بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۰

دانشگاه اراک
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک
(گرایش اتمی – مولکولی)

عنوان

مطالعه نظری درهم تنیدگی اتم- فوتون

استاد راهنما
دکتر مهدی میرزایی

استاد مشاور
خانم ندا کمانی

پژوهشگر
طیبه باقری

زمستان ۹۱

بسم ا... الرحمن الرحیم

مطالعه نظری درهم تنیدگی اتم- فوتون

توسط:

طیبه باقری

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته فیزیک

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی، خوب

دکتر مهدی میرزایی (استاد راهنما و رئیس کمیته)........... استادیار

دکتر محمد ابوالحسنی (دانشگاه اراک) ....استادیار

خانم ندا کمانی.................... .. کارشناس ارشدفیزیک

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم

به پدر و مادر مهربان و فداکارم

به همسر عزیز و بزرگوارم

به فرزندان عزیز و دوست داشتنی ام مینا و شهریار

سپاس و ستایش مخصوص پروردگاری است که در سخت ترین مراحل زندگی در کنارم بوده و هست.

تشکر و سپاس خود را نثار پدر و مادر عزیزم می کنم که مرا به گونه ای تربیت کردند که در هر لحظه علاقمند به دانستن ویادگیری باشم.

تشکر و سپاس خود را نثار همسر عزیزم می کنم که اگر همراهی و حمایت های فکری ایشان نبود برایم تحمل سختی مسیر امکان نداشت.

تشکر و سپاس خود را نثار استاد بزرگوار و فرزانه و متواضعم جناب آقای دکتر میزایی می کنم که زحمت اصلی کار این پایان نامه با ایشان بوده است .

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را نثار استاد مشاورم سرکار خانم کمانی می نمایم که در طول این مدت در کنار من بوده اند.

از راهنمایی های ارزشمند و دقیق جناب آقای دکتر ابوالحسنی کمال تشکر و سپاس را دارم.

همچنین از خواهر و برادر های مهربانم بخصوص دو خواهرکوچکم که در تمام مراحل بیماری در کنار من و فرزندانم بوده اند کمال تشکر و قدردانی را می نمایم .

از دوستان دانشگاه خانم شم آبادی و خانم نظام آبادی کمال تشکر را می نمایم.

از همسر و فرزندان عزیزم نیز اگر در طول مسیر تحصیل به علت مشغله کاری نسبت به وظایفم کوتاهی کرده ام پوزش می طلبم.

چکیده

اخیراً تحقیقات زیادي بر روي مباحث درهم‌تنیدگي و ارسال کوانتومي انجام شده است. در این پایان‌نامه ابتدا مفهوم درهم‌تنیدگي و سپس معیارهاي آن مورد بحث قرار گرفته است.

سپس مدل جینز کامینگز در حضور تقریب موج دوار مورد مطالعه قرار گرفته است و در نهایت درهم‌تنیدگي اتم- فوتون را مورد بررسي قرار داده‌ایم و در اندازه‌گیري درهم‌تنیدگي اتم- فوتون این مطلب عنوان شده است که اندازه‌گیري مقدار درهم‌تنیدگي به وسیله‌ي ویژه مقادیر منفي مناسب‌تر است تا اینکه مقدار درهم‌تنیدگي را از آنتروپي وان نیومن محاسبه کرد. همچنین درهم‌تنیدگي دو مدل جینز کامینگز مجزا را محاسبه کرده‌ایم و در این حالت پارامتر تنظیم مخالف صفر بوده و محاسبات نشان مي‌دهد که درهم‌تنیدگي این دو اتم در حالتي است که اگر یکي از اتمها در حالت پایه باشد دیگري در حالت برانگیخته مي‌باشد.

فهرست مطالب

فصل اول معیارهای درهم تنیدگی

فصل دوم:مدل جینزکامینگز

فصل سوم:در هم تنیدگی مدل جینز کامینگزیا در هم تنیدگی اتم- فوتون

فهرست نمودارها واشکال

فصل اول

بررسی معیارهای

درهم تنیدگی

۱-۱ تعریف دو سیستم جداپذیر[1]

ابتدا تعریف جداپذیری را برای بردار حالت شروع کرده و سپس این تعریف را برای حالات آمیخته که با ماتریس چگالی نمایش داده می شود تعمیم می دهیم . اگر بردار حالت یک سیستم فیزیکی را به صورت $|\psi_1>$ نشان دهیم که $|\psi_1>$ متعلق به زیر فضای H_1 فضای هیلبرت بوده و همچنین بردار دیگر $|\psi_2>$ متعلق به زیر فضای H_2 باشد به طوری که H_1, H_2 هر دو زیر مجموعه ای از فضای برداری بزرگتر H می باشند :

$$H=H_1\otimes H_2 \quad (۱-۱-۱)$$

$$\sum_i |\psi_{1i}><\psi_{1i}|=1 \quad (۲-۱-۱)$$

$$\sum_i |\psi_{2i}><\psi_{2i}|=1 \quad (۳-۱-۱)$$

$$|\psi>=|\psi_1>\otimes|\psi_2> \quad (۴-۱-۱)$$

هر چند حاصلضرب تانسوری دو بردار $|\psi_1>\otimes|\psi_2>$ برداری در فضای بزرگتر می شود ولی عکس این مطلب درست نیست یعنی همیشه هر برداری در فضای بزرگتر را نمی توان به صورت حاصلضرب تانسوری دو بردار متعلق به فضای کوچکتر نوشت اگر بتوان یک بردار حالت در فضای بزرگتر را به صورت حاصلضرب دو بردار در فضای کوچکتر نوشت به این حالت جدایی پذیر می گویند.
به عنوان مثال می توان به حالات زیر اشاره نمود :

1-seperable

در فضای اسپین حالت های زیر جدا پذیرند :

$$|\uparrow> |\uparrow>$$
$$|\downarrow> |\downarrow>$$
$$|\downarrow> |\uparrow>$$

که حالات $|\uparrow>$ نشانگر اسپینی با ویژه حالت $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}>$ و حالت $|\downarrow>$ متناظر با حالت $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}>$ می باشد. اگر بخواهیم جداپذیری را بر حسب عملگر چگالی بنویسیم یک حالت جدایی پذیر به صورت زیر نوشته می شود.

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \qquad (۵-۱-۱)$$

در حالت کلی اگر عملگر چگالی وابسته به هر یک از زیر حالت ها با عملگرهای چگالی ρ_1, ρ_2 معرفی شود عملگر چگالی یک حالت آمیخته در حالت کلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i} \qquad (۶-۱-۱)$$

که به دلیل خاصیت احتمالی عملگر چگالی می توان نوشت:

$$tr(\rho) = \sum_i p_i\, tr(\rho_{1i}) tr(\rho_{2i}) = \sum \rho_i = 1 \qquad (۷-۱-۱)$$

که در حالت خالص $\rho^2 = \rho$ ولی در حالت آمیخته چنین رابطه ای برقرار نیست.

به راحتی می توان روابط فوق را برای حالات خالص اثبات کرد:

اگر یک عملگر چگالی در حالت خالص در ویژه حالت $|\psi>$ باشد به راحتی به نتیجه زیر می توان رسید:

$$\left.\begin{array}{l} \rho = |\psi><\psi| \\ \rho^2 = |\psi><\psi|\psi><\psi| \\ <\psi|\psi> = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho^2 = |\psi><\psi| = \rho \qquad (۸-۱-۱)$$
$$\rho^2 = \rho$$

با توجه به اینکه رابطه مربوط به حالت آمیخته به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho=\sum_i p_i\,|\psi_i><\psi_i| \Rightarrow \rho^2=\sum_{i,j} p_i p_j\,|\psi_i><\psi_i|\psi_j><\psi_i|$$
$$<\psi_i|\psi_j>=\delta_{i,j} \Rightarrow$$
$$\rho^2=\sum_{i,j} p_i p_j\,|\psi_i>\delta_{i,j}<\psi_j|$$

$$\rho^2=\sum_i p_i^2\,|\psi_i><\psi_i| \Rightarrow \rho^2\neq\rho^1 \qquad (۱-۱-۹)$$

$$tr(\rho^2)=\sum_i p_i^2<\psi_i|\psi_i><\psi_i|\psi_i>=\sum_i p_i^2 \qquad (۱-۱-۱۰)$$

پس با توجه به اینکه

$$\sum_i p_i^2<\sum p_i\sum p_j=1 \Rightarrow$$
$$tr(\rho^2)\leq 1 \qquad (۱-۱-۱۱)$$

رابطه کلی به صورت زیر نوشته می شود که برای حالت خالص

$$tr(\rho^2)=1 \qquad (۱-۱-۱۲)$$

و درحالت آمیخته عبارت است از

$$tr(\rho^2)<1$$

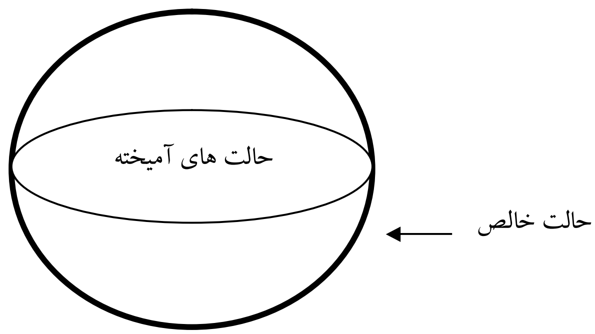
حال با توجه به اینکه هر ماتریس چگالی در فضای 2×2 را به صورت زیر می توان بر حسب ماتریس واحد و ماتریسهای پاولی نوشت .

$$\rho=\frac{I}{2}+\frac{\vec{r}.\vec{\delta}}{2} \qquad (۱-۱-۱۳)$$

که r نمایانگر یک بردار در فضای مکان می باشدو نیز از $tr(\rho^2)\leq 1$ می توان نتایج زیر را استخراج نمود

$$tr(\rho^2)=tr(\frac{1}{4}(I+2\vec{r}.\vec{\delta}+(\vec{r}.\vec{\delta})^2)=$$
$$\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}\sum r_i^2=\frac{1}{2}(1+r_1^2+r_2^2+r_3^2)\leq 1 \qquad (۱-۱-۱۴)$$
$$\Rightarrow r_1^2+r_2^2+r_3^2\leq 1$$

همانطور که از محاسبات فوق مشخص شده است فضای هندسی وابسته به بردار های r تشکیل یک کره به نام کره ی بلوخ می دهد که نقاط داخل کره مشخص کننده حالات آمیخته و نقاط روی سطح کره نقاط ناب یا خالص را نشان می دهد.



شکل ۱-۱ کره بلوخ

یک مثال واضح که می توان برای حالت های جداپذیر بیان کرد زمانی بود که معادله ی شرودینگر را حل می کردیم و تابعیت زمانی و مکانی تابع موج را از هم جدا می کردیم

$$\psi(x,t)=\psi(x)E(t) \qquad (۱-۱-۱۵)$$

که در واقع حالتی را معرفی می کند که توابع موج فضایی و زمانی هیچ اثری بر روی هم نداشته و ماهیت آنها از هم جدا می باشد.

۱-۲ سیستم های در هم تنیده[1]

تعریف : به سیستم هایی در هم تنیده گفته می شود که به هم وابسته بوده و بر هم کنش دارند (یا به بیان دقیق تر مطابق تعریفی که آقای ورنر ارائه داده است حالاتی که در ابتدا با هم برهم کنش داشته و سپس از هم جدا شده اند با هم درهم تنیدگی دارند). می توان اشاره کرد که اطلاعات این سیستم ها از یکدیگر جدا نمی باشد و بطور کلی به یکدیگر وابسته می باشد به عنوان مثال معروفی که انیشتین بکار برده است اگر ذره ای با اسپین صفر به دو ذره تلاشی پیدا کند اگر اسپین ذره اول به سمت بالا باشد اسپین ذره دوم حتما

1- Entanglement
2- Non Local

باید به سمت پایین قرار بگیرد و اگر به هر شکل اسپین یکی از ذرات را دستخوش تغییر قرار دهیم اسپین ذره دوم نیز تحت تاثیر قرار می گیرد که به همین دلیل از این حالات برای ارسال کوانتومی استفاده شده و به کانال کوانتومی معروف می باشند .

در هم تنیدگی فقط مربوط به اسپین نیست بلکه در نور نیز می توانیم حالات درهم تنیده را تولید و به کار ببریم و پارامتر معرف درهم تنیدگی قطبش فوتونها می باشد به طوری که برای یک سیستم در هم تنیده، اگر قطبش یکی افقی باشد، قطبش دیگری حتماً عمودی می باشد.

در هم تنیدگی محدود به فاصله نیست و فاصله تأثیری بر روی آن ندارد به این خصلت سیستم های در هم تنیده غیر جایگزیده گفته می شود.

از لحاظ ریاضی اگر بخواهیم سیستم های در هم تنیده را تعریف کنیم می توان به صورت زیر آنها را معرفی کرد: اگر $|\psi_1>, |\psi_2>$ دو بردار حالت باشند که هر کدام به ترتیب متعلق به فضای برداری H_1, H_2 می باشند بطوریکه H_1, H_2 با فضای برداری کل H رابطه ی زیر را دارند.

$$H=H_1 \otimes H_2 \qquad (۱-۲-۱)$$

درست است که $|\psi_1> \otimes |\psi_2>$ حاصل یک بردار در فضای بزرگ تر می شود ولی عکس این مطلب درست نیست که هر برداری در فضای بزرگتر را بتوان به صورت حاصلضرب تانسوری دو بردار در فضای کوچکتر نوشت. اگر برداری که از فضای بزرگتر انتخاب می شود را بتوان به صورت حاصلضرب دو بردار در فضایی نوشت به این حالت ها جداپذیر گفته می شود. اگر بردار انتخابی به صورتی باشد که نتوان آن را به صورت ضرب دو بردار نوشت به این حالت ها در هم تنیده می گویند.

مانند بردارهای زیر در فضای اسپین

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle+|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle-|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)$$

برای یک حالت خالص در هم تنیده که فقط یک تک بردار داریم به آن حالت خالص در هم تنیده[1] گفته می شود اگر بردار رانتوان به صورت حاصلضرب بردارها نوشت. حالت خالص در هم تنیده را در فضای n بعدی به صورت زیر می توان نوشت :

$$|\psi>=\sum_{i,n}c_{in}|i_n>\neq|\psi_1>\otimes|\psi_2>\otimes...\otimes|\psi_n> \qquad (۱-۲-۲)$$

اگر یک حالت آمیخته در هم تنیده[2] داشته باشیم در هم تنیدگی را برای ماتریس چگالی به صورت زیر می توان معرفی کرد :

$$\rho\neq\sum_i p_i\rho_1^i\otimes\rho_2^i\otimes...\otimes\rho_n^i \qquad (۱-۲-۳)$$

-دو سوال اساسی در نظریه اطلاع رسانی کوانتومی وجود دارد: ۱- آیا یک ماتریس چگالی درهم تنیده می باشد یا خیر ۲- در صورت در هم تنیده بودن میزان درهم تنیدگی به چه میزان می باشد؟

در این راستا معیارهای مختلفی برای تشخیص و تعیین میزان در هم تنیدگی معرفی شده اند ولی تمام این معیارها باید در یک سری از اصول با هم مشترک باشند یا مجموعه قوانینی باید بر آنها حاکم باشد

۱-۲-۱- اصول حاکم بر معیارهای در هم تنیدگی

برای معیارهای در هم تنیدگی خصوصیات زیادی معرفی شده است اما سه فرض اساسی که برای تمام این معیارها مشترک بوده و باید دارای این خصوصیت باشند به شرح زیر است :

۱- اگر E به عنوان یک معیار در هم تنیدگی معرفی شود مقدار آن برای یک سیستم جدایی پذیر باید مساوی صفر باشد یعنی E=0 .

۲- هیچ تبدیلات محلی نمی تواند در هم تنیدگی را تغییر دهد.

۳- در هم تنیدگی تحت تأثیر تحولات کلاسیکی افزایش نمی یابد.

---

[1]-Pure state
2-Mixed state

۱-۲-۲تابع محدب

قبل از توصیف تابع محدب لازم است یادآوری کنیم که اگر تابعی به صورت زیر نوشته شود :

$$f(\sum \alpha_i x_i) = \sum \alpha_i f(x_i) \qquad (۱-۲-۴)$$

به این تابع خطی گویند. حال اگر تابعی دارای خاصیت زیر باشد :

$$\sum \alpha_i f(x_i) \leq f(\sum \alpha_i x_i) \quad , \quad \sum_i \alpha_i = 1 \qquad (۱-۲-۵)$$

به این تابع، تابع محدب می گویند و شرط اینکه یک تابع محدب باشد این است که f'' تابع منفی باشد و در صورتیکه عکس این برقرار و f'' مثبت باشد تابع مقعر است. اکنون به معرفی تعدادی از معیارهای تشخیص درهم تنیدگی می پردازیم.

۱-۲-۳- آنتروپی وان نیومن

آنتروپی به زبان ساده به مفهوم بی نظمی می باشد. در سیستم های کلاسیکی آنتروپی شانون کمیتی مناسب است که اولین بار آقای شانون در نظریه ریاضی ارتباطات بکار برد و در ادامه نقش آن در نظریه کدگذاری و فشرده سازی دوچندان شد این آنتروپی که به احترام آقای شانون، بنام آنتروپی شانون لقب گرفت از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$H(\rho_1,...,\rho_n) = -\sum_i \rho_i \log_2 \rho_i \qquad (۱-۲-۶)$$

مشابه آنتروپی شانون در سیستمهای کلاسیکی، آنتروپی وان نویمن برای سیستم های کوانتومی استفاده می شود که رابطه ی آن به شکل زیر می باشد :

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho) \qquad (۱-۲-۷)$$

برای یک سیستم جداپذیر خالص این مقدار برابر صفر است همانگونه که قبلاً اشاره شد که می توان در هم تنیدگی یک سیستم جداپذیر را صفر گرفت پس این مقدار آنتروپی یعنی آنتروپی وان نیومن می تواند به عنوان معیاری برای تشخیص مقدار در هم تنیدگی محاسبه شود و شرایط زیر را دارا می باشد:.

۱- برای یک حالت خالص دوتایی در هم تنیده، آنتروپی وان نیومن به خوبی مقدار در هم تنیدگی را به صورت عبارت زیر مشخص می کند :

$$E(\rho_{AB}) = -Tr(\rho_A \log_2(\rho_A)) = -Tr(\rho_B \log_2(\rho_B)) \qquad (۱-۲-۸)$$

۲- بر اساس تعریف آنتروپی به تعریف معیاری تحت عنوان شکل در هم تنیدگی $E(\varepsilon)$ می رسیم که مقدار آن برای یک آنسامبل از بردارهای حالت دو جزئی $\varepsilon = \{p_i, r_i\}$ به صورت میانگین آنسامبل $\sum_i p_i E(\gamma_i)$ روی مقدار در هم تنیدگی برای بردارهای خالص در هم تنیده تعریف می شود.

۳- مشابه تعریف فوق، می توان شکل درهم تنیدگی E(m) را برای یک سیستم دو جزئی آمیخته در حالت m به صورت مینیمم $E(\varepsilon)$ روی آنسامبل $\varepsilon = \{\rho_i, r_i\}$ که مشخص کننده حالت آمیخته $m = \sum_i p_i |\gamma_i><\gamma_i|$ می باشد تعریف نمود. یعنی اگر یک حالت خالص در هم تنیده γ_r با احتمال P_k داشته باشیم مقدار انتظاری این حالت درهم تنیده $\sum_k p_k E(\gamma_k)$ می شود و در نتیجه E(m) یا E(γ) کل با توجه به محدب بودن آنتروپی به صورت زیر نوشته می شود :

$$\begin{aligned} &S(\rho) \geq \sum_k \rho_k s(\rho_k) \Rightarrow \\ &\sum \rho_k E(r_k) \leq E(r) \end{aligned} \qquad (۱-۲-۹)$$

۱-۲-۴- ویژه مقادیر منفی

اگریک سیستم دو جزئی جدا پذیر باشد فضای برداری کل برای ماتریس چگالی در فضای ماتریسهای چگالی دو جزئی به صورت زیر نوشته می شود :

$$\rho = \rho_1^A \otimes \rho_2^B \qquad (۱-۲-۱۰)$$

که شامل حاصلضرب دو ماتریس چگالی متعلق به هر یک از زیر سیستمها نوشته می‌شود.در هر دو حالت وقتی ماروی ماتریس چگالی اندازه گیری (رد گیری)انجام دهیم

$$\rho^A = Tr_B(\rho)$$
$$\rho^B = Tr_A(\rho) \qquad (۱۱-۲-۱)$$

یک ماتریس چگالی به دست می آید که بنابر خاصیت ماتریسهای چگالی دارای ویژه مقادیر مثبت می باشد. اما اگر حالت مورد نظر یک حالت در هم تنیده باشد حاصلضرب این دو ماتریس چگالی لزوماً یک ماتریس چگالی نبوده و دلیلی ندارد که ویژه مقادیر آن همه مثبت باشند در نتیجه کمیتی به نام ویژه مقادیر منفی[۱] ظاهر می شود که منظور از آن مجموع ویژه مقادیر منفی می باشد مقدارآن نشان دهنده ی در هم تنیدگی سیستم است.

برای حالت جدا پذیر Negativity=0

و برای حالت در هم تنیده دیگر صفر نیست و مقدار آن برابر است با :

$$N(\rho) = \frac{1}{2}(\| \rho_A^T \|_1 - 1) = \sum_{\lambda<0} \lambda \qquad (۱۲-۲-۱)$$
$$EN(\rho) = \log_2 \| P_A^T \|_1$$

۱-۲-۵ تلاقی[۲]

کمیت دیگر تلاقی می باشد که مقدار این کمیت نیز به محاسبه ی مقدار در هم تنیدگی کمک می کند.برداری به اسم تبدیل چرخش اسپین[۳] تعریف می شود و آن را با $|\tilde{\psi}>$ نشان می دهیم این بردار از تاثیر مولفه y عملگر پاولی بر روی شکل همیوغ مختلط بردار مورد نظر به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\tilde{\psi}_{AB}> = \sigma y |\psi_{AB}^*> \qquad (۱۳-۲-۱)$$

تصویر بردار حالت سیستم$|\psi_{AB}>$ بر روی بردار تبدیل چرخش اسپین یعنی $|\tilde{\psi}_{AB}>$ برابر تلاقی می شود اکنون تلاقی را که با C(ψ) نشان داده می شود به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$C(\psi)_{AB} = |<\psi_{AB}|\tilde{\psi}_{AB}>| \qquad (۱۴-۲-۱)$$

1- Negativity
2- concurrence
3- spin- flip transformation