دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گراف جابجایی وابسته به حلقه‌ی ناجابجایی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم وطن دوست

استاد مشاور

دکتر محمد اخوی زادگان

پژوهشگر

زهرا فیضی

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: فیضی　　　　　نام: زهرا

عنوان: گراف جابجایی وابسته به حلقه‌ی ناجابجایی

استاد راهنما: دکتر ابراهیم وطن دوست

استاد مشاور: دکتر محمد اخوی زادگان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　رشته: ریاضی محض　　　گرایش: جبر

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره)　　　دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲　　　تعداد صفحات: ؟؟

واژگان کلیدی: حلقه‌ی ناجابجایی، حلقه‌ی ماتریس‌ها، گراف جابجایی، عدد خوشه‌ای، عدد استقلال

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی ناجابجایی باشد. گراف جابجایی آن که با علامت $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، یک گراف با مجموعه‌ی رئوس $R \setminus Z(R)$ است و دو رأس متمایز a و b از آن با هم مجاورند، اگر و فقط اگر $ab = ba$. در این پایان‌نامه، به بررسی برخی از ویژگی‌های این گراف می‌پردازیم. همچنین گراف جابجایی $\Gamma(R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_n)$ را مورد بحث قرار می‌دهیم که در آن به ازای هر $i \in \{۱, \cdots, n\}$، R_i حلقه‌ای ناجابجایی است. به عنوان مثال، روابطی بین عدد خوشه‌ای و عدد استقلال حلقه‌های R و R_i را تعیین می‌کنیم.

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به او...

که در عبور از این مسیر دور
از الف اگر گذشته‌ام
از اگر، اگر به یا رسیده‌ام

یا اگر به وهم بودنم احتمال داده‌ام

از دعای آخرین، نگاه او بوده است.

جاودانه‌ای به نام "پدر"

و تقدیم به تو...

که هرچه می‌دوم

با گمان رد گام‌های تو، گم نمی‌شوم!

عاشقانه‌ای به نام "مادر"

ستایش

من به سرچشمه خورشید نه خود بردم راه   ذرّه‌ای بودم و مهر تو مرا بالا برد

بشارت باد بندگان مرا، آنان که به سخن‌ها گوش فرامی‌دهند و آنگاه از آنی که بهتر است پیروی می‌کنند. این افرادند که خداوند هدایتشان کرده است و این افرادند که خردمندانند. (**سوره زمر / ۱۷ و ۱۸**)

ستایش خداوندی را سزاست که نه اوّل او را آغازی و نه ازلی بودن او را پایانی است! وجود آشکاری است که نمی‌توان پرسید: از چیست؟ و حقیقت پنهانی است که نمی‌توان پرسید در کجاست؟! (خطبه‌ی ۱۶۳ نهج‌البلاغه)

اکنون که چنین است، ای معبود من! بر محمد (ص) و دودمانش درود فرست و ایمانم را به کامل‌ترین مرتبه‌ی آن برسان و یقینم را برترین یقین‌ها قرار ده، و نیّتم را به نیکوترین نیّت‌ها منتهی کن و در پرتو فضل و احسانت مرا بر مرکب کَرَم و بزرگواری‌ات بنشان و به مقتضای عدل خود، بر توسَن استحقاق و سزاواری مَنِشان! (صحیفه‌ی سجادیه)

سپاس گزاری

سپاس خدایی را که نیکویی‌های آفرینش را برای ما برگزید و سپاس خدایی را که سیاهی ندانستن را از من زدود و هزاران سپاس از برای او...

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی مادر دلسوز و مهربانم که سجاده‌ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و خانواده‌ی عزیزم که لحظه‌های مهربانی را به من آموختند!

به مصداق " **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** " با تقدیر شایسته از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر ابراهیم وطن‌دوست که با نکته‌های بلند، صحیفه‌ی سخن را علم‌پرور نمود و همواره راهنما و راهگشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است. همچنین از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر محمد اخوی‌زادگان که در گردآوری این مجموعه مرا یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و در آخر سپاس از همه کسانی که هنوز هم پشت لبخند قدیمی‌شان منتظر نشسته‌اند و اندیشه‌ی مردن عشق را به آب اشک می‌شویند، کسانی که مهر و قهرشان گرمی عشق دارد، دوستان خوبم...

زهرا فیضی

شهریور ۱۳۹۲

برای همه ی کسانی که دوستشان دارم...

ای درخت آشنا
شاخه های خویش را

ناگهان کجا جا گذاشتی؟

یا به قول خواهرم فروغ:
دست های خویش را

در کدام باغچه عاشقانه کاشتی؟

این قرارداد تا ابد میان ما برقرار باد:
چشم های من به جای دست های تو!
من به دست تو آب می دهم
تو به چشم من آبرو بده!
من به چشم های بی قرار تو
قول می دهم:
ریشه های ما به آب، شاخه های ما به آفتاب می رسد

ما دوباره سبز می شویم!

چکیده

گراف جابجایی از یک حلقه‌ی ناجابجایی R که با نماد $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن عناصر غیرمرکزی حلقه هستند و دو رأس متمایز a و b از گراف با هم مجاورند، اگر و فقط اگر $ab = ba$. در میان نتایج بدست آمده، نشان می‌دهیم قطر گراف $\Gamma(R)^c$ کمتر از ۳ است و ثابت می‌کنیم $diam\,\Gamma(R)^c = ۱$ اگر و فقط اگر $|R| = ۴$. همچنین نشان داده می‌شود اگر R یک حلقه‌ی ناجابجایی یکدار از مرتبه‌ی p^i، $(۲ < i \leq ۴)$ باشد، آنگاه گراف $\Gamma(R)$ همبند نیست. در ادامه، مینیمم درجه و عدد خوشه‌ای گراف $\Gamma(M_n(F))$ را تعیین می‌کنیم که در آن F یک میدان متناهی است. در پایان به بحث درباره‌ی گراف جابجایی وابسته به حلقه‌ی ناجابجایی $R = R_۱ \times \cdots \times R_n$ که در آن به ازای هر $i \in \{۱, \cdots, n\}$، حلقه‌ی R_i حلقه‌ای ناجابجایی است، می‌پردازیم.

کلمات کلیدی:

حلقه‌ی ناجابجایی، حلقه‌ی ماتریس‌ها، گراف جابجایی، عدد خوشه‌ای، عدد استقلال

فهرست مطالب

پیشگفتار

یکی از خصوصیات شگفت آور ریاضیات قرن بیستم، دست یافتن آن به روش‌های مجرد بوده است. این شناخت، سبب بوجود آمدن نتایج و مسائل جدید شده و در واقع ما را هدایت کرده است تا به تمام مباحث جدید ریاضیات که به وجود حتمی آن‌ها حتی گمان نرفته بود دست یابیم. به دنبال این پیشرفت‌ها بوده است که نه تنها ریاضیات نوین بوجود آمده؛ بلکه طرز تفکری تازه ایجاد شد و همراه آن برهان‌های جدید ساده‌ای برای نتایج تاریخی مشکل بدست آمدند. مطالعه‌ی میان رشته‌گی به ما رابطه‌های متقابل بین مباحثی را نشان داده که قبلاً نامربوط متصور می‌شدند.

نظریه‌ی حلقه‌ها بخشی از جبر می‌باشد که به بررسی خواص حلقه‌ها به عنوان یک ساختار مهم جبری می‌پردازد. از طرفی، مطالعه‌ی ساختارهای جبری، با تکیه بر خواص گراف‌ها یکی از موضوعات تحقیقاتی پرجاذبه در چند دهه‌ی اخیر می‌باشد که منجر به اثبات بسیاری نتایج جالب و طرح سؤالات قابل توجهی گشته است. مقالات بسیاری به چاپ رسیده است که در آن‌ها گرافی خاص را به یک ساختار جبری مانند گروه یا حلقه نسبت داده‌اند و به کمک خواص این گراف، نتایج با ارزشی در مورد ویژگی‌های جبری آن ساختار یافته‌اند. مراجع [؟]، [؟]، [؟] و [؟] گواه این مطلب‌اند. هدف از معرفی این گراف‌ها، بکارگیری یک شئ ترکیباتی برای درک بهتر موضوع مجرد حلقه‌ها است. این ایده یک ارتباط بین نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی حلقه برقرار می‌سازد و نتایجی را برای این دو شاخه از ریاضیات به بار می‌آورد.

شاید یک از دلایلی که جبردان‌ها را به این روش تحقیقاتی علاقه‌مند کرده است این باشد که در فرآیند برقراری رابطه بین خواص گراف و ویژگی‌های ساختار جبری، ظرافت تعاریف جبری جلوه‌گرتر می‌شود و عمق برخی قضایا بیش از پیش نمود می‌کند. وقتی به یک گراف یک ساختار جبری نسبت داده می‌شود؛ مسائل جبری

فراوانی از ترجمه بعضی خواص جبری گراف‌ها مانند عدد خوشه‌ای، عدد استقلال و عدد رنگی بوجود می‌آید. جذابیت این‌گونه تحقیقات ما را بر آن داشت تا در این پایان‌نامه به معرفی و بررسی خواص گراف جابجایی یک حلقه بپردازیم. به نظر می‌رسد که نخستین بار این نظریه در مورد گروه‌ها *Bertram* مطرح شده است. در آن مقاله به هر گروه غیرجابجایی، گراف جابجایی آن نسبت داده می‌شود که تعریف آن کاملاً مشابه گراف جابجایی یک حلقه است که در این پایان‌نامه به آن پرداخته‌ایم.

جالب است بدانید که نخستین مقاله در مورد گراف جابجایی یک حلقه توسط اکبری [۱]، قندهاری [۲]، هادیان [۳] و محمدیان [۴] ارائه شده است.

حال با بیان خلاصه‌ای از آنچه پیش رو دارید، بحث را آغاز می‌کنیم. این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های مختلف راه‌گشا می‌باشند، گرد هم می‌آوریم. تمام قضیه‌ها بدون اثبات بیان شده‌اند و در مقابل هر یک مرجعی سودمند معرفی شده است تا در صورت نیاز، جهت مرور اثبات به آن مراجعه شود.

برکسی پوشیده نیست که جبر و گراف دو شاخه‌ی مهم در ریاضیات می‌باشند. ما در فصل دوم می‌کوشیم تا یک ارتباط بین این دو شاخه برقرار سازیم. در این فصل، گراف جابجایی وابسته به یک حلقه‌ی غیرجابجایی را معرفی می‌کنیم و به بررسی برخی از ویژگی‌های این گراف می‌پردازیم، که از آن جمله می‌توان به مینیمم درجه، قطر گراف مکمل، عدد خوشه‌ای و ... اشاره کرد. همچنین اطلاعاتی در مورد مسطح بودن و هامیلتونی بودن گراف مکمل ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است قضایای مطرح شده در این فصل، همچون قطره‌ای در برابر دریای قضیه‌های اثبات شده در این بحث می‌باشند. البته در طی این راه، سؤالات متعددی مطرح شد که برای برخی از

[۱] Akbari
[۲] Ghandehari
[۳] Hadian
[۴] Mohammadian

آن‌ها پاسخی مناسب یافتیم که همین مطالب، محتوای فصل سوم را برمی‌گیرند. در این فصل، به حاصل‌ضرب متناهی حلقه‌های ناجابجایی، یک گراف جابجایی نسبت داده‌ایم و در حالتی که $R_1, R_2, \cdots, R_n$ حلقه‌های غیرجابجایی باشند، به بررسی برخی از خواص و ویژگی‌های گراف جابجایی $\Gamma(R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n)$ می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل، تعاریفی را که در سراسر این پایان‌نامه به کار رفته‌اند، به اختصار بیان می‌کنیم. همچنین قضایای معروفی که گهگاه به آن‌ها استناد می‌شود، بدون اثبات آورده شده‌اند و در مقابل هر یک مرجعی مناسب معرفی شده که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن اثبات قضیه را مشاهده کند.

تعاریف و قضایا

در این قسمت، ابتدا مقدمات مربوط به نظریه‌ی گراف و سپس تعاریف و قضایای جبری مطرح می‌شوند. بیشتر تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گراف از [؟] و تعاریف و قضایای مرتبط با جبر از [؟]، [؟] و [؟] انتخاب شده‌اند. لازم به ذکر است در سرتاسر این پایان‌نامه، منظور از R، حلقه‌ی ناجابجایی، همچنین منظور از گراف Γ، گرافی ساده می‌باشد.

۲.۱ تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۲.۱. گراف Γ، زوج مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ است که در آن $V(\Gamma)$ یک مجموعه‌ی ناتهی از رأس‌ها و $E(\Gamma)$ یک مجموعه از یال‌ها می‌باشد. دراین‌صورت:

۱) اگر a و b دو رأس Γ باشند، آنگاه یال (a,b) را با $a-b$ نشان می‌دهیم و می‌گوئیم a با b مجاور است.

۲) مرتبه‌ی گراف Γ را برابر $|V(\Gamma)|$ تعریف می‌کنیم.

۳) اگر بین دو رأس گراف Γ بیش از یک یال موجود باشد، آن یال را یال چندگانه و گراف Γ را گراف چندگانه

می‌نامیم.

۴) اگر یالی رأس v_i از گراف Γ را به v_i وصل کند، آن یال را طوقه می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۲. گرافی که فاقد طوقه باشد و بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال موجود باشد، گراف ساده نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید H و Γ دو گراف باشند. می‌گوئیم گراف H زیرگراف Γ است و با نماد $H \leq \Gamma$ نشان می‌دهیم، هرگاه $V(H) \subseteq V(\Gamma)$ و $E(H) \subseteq E(\Gamma)$ باشد.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید U یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. زیرگرافی از Γ که مجموعه‌ی رأس‌های آن U و مجموعه‌ی یال‌هایش برابر مجموعه‌ی یال‌هایی از Γ باشد که هر دو سر آن‌ها در U واقع است، زیرگراف القایی توسط U نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. زیرگراف S از گراف Γ را زیرگراف سراسری نامیم هرگاه $V(\Gamma) = V(S)$.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید Γ یک گراف باشد. تعداد رأس‌های مجاور با رأس a در این گراف را درجه‌ی رأس a می‌نامیم و آن را با $deg(a)$ نشان می‌دهیم. ماکزیمم و مینیمم درجه‌ی رئوس گراف Γ را به ترتیب با $\Delta(\Gamma)$ و $\delta(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۷. مجموعه‌ی رئوس متصل به رأس v در گراف Γ را همسایه‌های رأس v می‌نامیم و آن را با نماد $N_\Gamma(v)$ مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۸. اگر r عدد صحیح نامنفی باشد، گراف Γ را $r-$منظم نامیم، هرگاه برای هر رأس v از Γ داشته باشیم $deg(v) = r$.

تعریف ۱.۲.۹. گراف n رأسی و $(n-1)$−منظم را گراف کامل می‌نامیم و با نماد K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۰. گراف Γ یک گراف دوبخشی است، هرگاه بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به دو زیرمجموعه‌ی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که یک سر تمام یال‌های آن در V_1 و سر دیگر آن‌ها در V_2 باشد.

تعریف ۱.۲.۱۱. گراف دوبخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های V_1 و V_2 است که در آن هر رأس V_1 به تمام رئوس V_2 وصل شده باشد. اگر $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$، گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. گراف Γ را r−بخشی گوئیم، هرگاه رأس‌های Γ را بتوان به r زیرمجموعه افراز کرد به‌طوری‌که بین هیچ یک از این زیرمجموعه‌ها یالی نباشد.

گراف r−بخشی را یک گراف r−بخشی کامل نامیم، هرگاه هر دو رأسی که در یک بخش نباشند، به یکدیگر متصل باشند.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید Γ یک گراف باشد. مکمل آن که با Γ^c نشان داده می‌شود، گرافی با مجموعه‌ی رئوس $V(\Gamma)$ است، به‌طوری‌که دو رأس دلخواه a و b در آن مجاورند اگر و فقط اگر در گراف Γ مجاور نباشند.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید Γ یک گراف و v_i و v_j دو رأس آن باشند. یک راه به طول ℓ از v_i به v_j، دنباله‌ای متناهی از از رئوس Γ مانند $v_i = u_0, u_1 \cdots, u_\ell = v_j$ است به‌قسمی‌که برای هر $1 \leq t \leq \ell$، رئوس u_{t-1} و u_t مجاورند. در این تعریف، تکرار رأس و یال مجاز است.

راهی که یال و رأس تکراری نداشته باشد را مسیر می‌نامیم. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۵. مسیر $u_0 - u_1 - \cdots - u_n$ را یک دور نامیم، هرگاه $u_0 = u_n$. یک دور n رأسی را با C_n نمایش می‌دهیم. اگر n زوج باشد، C_n را دور زوج و اگر n فرد باشد، آن را دور فرد می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۱۶. *گراف Γ دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دور فرد باشد.*

برهان. به صفحه‌ی ۸ از مرجع [؟] رجوع کنید.

□

تعریف ۱.۲.۱۷. یک دور هامیلتونی از گراف Γ، دوری است که شامل تمام رئوس Γ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. گراف Γ را هامیلتونی نامیم هرگاه شامل یک دور هامیلتونی باشد.

قضیه ۱.۲.۱۹. ***(Dirac)*** *فرض کنید Γ یک گراف متناهی باشد. به‌طوری‌که $|V(\Gamma)| \geq ۳$ و $\delta(\Gamma) \geq \frac{|V(\Gamma)|}{۲}$. دراین‌صورت Γ گرافی هامیلتونی است.*

برهان. به صفحه‌ی ۵۴ از مرجع [؟] رجوع شود.

□

تعریف ۱.۲.۲۰. برای هر دو رأس دلخواه u و v متعلق به $V(\Gamma)$، نماد $\partial(u,v)$ را به عنوان فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر به کار می‌بریم و آن را برابر با طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو تعریف می‌کنیم. اگر بین رئوس u و v مسیری در گراف Γ موجود نباشد، $\partial(u,v)$ را برابر ∞ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۲۱. قطر گراف Γ با نماد $diam(\Gamma)$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$diam\ (\Gamma) = max\, \{\partial(u,v) \mid u,v \in V(\Gamma)\, \}$$

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنید Γ یک گراف باشد. اگر هر دو رأس دلخواه Γ توسط مسیری به یکدیگر متصل باشند، Γ را همبند و در غیر این صورت آن را ناهمبند خوانیم. هر زیرگراف همبند ماکزیمال از Γ را یک مؤلفه‌ی همبندی نامیم.

لم ۲۳.۲.۱. *فرض کنید Γ گرافی از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\delta(\Gamma) \geq \frac{n-1}{2}$ باشد، آنگاه Γ همبند است.*

برهان. به فصل اول از مرجع [؟] رجوع کنید.

□

تعریف ۲۴.۲.۱. فرض کنید برای گراف Γ نمایش‌های مختلفی در صفحه وجود داشته باشد. دراین‌صورت عدد تقاطع یک نمایش از Γ را برابر تعداد تقاطع‌های این نمایش (تقاطع به جز رأس) تعریف می‌کنیم. کوچکترین عدد تقاطع تمام نمایش‌های گراف Γ را با $\nu(\Gamma)$ نشان داده و آن را عدد تقاطع گراف می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. گراف همبند Γ را مسطح نامیم، هرگاه $\nu(\Gamma) = 0$.

لم ۲۶.۲.۱. *اگر Γ گرافی همبند و مسطح با n رأس و m یال باشد، آنگاه $m \leq 3n - 6$.*

برهان. به نتیجه‌ی ۹.۵.۱ از مرجع [؟] رجوع شود.

□

قضیه ۲۷.۲.۱. ***(Kuratowski)*** *گراف Γ مسطح است اگر و تنها اگر K_5 یا $K_{3,3}$ را به عنوان زیرگراف در بر نداشته باشد.*

برهان. به صفحه‌ی ۱۵۳ از مرجع [؟] رجوع کنید.

□

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی S از $V(\Gamma)$ را یک خوشه نامیم، هرگاه زیرگراف القایی روی S یک گراف کامل باشد. اگر تعداد عناصر خوشه‌های گراف، کران‌دار باشد، اندازه‌ی بزرگترین خوشه Γ را با $\omega(\Gamma)$ نمایش داده و آن را عدد خوشه‌ای Γ نامیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی W از $V(\Gamma)$ را یک مجموعه‌ی مستقل نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی در W به یکدیگر متصل نباشند. به بیان دیگر، زیرگراف القایی بر W فاقد یال باشد. اگر تعداد اعضای مجموعه‌های مستقل Γ، کران‌دار باشد، اندازه‌ی بزرگترین مجموعه‌ی مستقل Γ را عدد استقلال Γ نامیم و با نماد $\alpha(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۰.۲.۱. *فرض کنید Γ گرافی با دنباله‌ی درجات رئوس $d_1, d_2, \cdots, d_n$ باشد. دراین‌صورت داریم*

$$\alpha(\Gamma) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}$$

برهان. به صفحه‌ی ۹۱ از مرجع [?] مراجعه کنید.

□

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید Γ یک گراف با مجموعه‌ی رئوس $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ باشد. ماتریس مجاورت Γ، یک ماتریس $n \times n$، $A(\Gamma) = (a_{ij})$ است که سطرها و ستون‌های آن با رئوس Γ اندیس‌گذاری شده‌اند، به‌طوری‌که $a_{ij} = 1$ هرگاه رئوس v_i و v_j در گراف Γ با هم مجاور باشند، در غیر این صورت قرار می‌دهیم $a_{ij} = 0$.

تعریف ۳۲.۲.۱. چندجمله‌ای مشخصه‌ی گراف Γ را برابر چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس مجاورت آن در نظر گرفته و با نماد $\chi(\Gamma, \lambda)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم $\chi(\Gamma, \lambda) = det(\lambda I - A)$، که در آن A ماتریس مجاورت گراف Γ است.

ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی $\chi(\Gamma, \lambda)$ را مقادیر ویژه‌ی گراف Γ می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. چندجمله‌ای $m_A(\lambda)$ را چندجمله‌ای مینیمال گراف Γ می‌نامیم هرگاه