دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر برای جبرهای توابع روی گروه‌های فشرده‌ی موضعی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

مسعود نوروزیان

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک با همانی e باشد و $\mathcal{A}(G) \subseteq l^{\infty}(G)$. زیرمجموعه‌ی $T \subseteq G$ را

(الف) مجموعه‌ی درونیاب $\mathcal{A}(G)$ می‌نامیم اگر هر تابع کران‌دار $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ را بتوان به تابع $\widetilde{f} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ توسیع داد به طوری که $\widetilde{f} \in \mathcal{A}(G)$؛

(ب) مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $\mathcal{A}(G)$ می‌نامیم اگر مجموعه‌ی درونیاب $\mathcal{A}(G)$ باشد و برای هر همسایگی U از e، همسایگی‌های باز $V_۱$ و $V_۲$ از e با شرط $\overline{V}_۱ \subseteq V_۲ \subseteq U$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $T_۱ \subseteq T$، تابع $h \in \mathcal{A}(G)$ با شرایط زیر وجود داشته باشد

$$h(V_۱T_۱) \subseteq \{۱\},\ h(G \setminus V_۲T_۱) \subseteq \{۰\}.$$

مجموعه‌های درونیاب یک روش کلیدی برای ساخت توابع مختلف روی گروه‌های گسسته‌ی نامتناهی یا به طور کلی گروه‌های فشرده‌ی موضعی می‌باشند. آن‌ها دارای این ویژگی هستند که هر تابع کران‌دار تعریف شده روی آن‌ها را می‌توان به یک تابع از نوع مورد نظر روی کل گروه توسیع داد.

در این پایان‌نامه که مبتنی بر مقاله‌ی [۱۳] است ابتدا به معرفی مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $C_۰(G)$ و $C_b(G)$ می‌پردازیم؛ سپس به مشخصه‌سازی مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر توابع پیوسته‌ی یکنواخت راست $C_{ru}(G)$ و توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف $WAP(G)$ اقدام می‌کنیم.

در آخر به بررسی اجتماع مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر می‌پردازیم و شرایطی را بیان می‌نماییم که تحت این شرایط اجتماع مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر، دوباره مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر برای جبر توابع مورد نظر ما هستند.

کد رده‌بندی موضوعی ریاضی: اولیه ۴۳A۴۶، ۲۲D۱۵ و ثانویه ۴۳A۱۵، ۴۳A۶۰، ۵۴H۱۱

کلمات کلیدی: توابع پیوسته‌ی یکنواخت، تقریباً دوره‌ای ضعیف، نیم‌گروه‌های فشرده‌سازی شده، مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر، مجموعه‌های گسسته‌ی یکنواخت، مجموعه‌های با انتقال فشرده، نقاط به طور قوی اول

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش‌گفتار

مجموعه‌های درونیاب یک روش کلیدی برای ساخت توابع مختلف روی گروه‌های گسسته‌ی نامتناهی یا به طور کلی گروه‌های فشرده‌ی موضعی می‌باشند. آن‌ها دارای این ویژگی هستند که هر تابع کران‌دار تعریف شده روی آن‌ها را می‌توان به یک تابع از نوع مورد نظر روی کل گروه توسیع داد.

اگر تابع توسیعی مورد نظر، تقریباً دوره‌ای باشد، مجموعه‌های درونیاب آنها معمولاً با I_0-مجموعه‌ها شناخته می‌شوند که توسط هارتمن و ریل-ناردزویسکی در [۲۱] معرفی شده‌اند.

روپرت در [۳۰] و چوو در [۸]، مجموعه‌های درونیاب را برای جبر توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف روی گروه‌های گسسته و نیم‌گروه‌ها با این شرط اضافی که تابع مشخصه‌ی مجموعه، تقریباً دوره‌ای ضعیف باشد مطرح کردند. این ویژگی معادل این است که هر تابع کران‌دار در بی‌نهایت صفرشونده، تقریباً دوره‌ای ضعیف باشد. این مجموعه‌های درونیاب توسط روپرت، مجموعه‌های با انتقال متناهی و توسط چوو، R_w-مجموعه‌ها نامیده شدند.

فرض کنیم $\ell^\infty(G)$، C^*-جبر متشکل از توابع عددی کران‌دار روی گروه توپولوژیک G، مجهز به نرم سوپریمم باشد و $\mathcal{A}(G) \subseteq \ell^\infty(G)$. در این صورت همه‌ی زیرمجموعه‌های G، مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $\mathcal{A}(G)$ می‌باشند اگر $\mathcal{A}(G) = \ell^\infty(G)$ و این در حالی است که گروه‌های فشرده‌ی موضعی غیر

فشرده نمی‌توانند مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $AP(G)$ باشند، که در آن $AP(G)$ جبر توابع تقریباً دوره‌ای روی G است.

محور اصلی مورد بحث ما، جبرهای $C_{ru}(G)$، متشکل از توابع کران‌دار و پیوسته‌ی یکنواخت راست روی G و $WAP(G)$، متشکل از توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف روی G است.

این فصل به پیش‌گفتار و پیش‌نیازها اختصاص یافته است.

در فصل ۲، بیش‌تر به بررسی مجموعه‌های درونیاب و درونیاب تقریب‌پذیر $C_b(G)$، متشکل از توابع پیوسته و کران‌دار روی G و $C_\circ(G)$، متشکل از توابع پیوسته‌ی در بی‌نهایت صفرشونده روی G می‌پردازیم. به علاوه توجه می‌کنیم که مجموعه‌های درونیاب و درونیاب تقریب‌پذیر، برای جبرهای $C_\circ(G)$ و $C_b(G)$ و $C_{ru}(G)$ یکسان می‌باشند.

در ادامه ثابت می‌کنیم که مجموعه‌های گسسته‌ی بسته، مجموعه‌ی درونیاب $C_b(G)$ هستند اگر فضای توپولوژیک G، نرمال باشد و مجموعه‌های متناهی، مجموعه‌ی درونیاب $C_\circ(G)$ می‌باشند.

در فصل ۳، نشان می‌دهیم که مجموعه‌های گسسته‌ی یکنواخت راست (چپ)، مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر جبر $C_{ru}(G)$ ($C_{lu}(G)$) هستند. عکس این گزاره‌ها زمانی درست است که گروه توپولوژیک G، مترپذیر باشد.

در ادامه، مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $WAP(G)$ را برای E-گروه‌های فشرده‌ی موضعی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدا نشان می‌دهیم که در هر گروه فشرده‌ی موضعی G، اگر T یک مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر گسسته‌ی یکنواخت راست (چپ) برای $WAP(G)$ باشد، آنگاه یک همسایگی V از e وجود دارد که VT با انتقال فشرده باشد. عکس این مطلب زمانی درست می‌باشد که G یک SIN-گروه فشره‌ی موضعی یا به طور کلی یک E-گروه فشرده‌ی موضعی و T یک E-مجموعه باشد.

نشان می‌دهیم که در هر E-گروه فشرده‌ی موضعی G، هر E-مجموعه‌ی گسسته‌ی یکنواخت راست (چپ) T که برای یک همسایگی V از e، VT با انتقال فشرده است، یک مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $WAP(G)$ می‌باشد.

اگر علاوه بر شرایط بالا G مترپذیر نیز باشد، مجموعه‌های گسسته‌ی یکنواخت راست (چپ) به طوری که VT با انتقال فشرده است کاملاً بر مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $WAP(G)$ منطبق هستند.

فضای $WAP_\circ(G)$ متشکل از همه‌ی توابع f در $WAP(G)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $|f|$ تقریباً همگرا به صفر است؛ یعنی،

$$WAP_\circ(G) = \{f \in WAP(G) : \mu(|f|) = \circ\}$$

که μ میانگین پایا روی $WAP(G)$ می‌باشد. بنابر دلایل ذکر شده‌ی رمزی در [۲۷]، مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $WAP(G)$ و $WAP_\circ(G)$ یکسان هستند. در واقع یک نتیجه از این مشخصه‌سازی آن است که

حتی تحت شرایط ضعیف‌تر در قسمت (ب) از تعریف ۲۴.۲.۲، زیرمجموعه‌های نامتناهی از گروه فشرده‌ی موضعی مترپذیر (از یک گروه گسسته) وجود ندارند که مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $AP(G)$ باشند.

در فصل ۴، رفتار مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $\mathcal{A}(G)$ را تحت اجتماع متناهی بررسی می‌کنیم. اثبات می‌کنیم که اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های درونیاب تقریب‌پذیر $\mathcal{A}(G)$، تحت شرایطی مجموعه‌ی درونیاب تقریب‌پذیر $\mathcal{A}(G)$ می‌باشند.

در این فصل مفاهیم و نتایجی را خواهیم آورد که شاید در ظاهر کم اهمیت باشند اما در باطن به استدلال‌های ریز و درشتی که در قضایای آتی خواهیم آورد کمک شایانی می‌نمایند و به فهم عمیق‌تر مطالب منجر می‌شوند.

۲.۱ پیش نیاز

در این بخش، ابتدا به ارایه‌ی برخی مفاهیم و نتایج مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌پردازیم و در ادامه گروه‌های توپولوژیک و نتایج مربوط به آنها را می‌آوریم که مبنای مطالعه‌ی موضوع پایان‌نامه هستند.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی X را همراه با خانواده‌ی $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌هایش فضای توپولوژیک می‌نامیم اگر

(الف) X و $\emptyset$ در $\mathcal{U}$ باشند؛

(ب) اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشد؛

(ج) اجتماع تعداد دلخواه از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشد.

فضای توپولوژیک متشکل از X و $\mathcal{U}$ را با جفت $(X,\mathcal{U})$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته روی X را با $C(X)$ و مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته و کران‌دار روی X را با $C_b(X)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر $f \in C(X)$، مجموعه‌ی $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ را مجموعه‌ی هم‌صفر f روی X می‌نامیم و با $\mathrm{coz(f)}$ نمایش می‌دهیم.

تابع f را در بی‌نهایت صفرشونده می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از X وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X \setminus K$ داشته باشیم

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

مجموعه‌ی همه‌ی توابع در بی‌نهایت صفرشونده روی X را با $C_0(X)$ نمایش می‌دهیم.

$\overline{\mathrm{coz(f)}}$ را محمل تابع f می‌نامیم و با $\mathrm{supp(f)}$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی همه‌ی توابع با محمل فشرده روی X را با $C_c(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت X را

(الف) T_0 می‌نامیم اگر برای هر دو نقطه‌ی متمایز x و y در X حداقل یکی دارای همسایگی باز فاقد دیگری باشد.

(ب) هاسدورف یا T_2 می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه‌های باز و مجزای U و V در X وجود داشته باشند به طوری که

$$x \in U,\ y \in V.$$

(پ) منظم یا T_3 می‌نامیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی C از X و هر نقطه‌ی x از X که $x \notin C$، مجموعه‌های باز و مجزای U و V در X وجود داشته باشند به طوری که

$$x \in U,\ C \subseteq V.$$

(ت) کاملاً منظم یا $T_{3\frac{1}{2}}$ می‌نامیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی C از X و هر نقطه‌ی x از X که $x \notin C$، تابع $f : X \longrightarrow [0, 1]$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x) = 1,\ f(C) = \{0\}.$$

(ث) نرمال یا T_4 می‌نامیم اگر برای هر دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزای C_1 و C_2 از X، دو زیرمجموعه‌ی باز و مجزای U_1 و U_2 در X وجود داشته باشند به طوری که

$$C_1 \subset U_1,\ C_2 \subset U_2.$$

(ج) کاملاً نرمال یا $T_{4\frac{1}{2}}$ می‌نامیم اگر برای هر دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزای C_1 و C_2 از X، تابع $f : X \longrightarrow [0, 1]$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f^{-1}(\{1\}) = C_1,\ f^{-1}(\{0\}) = C_2.$$

(چ) فشرده‌ی موضعی می‌نامیم اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی مانند U باشد به طوری که $\overline{U}$ فشرده است.

(ح) شمارای اول می‌نامیم اگر هر نقطه‌ی $x \in X$ دارای یک پایه‌ی همسایگی شمارا باشد.

(خ) شمارای دوم می‌نامیم اگر دارای یک پایه‌ی توپولوژی شمارا باشد.

(د) مترپذیر می‌نامیم اگر توپولوژی آن از یک متر حاصل شده باشد؛ یعنی، توسط گوی‌های باز حاصل از یک متر در X تولید شود.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد که برای هر $x \in X$ و همسایگی U از x، همسایگی V از x وجود داشته باشد به طوری که

$$\overline{V} \subset U.$$

در این صورت بستار هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X، فشرده است. اگر f یک نگاشت پیوسته از فضای توپولوژیک Y به توی X و A یک زیرمجموعه با بستار فشرده از Y باشد، آنگاه بستار $f(A)$ نیز فشرده است.

لم ۵.۲.۱. **(اوریسون)** فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف باشد. به علاوه فرض کنیم که K یک زیرمجموعه‌ی فشرده و A یک زیرمجموعه‌ای بسته از X باشد به طوری که $K \cap A = \emptyset$. در این صورت

(الف) همسایگی فشرده‌ی نسبی و باز U از K وجود دارد به طوری که

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus A.$$

(ب) تابع $f \in C_c(X)$ وجود دارد به طوری که روی K داریم $f \equiv ۱$ و روی A داریم $f \equiv ۰$؛

(ج) برای زیرمجموعه‌ی بسته‌ی B از X، فرض کنیم که تابع $h : B \longrightarrow [۰, \infty[$ در $C_۰(B)$ باشد به طوری که برای هر $x \in K \cap B$ داشته باشیم

$$h(x) \geqslant ۱.$$

در این صورت تابع پیوسته‌ی f معرفی شده در قسمت (ب) طوری وجود دارد که برای هر $b \in B$ دارای ویژگی زیر می‌باشد

$$f(b) \leqslant h(b).$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی K از X و هر زیرمجموعه‌ی باز U از $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم

$$L(K, U) = \{f \in C(X) | f(K) \subset U\}.$$

در این صورت توپولوژی تولید شده توسط مجموعه‌های $L(K,U)$ را توپولوژی فشرده-باز روی X می‌نامیم.

نتیجه ۷.۲.۱. هر فضای مترپذیر، کاملاً نرمال است.

برهان . به نتیجه‌ی ۴.۱.۱۳ از [۱۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۸.۲.۱. یک فضای شمارای نوع دوم، مترپذیر است اگر و تنها اگر یک فضای منظم باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۴.۲.۹ از [۱۰] رجوع کنید. ■

نتیجه ۹.۲.۱. هر زیرفضا از یک فضای مترپذیر، مترپذیر است.

برهان . به نتیجه‌ی ۳.۲ از [۳۱] رجوع کنید. ■

نتیجه ۱۰.۲.۱. تصویر پیوسته‌ی یک فضای متریک فشرده در یک فضای هاسدورف، مترپذیر است.

برهان . به نتیجه‌ی ۲۳.۲ از [۳۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۱.۲.۱. فشرده‌سازی فضای توپولوژیک X، یک زوج مرتب نظیر (K,h) می‌باشد به طوری که K یک فضای فشرده‌ی هاسدورف و h یک نگاشت یک به یک است که X را در یک زیرمجموعه‌ی چگال از K می‌نشاند.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک کاملاً منظم باشد. فشرده‌سازی استون-چک X، زوج مرتب (φ,Z) است به طوری که

(الف) Z یک فضای فشرده است؛

(ب) φ یک نشاندن از X به توی Z است؛

(ج) $\varphi(X)$ در Z چگال است؛

(د) برای هر فضای فشرده‌ی Y و هر تابع پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow Y$، یک تابع پیوسته‌ی $g : Z \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که $g \circ \varphi = f$.

فشرده‌سازی استون-چک X را با βX نمایش می‌دهیم.

نکته ۱.۲.۱۳. فرض کنیم X یک فضای کاملاً منظم باشد. به علاوه فرض کنیم (φ, Z) و (τ, W) فشرده‌سازی استون-چک X باشند. در این صورت یک همان‌ریختی نظیر $\gamma : Z \longrightarrow W$ وجود دارد به طوری که $\gamma \circ \varphi = \tau$.

تعریف ۱.۲.۱۴. فضای توپولوژیک X را از بعد صفر می‌نامیم اگر خانواده‌ی متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های هم باز و هم بسته از X یک پایه‌ی باز برای یک توپولوژی X تشکیل دهد.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنیم A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد به طوری که رابطه‌ی " $\geq$ " با شرایط زیر برای عناصر آن تعریف شود

(الف) رابطه‌ی " $\geq$ " بازتابی باشد؛ یعنی، برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \geq a$؛

(ب) رابطه‌ی " $\geq$ " ترایایی باشد؛ یعنی، برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \geq b$ و $b \geq c$ آنگاه داشته باشیم $a \geq c$؛

(ج) اگر $a, b \in A$ آنگاه $c \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $c \geq a$ و $c \geq b$.

در این صورت $(A, \geq)$ یا به طور ساده A را مجموعه‌ی جهت‌دار می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. زیرمجموعه‌ی $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ از X را یک تور می‌نامیم اگر A یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ را در فضای توپولوژیک X، همگرا به $x \in X$ می‌نامیم اگر برای هر همسایگی U از x وجود داشته باشد $\beta \in A$ به طوری که برای هر $\alpha \geq \beta$ داشته باشیم $x_\alpha \in U$.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ یک خانواده‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت $\mathcal{F}$ را یک پالایه روی X می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند

(الف) هر زیرمجموعه از X که حاوی یک F_α است در $\mathcal{F}$ قرار داشته باشد؛

(ب) اشتراک هر تعداد متناهی از F_αها در $\mathcal{F}$ قرار داشته باشد؛

(ج) مجموعه‌ی $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{F}$ نباشد.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم S یک مجموعه و $\mathcal{F}$ یک پالایه روی آن باشد. زیرخانواده‌ی $\mathcal{F}_{۰}$ از پالایه‌ی $\mathcal{F}$ را یک پایه‌ی پالایه برای $\mathcal{F}$ می‌نامیم اگر و تنها اگر هر عنصر $\mathcal{F}$ حاوی یک عنصر از $\mathcal{F}_{۰}$ باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر

$$\mathcal{F} = \{F \subset \mathcal{F} | F_{۰} \subset F,\ F_{۰} \in \mathcal{F} \text{ برای یک}\}.$$

به عبارت دیگر خانواده‌ی ناتهی $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی S را یک پایه پالایه برای یک پالایه روی S می‌نامیم اگر و تنها اگر $C_{۱}, C_{۲} \in \mathcal{C}$ آنگاه برای یک $C_{۳} \in \mathcal{C}$ داشته باشیم

$$C_{۳} \subset C_{۱} \cap C_{۲}.$$

در واقع پالایه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{C}$ حاوی همه‌ی ابر مجموعه‌های تولید شده توسط عناصر $\mathcal{C}$ می‌باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{F}_{۱}$ و $\mathcal{F}_{۲}$ پالایه‌هایی روی X باشند. در این صورت $\mathcal{F}_{۱}$ را ظریف‌تر از $\mathcal{F}_{۲}$ می‌نامیم اگر

$$\mathcal{F}_{۱} \supset \mathcal{F}_{۲}.$$

پالایه‌ی $\mathcal{F}$ را روی X ثابت می‌نامیم اگر و تنها اگر

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

و آزاد می‌نامیم اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset.$$

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. در این صورت $\{U \subset X | A \subset U^\circ\}$ یک پالایه روی X است. در واقع مجموعه‌ی U_x از همه‌ی همسایگی‌های $x \in X$، یک پالایه روی X می‌باشد و هر پایه‌ی همسایگی در x یک پایه‌ی پالایه برای U_x است. این پالایه در برخی مواقع همسایگی پالایه در x نامیده می‌شود.

تعریف ۲۲.۲.۱. پالایه‌ی $\mathcal{F}$ را روی فضای توپولوژیک X همگرا به x می‌نامیم اگر و تنها اگر $U_x \subset \mathcal{F}$؛ یعنی، اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ ظریف‌تر از همسایگی پالایه در x باشد.
نقطه‌ی x را یک نقطه‌ی حدی پالایه‌ی $\mathcal{F}$ می‌نامیم اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$x \in \cap\{\overline{F} | F \in \mathcal{F}\}.$$

تعریف ۲۳.۲.۱. پالایه‌ی $\mathcal{F}$ را یک فراپالایه می‌نامیم اگر و تنها اگر پالایه‌ای چون $\mathcal{C}$ وجود نداشته باشد به طوری که ظریف‌تر اکید از $\mathcal{F}$ باشد. بنابراین فراپالایه‌ها، پالایه‌های ماکسیمال هستند.

قضیه ۲۴.۲.۱. پالایه‌ی $\mathcal{F}$ روی X یک فراپالایه است اگر و تنها اگر برای هر $E \subset X$ داشته باشیم

$$E \in \mathcal{F} \quad \text{یا} \quad X \setminus E \in \mathcal{F}.$$

برهان . به قضیه‌ی ۱۲.۱۱ از [۳۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۵.۲.۱. هر پالایه‌ی $\mathcal{F}$ مشمول در یک فراپالایه می‌باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۱۲.۱۲ از [۳۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۶.۲.۱. اگر f نگاشتی از فضای توپولوژیک X به روی فضای توپولوژیک Y و $\mathcal{F}$ یک فراپالایه روی X باشد آن‌گاه $f(\mathcal{F})$ یک فراپالایه روی Y است.

برهان . به قضیه‌ی ۱۲.۱۴ از [۳۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۷.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) X فشرده است؛

(ب) هر خانواده $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های بسته‌ی X با خاصیت اشتراک متناهی (یعنی، اشتراک عناصر هر زیرخانواده‌ی متناهی از $\mathcal{E}$ ناتهی باشد)، اشتراکی ناتهی دارند؛

(ج) هر پالایه در X نقطه‌ی حدی دارد؛

(د) هر تور در X نقطه‌ی حدی دارد؛

(ه) هر فراپالایه در X همگرا است.

برهان . به قضیه‌ی ۱۷.۴ از [۳۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنیم A یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. به علاوه فرض کنیم که برای هر جفت x و y از عناصر A، ضرب xy تعریف شود به طوری که تحت این عمل A نیم‌گروه باشد و ضرب وابسته به عملگرهای خطی در A برای هر $x, y, z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ دارای ویژگی‌های زیر باشد

(الف) $x(y+z) = xy + xz$؛

(ب) $(x+y)z = xz + yz$؛

(ج) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$؛

آنگاه A را یک جبر روی F می‌نامیم.

جبر A را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم اگر یک جبر و در عین حال یک فضای نرم‌دار باشد و به علاوه داشته باشیم

(د) $\| xy \| \leqq \| x \| \cdot \| y \|$؛

جبر نرم‌دار A را یک جبر باناخ می‌نامیم اگر به عنوان یک فضای نرم‌دار، کامل باشد.

در حالتی که A دارای همانی u است، فرض می‌کنیم که

(و) $\|u\| = ۱$.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنیم A یک جبر و $x \longrightarrow x^*$ از A به روی A یک نگاشت باشد به طوری که برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ دارای خواص زیر است

(الف) $(x+y)^* = x^* + y^*$؛

(ب) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$؛

(ج) $(xy)^* = y^* x^*$؛

(د) $x^{**} = x$.

در این صورت A را یک $*$- جبر می‌نامیم. به علاوه اگر A یک جبر نرم‌دار باشد و برای هر $x \in A$ داشته باشیم

(و) $\| x^* \| = \| x \|$،

آنگاه A را یک $*$- جبر نرم‌دار می‌نامیم. یک فضای باناخ را که $*$-جبر نرم‌دار نیز باشد یک $*$- جبر باناخ می‌نامیم.

جبر باناخ A را یک C^*-جبر می‌نامیم اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم

(ه) $\|x^* x\| = \|x\|^۲$.

قضیه ۳۰.۲.۱. (استون-وایرشتراس) فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف و $A \subset C_\circ(X)$، یک زیرجبر از $C_\circ(X)$ باشد به طوری که

(الف) A جدا کننده‌ی نقاط X باشد؛ یعنی، برای $x \neq y$ در X عنصر $f \in A$ وجود داشته باشد که $f(x) \neq f(y)$،

(ب) برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $f \in A$ به طوری که $f(x) \neq ۰$،

(ج) A تحت مزدوج‌سازی مختلط بسته باشد.

در این صورت A در $C_\circ(X)$ چگال است.

برهان . به قضیه‌ی A.۱۰.۱ از [۹] رجوع کنید. ∎

در ادامه‌ی این فصل، به معرفی پیش‌نیازهای مربوط به گروه‌های توپولوژیک می‌پردازیم.

تعریف ۳۱.۲.۱. گروه G همراه با یک توپولوژی روی آن را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم اگر نگاشت‌های وارون $x \longmapsto x^{-۱}$ از G به G و ضرب $(x,y) \longmapsto xy$ از $G \times G$ به G پیوسته باشند.

گروه توپولوژیک G را فشرده‌ی موضعی می‌نامیم اگر به عنوان یک فضای توپولوژیک فشرده‌ی موضعی و هاسدورف باشد.

نمادگذاری ۳۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی توابع کران‌دار $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ که مجهز به نرم سوپریمم می‌باشد را با نماد $\ell^{\infty}(G)$ مشخص می‌نماییم.

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک با عمل دوتایی $*$ و همانی e باشد. در این صورت برای هر $u \in G$، کمترین مقدار $n \in \mathbb{N}$ که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند را مرتبه‌ی u می‌نامیم و با نماد $|u|$ مشخص می‌کنیم

$$u^{(n)} = \underbrace{u * u * ... * u}_{n\text{بار}} = e.$$

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. در این صورت زیرگروه

$$G_t = \{u \in G | \text{متناهی } |u|\}$$

را تاب-دار می‌نامیم. اگر $G = G_t$، آنگاه G یک گروه تاب-دار است و اگر هر عنصر G به جز e مرتبه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه G بی-تاب نامیده می‌شود.

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک همراه با عمل دوتایی $*$ باشد. در این صورت گروه G را تقسیمی می‌نامیم اگر برای $n = ۱, ۲, ۳, ...$ داشته باشیم

$$G^{(n)} = G.$$

به عبارت دیگر برای هر $x \in G$ و $n = ۱, ۲, ۳, ...$ وجود داشته باشد $y \in G$، به طوری که

$$x = y^{(n)} = \underbrace{y * y * ... * y}_{n\text{بار}}.$$

قضیه ۳۶.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و $\mathcal{U}$ یک پایه‌ی باز از e باشد. در این صورت

(الف) برای هر $U \in \mathcal{U}$، وجود دارد $V \in \mathcal{U}$ به طوری که $V^{2} \subset U$؛

(ب) برای هر $U \in \mathcal{U}$، وجود دارد $V \in \mathcal{U}$ به طوری که $V^{-1} \subset U$؛

(ج) برای هر $U \in \mathcal{U}$ و $x \in U$ وجود دارد $V \in \mathcal{U}$ به طوری که $xV \subset U$؛

(د) برای هر $U \in \mathcal{U}$ و $x \in G$ وجود دارد $V \in \mathcal{U}$ به طوری که $xVx^{-1} \subset U$.

برعکس، فرض کنیم G یک گروه و $\mathcal{U}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های آن باشد که دارای ویژگی اشتراک متناهی (یعنی، اشتراک عناصر هر زیرخانواده‌ی متناهی از $\mathcal{U}$ ناتهی باشد) برای گزاره‌های (الف) تا (د) است. خانواده‌ای از مجموعه‌های $\{xU\}$ که U در $\mathcal{U}$ و x در G است، یک زیرپایه‌ی باز برای توپولوژی G می‌باشند. با این توپولوژی G یک گروه توپولوژیک است.

اگر خانواده‌ی $\mathcal{U}$ دارای شرط زیر باشد

(و) برای $U, V \in \mathcal{U}$، وجود داشته باشد $W \in \mathcal{U}$ به طوری که $W \subset U \cap V$،

آنگاه $\{xU\}$ و $\{Ux\}$ پایه‌هایی باز برای توپولوژی G می‌باشند.

برهان . به قضیه‌ی ۴.۵ از [۲۲] رجوع کنید. ■

نمادگذاری ۳۷.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. در این صورت $GL(n, \mathbb{R})$، گروه توپولوژیک متشکل از ماتریس‌های معکوس‌پذیر $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ و $SL(2, \mathbb{R})$، گروه توپولوژیک متشکل از همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر 2×2 با دترمینان ۱ روی $\mathbb{R}$ را مشخص می‌کند.

قضیه ۳۸.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در این صورت برای هر $a \in G$، نگاشت‌های انتقال چپ و راست از آن، همان‌ریختی‌هایی از G هستند. به علاوه نگاشت وارون نیز یک همان‌ریختی از G است.

برهان . این قضیه از تعریف گروه توپولوژیک نتیجه می‌شود. ■

لم ۳۹.۲.۱. فرض کنیم $\varphi : G \longrightarrow H$ یک همریختی بین گروه‌های توپولوژیک G و H باشد. در این صورت φ پیوسته است اگر و تنها اگر در e_G پیوسته باشد.

برهان . به لم ۱.۱.۷ از [۹] رجوع کنید. ■

نتیجه ۴۰.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در این صورت برای هر همسایگی U از e، همسایگی V از e وجود دارد به طوری که

$$\overline{V} \subset U.$$

برهان . به نتیجه‌ی ۴.۷ از [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۴۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک T_0 باشد. در این صورت G منظم و در نتیجه هاسدورف است.

برهان . بنابر نتیجه‌ی ۴۰.۲.۱، می‌دانیم که G در e منظم و در نتیجه بنابر قضیه‌ی ۳۸.۲.۱، در هر نقطه از خود منظم است. بنابراین G یک فضای منظم هاسدورف می‌باشد. ■

قضیه ۴۲.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در این صورت زیرگروه H از G باز است اگر و تنها اگر درون H ناتهی باشد. به علاوه هر زیرگروه باز H از G بسته نیز می‌باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۵.۵ از [۲۲] رجوع کنید. ■

قضیه ۴۳.۲.۱. گروه توپولوژیک G متریپذیر است اگر و تنها اگر شمارای اول باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۳.۳.۱۲ از [۱] رجوع کنید. ■