی روبه‌رو شدند که درآن‌ها شرایط مرزی به شکل مخلوط ظاهر می‌شد یعنی به صورت ترکیبی از شرایط نویمان و دیریکله. این گونه مسائل آنان را برآن داشت تا شرایط مرزی را به عنوان قیدهای دیراک در نظر بگیرند و با اعمال آن‌ها بر حل‌های معادلات حرکت به دینامیک درستی برای دستگاه فیزیکی دست یابند[۴، ۵، ۹]. آنچه در این فصل مورد بررسی قرار گرفته محاسبه‌ی ناجابجایی مختصات فضای فاز یک ریسمان باز در حضور میدان پس‌زمینه‌ی B است. هدف اصلی در انجام این فرایند یافتن فضای کاهش یافته‌ی فیزیکی دستگاه، بدون حل معادلات حرکت و با در نظر گرفتن شرایط مرزی به عنوان قیود دیراک است [۷].

۲—۲ معرفی و ساده‌سازی کنش کلاسیک ریسمان بوزونی

کنش ریسمان باز و بدون جرم در حضور میدان B اولین مسئله‌ای بود که در آن شرایط مرزی به عنوان قیود دیراک در نظر گرفته شد. در این فصل سعی شده مسئله را تا حد ممکن به شکل مختصر بیان نماییم و از آوردن مطالب جانبی که اثری در بحث اصلی ندارد اجتناب کنیم. به همین دلیل تنها قسمت بوزونی کنش ریسمان مورد بررسی قرار گرفته است.

کنش یک ریسمان بوزونی باز و بدون جرم که دو D_p—غشای $p+۱$ بعدی را به هم متصل می‌کند و خود با یک میدان پادمتقارن $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ جفت شده است در حضور میدان B به عنوان پس زمینه به صورت زیر پیشنهاد شده است [۳، ۷]:

$$S_B = \frac{۱}{۴\pi\alpha'}\int_\Sigma d\sigma d\tau [g^{\alpha\beta}G_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \varepsilon^{\alpha\beta}B_{\mu\nu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu] \qquad (۲—۱)$$
$$+\frac{۱}{۲\pi\alpha'}\oint_{\partial\Sigma} d\tau A_i(X)\partial_\tau X^i.$$

در عبارت فوق اندیس تکرار به معنای جمع روی آن اندیس است. این مطلب برای کلیه‌ی روابط آورده شده در این تحقیق صادق است.

فرض می‌کنیم ریسمان در نقاط انتهایی $\sigma = ۰, l$ به دو غشا وصل شده است که l طول ریسمان بوزونی می‌باشد. به عبارت دیگر نقاط انتهایی ریسمان مقید به حرکت بر روی این غشاها هستند. در این کنش

پارامترهایی ظاهر شده است که آن‌ها را به اختصار توضیح می‌دهیم:

α' ثابت جفت شدگی نظریه است که ما برای سهولت آن را برابر با مقدار ثابت $\alpha' = \frac{۱}{۲\pi}$ در نظر می‌گیریم. Σ یک فضای D–بعدی (فضای هدف) با مرز $\partial\Sigma$ است که ریسمان در آن حرکت می‌کند. $g^{\alpha\beta}$ متریک جهان رویه است. جهان رویه فضایی است که ریسمان با حرکتش در فضای هدف آن را جاروب می‌کند. چون ریسمان ما تک بعدی است جهان رویه‌ای که توسط آن بوجود می‌آید دو بعدی خواهد بود. متناظر با متریک فوق، $\varepsilon^{\alpha\beta}$ تعریف می‌شود که یک تانسور کاملاً پادمتقارن است به نحوی که $\varepsilon^{۱۲} = ۱$ می‌باشد. $G_{\mu\nu}$ متریک فضای هدف است که برای ساده کردن مسئله آن را تخت در نظر می‌گیریم $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. σ و τ به ترتیب مختصه‌های فضایی و زمانی جهان رویه هستند. X^μها مؤلفه‌ی میدان‌های ریسمان هستند. A_iها میدان‌های پیمانه‌ای با تقارن $U(۱)$ هستند که در مرزها با ریسمان جفت شده‌اند. و در نهایت $B_{\mu\nu}$ یک ماتریس پادمتقارن است که آن را بدون دینامیک فرض می‌کنیم.

با ترکیب میدان B که به عنوان پس زمینه ظاهر می‌شود و A که در مرزها با ریسمان جفت شده، میدان اصلاح شده‌ی جدیدی به نام شدت میدان بورن– اینفلد[۱] ساخته می‌شود:

$$\mathcal{F} = B - dA = B - F \qquad (۲-۲)$$

اگر نقاط انتهایی ریسمان در تماس با D_p غشاهای مشابه باشند و همچنین فرض کنیم $B = \sum_{i,j=۰}^{p} B_{ij} dX^i dX^j$ در این صورت انتگرال سطحی در رابطه‌ی (۲ – ۱) را به شکل زیر می‌توان تبدیل کرد:

$$-\frac{۱}{۴\pi\alpha'} \int_\Sigma d\sigma d\tau \varepsilon^{\alpha\beta} F_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j . \qquad (۳-۲)$$

با جایگذاری عبارت فوق در (۲ – ۱) انتگرال سطحی جذب می‌شود و شکل کنش به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$S_B = \frac{۱}{۴\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \left[g^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + \varepsilon^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j \right] . \qquad (۴-۲)$$

[۱] Born-Infeld

ما در این تحقیق قصد داریم تنها جملاتی که منشا میدان B دارند را مورد بررسی قرار دهیم زیرا در واقع حضور میدان B باعث بوجود آمدن شرایط مرزی مخلوط می‌شود. از این رو مسئله را تا حد امکان ساده می‌کنیم. به همین منظور تعداد میدان‌های X^μ را به همان تعدادی که با میدان B جفت می‌شوند محدود می‌کنیم. به این ترتیب فضای هدف، یک فضای زوج بعدی است که در ساده‌ترین حالت، یک فضای اقلیدسی دو بعدی با دو میدان $X_i(\sigma,\tau)$ به ازای $i = ۱,۲$ خواهد بود. در نتیجه $\eta_{\mu\nu}$ را برابر با دلتای کرونکر می‌گیریم و $\mathcal{F}_{ij}$ را به عنوان میدان‌های دو مؤلفه‌ای با B_{ij} نمایش می‌دهیم که بنا به تعریف یک ماتریس پادمتقارن به شکل زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} \circ & \tilde{B} \\ -\tilde{B} & \circ \end{pmatrix}. \qquad (۵-۲)$$

پس از اعمال همه‌ی ساده‌سازی‌ها، رابطه‌ی کنش به صورت،

$$S_B = \frac{۱}{۲}\int d\sigma d\tau \left[\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i g^{\alpha\beta} + B_{ij}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j \epsilon^{\alpha\beta}\right], \qquad (۶-۲)$$

به دست می آید.

با جدا کردن مشتق‌های فضایی و زمانی و همچنین در نظر گرفتن متریک مناسب برای جهان رویه (متریک تخت مینکوفسکی) رابطه‌ی کنش به شکل زیر در می آید:

$$S_B = \frac{۱}{۲}\int d\sigma d\tau \left[\dot{X}^i \dot{X}_i - X'^i X'_i + ۲B_{ij}\dot{X}^i X'^j\right] \qquad (۷-۲)$$

که در آن نقطه نشان دهنده‌ی مشتق‌گیری زمانی و پریم بیانگر مشتق‌گیری مکانی است. همچنین به طور بدیهی دیده می‌شود که رابطه‌ی (۲ − ۷) دارای تقارن سراسری تحت تبدیل:

$$X^i(\sigma,\tau) \to X^i(\sigma,\tau) + c^i, \qquad (۸-۲)$$

است. در پایان فصل از این خاصیت برای یافتن پاسخی کامل برای معادلات حرکت استفاده خواهد شد.

۲—۳ یافتن معادلات حرکت و شرایط مرزی

همان طور که از قبل می‌دانیم انتگرالده در انتگرال زمانی کنش، لاگرانژی محسوب می‌شود بنابراین با توجه به کنش (۲ − ۷) لاگرانژی به شکل زیر خواهد بود:

$$L = \frac{1}{2} \int d\sigma \left[\dot{X}^i \dot{X}_i - X'^i X'_i + 2 B_{ij} \dot{X}^i X'^j \right]. \qquad (۲—۹)$$

از طرفی با استفاده از معادله‌ی اویلر—لاگرانژ می‌توانیم معادلات حرکت

$$[\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2] X^i(\sigma,\tau) = 0 \qquad i = 0, 1, \cdots, D \qquad (۲—۱۰)$$

و شرایط مرزی

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma X^i(\sigma,\tau) + B_{ij} \partial_\tau X^j(\sigma,\tau) = 0 && i,j = 0, 1, \cdots, p, \\ &X^a = 0 && a = p+1, \cdots, D, \end{aligned} \qquad (۲—۱۱)$$

را به دست آوریم. معادلات (۲ − ۱۰) مربوط به انتشار میدان‌ها در فضای بین دو غشا است در صورتی که روابط (۲ − ۱۱) معادلات حرکت در مرزها را نشان می‌دهد. آخرین رابطه در واقع همان معادلات حرکت توصیف کننده‌ی غشاهایی هستند که در ابتدای فصل درباره‌ی آنها صحبت کردیم و بر اساس آن می‌توان گفت: در جهت عمود بر D_p—غشاها با شرط مرزی دیریکله روبه‌رو خواهیم شد در حالی که در راستای D_p—غشاها شرط مرزی مخلوط (ترکیبی از نویمان و دیریکله) داریم.

حال اگر بعد D—غشا را برابر با بعد فضا در نظر بگیریم یعنی فرض کنیم $p = D$ باشد در این صورت شرط مرزی دیریکله کنار گذاشته می‌شود و ما قادر خواهیم بود با تمرکز بیشتری به بررسی شرط مرزی مخلوط بپردازیم. از این پس مرزها را نقاطی خواهیم گرفت که اثر میدان B در آن‌ها ظاهر شود. با اندکی دقت در رابطه‌ی شرط مرزی مخلوط می‌توان دریافت که در این رابطه، مشتق‌گیری نسبت به زمان تنها از مرتبه‌ی اول وجود دارد بنابراین به زبان لاگرانژی و در فضای پیکربندی این شرط یک معادله‌ی مستقل از شتاب محسوب می‌شود. این ویژگی باعث می‌شود تا ادعا کنیم که شرط مرزی مخلوط را می‌توان به عنوان قید دیراک در نظر گرفت. در ادامه با رفتن به فضای فاز و یافتن میدان‌های تکانه به کمک تبدیلات لژاندر این ادعا را ثابت خواهیم کرد.

میدان‌های تکانه‌ی همیوغ با میدان‌های مختصات به سهولت با استفاده از تبدیل لژاندر $P := \frac{\delta L[X,\dot{X}]}{\delta \dot{X}}$ و با توجه به لاگرانژی (۲ − ۹) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$P_i(\sigma,\tau) = \partial_\tau X_i(\sigma,\tau) + B_{ij}\partial_\sigma X_j(\sigma,\tau) \tag{۲−۱۲}$$

اندیس میدان‌ها فقط نقش یک شمارنده را ایفا می‌کند، به همین دلیل در رابطه‌ی بالا همه‌ی اندیس‌ها را در پایین نوشته‌ایم و در ادامه نیز از این روش پیروی خواهیم کرد. حال می‌توان از تبدیل دیگر لژاندر $L[X,\dot{X}] \to H[X,P]$ استفاده کرد و از فضای پیکربندی که فضای مربوط به لاگرانژی است به فضای فاز (فضایی که هامیلتونی در آن توصیف می‌شود) رفت و هامیلتونی را محاسبه کرد:

$$H = \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{l} \left[(P_i - B_{ij}\partial_\sigma X_j)^{۲} + (\partial_\sigma X_i)^{۲}\right] d\sigma. \tag{۲−۱۳}$$

قیود اولیه دیراک به طور مستقیم از تعریف تکانه حاصل می‌شوند؛ اما باید توجه کرد که این معادلات باید بر حسب تکانه‌ها نوشته شوند. بر همین اساس چنانچه از رابطه‌ی (۲ − ۱۱) عبارت $\partial_\tau X^i(\sigma,\tau)$ را به دست آورده و در رابطه‌ی (۲ − ۱۲) جایگذاری کنیم قید اولیه‌ی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi_i(\sigma,\tau) = M_{ij}\partial_\sigma X_j(\sigma,\tau) + B_{ij}P_j(\sigma,\tau), \tag{۲−۱۴}$$

که در آن

$$M_{ij} = \delta_{ij} - B^{۲}_{ij}. \tag{۲−۱۵}$$

شکل ماتریسی M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{M} & \circ \\ \circ & \tilde{M} \end{pmatrix}. \tag{۲−۱۶}$$

که در آن $\tilde{M} = ۱ + \tilde{B}^{۲}$ است. این مقدار با توجه به رابطه‌ی (۲ − ۱۵) و ماتریس (۲ − ۵) حاصل می‌شود. قیود به دست آمده در (۲ − ۱۴) تنها به ازای $\sigma = \circ, l$ ارضا می‌شوند. به عبارت دیگر قیود اولیه تنها در مرزها برقرارند و ما آن‌ها را به شکل زیر نماد گذاری می‌کنیم:

$$\Phi^{(\circ)}_i = \Phi_i(\sigma)|_{\sigma=\circ} \tag{۲−۱۷}$$

$$\bar{\Phi}^{(\circ)}_i = \Phi_i(\sigma)|_{\sigma=l}$$

عبارت‌های بالا بنا به قیود برابر با صفر می‌باشند.

۲—۴ بررسی سازگاری قیود و یافتن قیود ثانویه

سازگاری یک قید به معنای برقرار بودن آن در همه‌ی زمان‌هاست یعنی باید مشتق آن نسبت به زمان برابر با صفر باشد؛ در اصلاح می‌گوییم قیود باید روی لاک حرکت معتبر باقی بمانند. عمل سازگاری را به این علت انجام می‌دهیم که دینامیک قیود با دینامیک مسئله سازگار شود.
تحولات زمانی هر دستگاه فیزیکی مقید توسط هامیلتونی کل آن مشخص می‌شود. برای ریسمان باز هامیلتونی کل از مجموع هامیلتونی کانونی (۲ − ۱۳) با قیود اولیه که هر کدام در یک ضریب نامعین (لاگرانژ) ضرب شده‌اند به دست می‌آید:

$$H_T = H_c + \lambda_i \Phi_i^{(\circ)} + \bar{\lambda}_i \bar{\Phi}_i^{(\circ)} \qquad (۲—۱۸)$$

که در آن λ و $\bar{\lambda}$ به ترتیب ضرایب نامعین لاگرانژ مربوط به نقاط ابتدایی و انتهایی ریسمان هستند. بنابراین روند بررسی سازگاری قیود را با این ایده انجام می‌دهیم که کروشه پواسون آن‌ها با هامیلتونی کل برابر با صفر باشد:

$$\dot{\Phi}_i^{(\circ)} = \{\Phi_i^{(\circ)}, H_T\} = \{\Phi_i^{(\circ)}, H_c\} + \lambda_j \{\Phi_i^{(\circ)}, \Phi_j^{(\circ)}\} = \circ, \qquad (۲—۱۹)$$

$$\dot{\bar{\Phi}}_i^{(\circ)} = \{\bar{\Phi}_i^{(\circ)}, H_T\} = \{\bar{\Phi}_i^{(\circ)}, H_c\} + \bar{\lambda}_j \{\bar{\Phi}_i^{(\circ)}, \bar{\Phi}_j^{(\circ)}\} = \circ. \qquad (۲—۲۰)$$

ما تنها محاسبات مربوط به رابطه‌ی (۲ − ۱۹) را خواهیم آورد. برای رابطه‌ی (۲ − ۲۰) روند محاسبات به طور کاملاً مشابه انجام می‌گیرد و آخر کار می‌توان نتایج را مستقیماً نوشت. نخست کروشه‌ی بین قید اولیه (۲ − ۱۴) و هامیلتونی کانونی را حساب می‌کنیم. می‌خواهیم برای شبیه شدن قیود با هامیلتونی کانونی، قیود را نیز به شکل انتگرال فضایی بنویسیم. به همین منظور روابط قیدی را با استفاده از تابع دلتای دیراک به شکل پیوسته‌ی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\Phi_i^{(\circ)} = \int d\sigma \delta(\sigma) \Phi_i^{(\circ)}(\sigma, \tau) \qquad (۲—۲۱)$$