دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم – گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

(ریاضی محض – گرایش جبر)

موضوع :

بررسی مدول‌های ضربی و هم‌ضربی

نگارنده :

اسماعیل حسینی

استاد راهنما :

دکتر محمدجواد نیک مهر

استاد مشاور :

دکتر شعبان قلندرزاده

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

روح بزرگوار برادرم

سپاس

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمر و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خودش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

و با قدردانی از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سفید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان، مادرانمان، استادانمان

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. دراین صورت R-مدول M را ضربی (هم‌ضربی) گویند هرگاه به‌ازای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری که $N = IM$ $(N = (0 :_M I))$. مدول‌های ضربی و هم‌ضربی دارای خواص مهمی هستند که برخی از آن‌ها مانند زیرمدول‌های اول و ماکسیمال آن‌ها در این پایان‌نامه بررسی می‌شود. هم‌چنین مدول‌های ضربی وفادار و متناهی‌مولد را بیان کرده و ارتباط بین آن‌ها نیز بیان می‌شود. در ادامه نیز چند قضیه و نتیجه مربوط به مدول‌های هم‌ضربی وفادار مطرح و مورد تحقیق قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی

۱. مدول ضربی ۲. مدول هم‌ضربی ۳. مدول وفادار ۴. مدول متناهی‌مولد

فهرست مطالب

مقدمه

موضوعی که در این پایان‌نامه مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرد، مدول‌های ضربی و هم‌ضربی می‌باشد که برگرفته از [۳] و [۵] و [۷] و [۸] و [۱۰] و [۱۵] است. مدول‌های ضربی یکی از مباحث مهم جبر می‌باشد که توسط محققین متعددی از جمله اسمیت [۱]، البست [۲] و بارنارد [۳] مورد مطالعه قرار گرفته و مطالب مهمی را نیز اثبات نموده‌اند. مدول‌های هم‌ضربی توسط انصاری طرقی [۴] و فرشادی‌فر [۵] و محققین دیگری مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج مفیدی را نیز در این زمینه به‌دست آورده‌اند.

در فصل اول این پایان نامه که از [۲۶] و [۲۷] و [۲۸] می‌باشد، تعاریف و مفاهیم مقدماتی بیان می‌شود که R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است. در فصل دوم که از [۷] و [۸] و [۱۰] و [۱۵] است، ابتدا مدول ضربی را تعریف کرده و برخی خواص مربوط به مدول‌های ضربی بیان می‌شود و نشان داده می‌شود اگر M یک R-مدول ضربی و S زیرمجموعه بسته‌ی ضربی R باشد آن‌گاه $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$-مدول ضربی است و درصورتی که M متناهی‌مولد و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول (ماکسیمال) R باشد و $S = R - \mathfrak{p}$، این نتیجه در مورد موضع‌سازی M در $\mathfrak{p}$ نیز برقرار می‌باشد. هم‌چنین قضایا و نتایجی در مورد مدول‌های ضربی وفادار و متناهی‌مولد بیان و اثبات می‌شود. در فصل سوم که از [۳] و [۵] و [۷] و [۸] است، مدول هم‌ضربی را تعریف نموده و نشان داده می‌شود که زیرمدول یک مدول هم‌ضربی، هم‌ضربی می‌باشد و هر R-مدول هم‌ضربی ناصفر شامل یک زیرمدول مینیمال است. در انتها نیز مدول‌های هم‌ضربی وفادار را بیان و برخی قضایا و نتایج مربوط به آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[۱] Smith

[۲] El-Bast

[۳] Barnard

[۴] Ansari-Toroghy

[۵] Farshadifar

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان چند مفهوم مقدماتی پرداخته و علاوه بر آن چند قضیه مهم و کاربردی درباره این مفاهیم بیان می‌شود.

۱-۱ حلقه

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین صورت عنصر $r \in R$ را مقسوم‌علیه صفر [۱] نامند هرگاه $0_R \neq y \in R$ وجود داشته باشد به طوری‌که $ry = 0_R$ یا $yr = 0_R$.

مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را با $Z(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۱-۲. حلقه ناجابه‌جایی R را دامنه [۲] گویند هرگاه $0_R \neq 1_R$ و چنان‌چه به‌ازای هر $a, b \in R$، که $ab = 0$، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اگر حلقه R جابه‌جایی باشد آن را دامنه صحیح [۳] گویند.

تعریف ۱-۱-۳. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین صورت عضو $r \in R$ را وارون‌پذیر گویند هرگاه $u \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $ru = 1_R$ یا $ur = 1_R$.

---

[۱] zero-divisor

[۲] domain

[۳] integral domain

تعریف ۱-۱-۴. حلقه نابدیهی R را میدان [۱] گویند هرگاه هر عضو ناصفر آن وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین صورت عضو $e \in R$ را خودتوان [۲] گویند هرگاه، $e^2 = e$.

تعریف ۱-۱-۶. زیرمجموعه ناتهی I ازحلقه R را ایده‌آل [۳] گویند هرگاه شرط های زیر برقرار باشد:

(۱) اگر $a, b \in I$، آن‌گاه $a + b \in I$؛

(۲) اگر $a \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه $ra \in I$ و $ar \in I$.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید R یک حلقه باشد و $a \in R$. دراین صورت مجموعه

$$aR := \{ar : r \in R\},$$

ایده‌آل R است و آن‌را ایده‌آل اصلی [۴] تولیدشده توسط a گویند که با Ra یا (a) نیز نشان داده می‌شود.

لم ۱-۱-۸. *حلقه R یک میدان است اگروفقط‌اگر دقیقاً دو ایده‌آل داشته باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید V مجموعه‌ای ناتهی باشد. دراین صورت رابطه $\leq$ را ترتیب جزئی روی V گویند هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(۱) بازتابی یعنی به‌ازای هر $u \in V$، $u \leq u$؛

(۲) تعدی یعنی به‌ازای هر $u, v, w \in V$ از $u \leq v$ و $v \leq w$ نتیجه شود $u \leq w$؛

(۳) پادتقارن یعنی به‌ازای هر $u, v \in V$ از $u \leq v$ و $v \leq u$ نتیجه شود $u = v$.

اگر $\leq$ یک ترتیب جزئی روی V باشد آن‌گاه $(V, \leq)$ را مجموعه‌ای جزئاًمرتب [۵] گویند.

تعریف ۱-۱-۱۰. مجموعه جزئاًمرتب $(V, \leq)$ را کلاًمرتب [۶] گویند هرگاه به‌ازای هر $u, v \in V$ حداقل یکی از روابط $u \leq v$ یا $v \leq u$ برقرار باشد.

---

[۱] field

[۲] idempotent

[۳] ideal

[۴] principal ideal

[۵] partially-orderd

[۶] totally-orderd

لم ۱-۱-۱۱ (لم زورن). *فرض کنید $(V, \leq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاً‌مرتب با این ویژگی باشد که هر زیرمجموعه ناتهی کلاً‌مرتب V کران بالایی در V داشته باشد. دراین صورت V حداقل یک عضو ماکسیمال دارد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۱۲. ایده‌آل $\mathfrak{m}$ از حلقه R را ماکسیمال [۱] گویند اگروفقط‌اگر:

(۱) $\mathfrak{m} \subset R$؛ و

(۲) ایده‌آلی مانند I از R وجود نداشته باشد به طوری‌که $\mathfrak{m} \subset I \subset R$.

نکته ۱-۱-۱۳. *مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R را با $Max(R)$ نشان می‌دهند.*

لم ۱-۱-۱۴. *فرض کنید I ایده‌آل سره حلقه R باشد. دراین صورت ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{m}$ از R وجود دارد به‌طوری که $I \subseteq \mathfrak{m}$.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۱۵. دو ایده‌آل I و J را نسبت به هم اول یا متباین [۲] گویند هرگاه، $I + J = R$.

لم ۱-۱-۱۶. *فرض کنید I و J دو ایده‌آل متباین حلقه R باشند. دراین صورت، $I \cap J = IJ$.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۱۷. فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ نگاشتی از حلقه R به حلقه S باشد. دراین صورت f را همریختی حلقه‌ای گویند هرگاه:

(۱) به‌ازای هر $a, b \in R$، $f(a+b) = f(a) + f(b)$؛

(۲) به‌ازای هر $a, b \in R$، $f(ab) = f(a)f(b)$؛

(۳) $f(1_R) = 1_S$.

اگر f یک همریختی حلقه‌ای باشد آن‌گاه:

$$Ker(f) = \{r \in R : f(r) = 0\}.$$

[۱] maximal

[۲] coprime

$$Im(f) = \{f(r) : r \in R\}.$$

f را یک‌به‌یک (پوشا) گویند هرگاه $Ker(f) = 0$ $(Im(f) = S)$.

هم‌چنین هر همریختی یک‌به‌یک و پوشا از حلقه‌ها را یکریختی حلقه‌ای گویند.

قضیه ۱-۱-۱۸ (قضیه باقیمانده چینی). *فرض کنید $I_1, I_2, \ldots, I_n$ که $n \geq 2$، ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. دراین صورت،*

(۱) *نگاشت f که به‌صورت زیر است:*

$$f : R \longrightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

$$f(r) = (r + I_1, \ldots, r + I_n) \qquad \forall r \in R.$$

یک همریختی حلقه‌ای است.

(۲) *f یک‌به‌یک است اگروفقط‌اگر $\cap_{i=1}^{n} I_i = 0$.*

(۳) *f پوشاست اگروفقط‌اگر $(I_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های دوبه‌دو متباین R باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۱۹. حلقه R را که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال دارد، حلقه موضعی [1] گویند.

تعریف ۱-۱-۲۰. حلقه ناصفر R را نیم‌موضعی [2] گویند هرگاه تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۲۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. دراین صورت رادیکال جیکبسون R [3] اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌شود و آن‌را با $Jac(R)$ نشان می‌دهند.

نکته ۱-۱-۲۲. *اگر R حلقه‌ای موضعی باشد آن‌گاه $Jac(R)$ ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد R است.*

لم ۱-۱-۲۳. *فرض کنید R یک حلقه باشد و $r \in R$. دراین صورت $r \in Jac(R)$ اگروفقط‌اگر به‌ازای هر $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارون‌پذیر R باشد.*

---

[1] local

[2] semi-local

[3] jacobson radical

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۱-۲۴. ایده‌آل سره $\mathfrak{p}$ از حلقه R را ایده‌آل اول [۱] گویند هرگاه به‌ازای هر $a, b \in R$ که $ab \in \mathfrak{p}$، آن‌گاه $a \in \mathfrak{p}$ یا $b \in \mathfrak{p}$.

نکته ۱-۱-۲۵. *مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهند.*

تعریف ۱-۱-۲۶. اگر I ایده‌آلی از حلقه R باشد آن‌گاه رادیکال [۲] I عبارتست از اشتراک ایده‌آل‌های اول شامل I. به‌راحتی بررسی می‌شود که رادیکال I به‌صورت زیر است:

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}.$$

تعریف ۱-۱-۲۷. فرض کنید I ایده‌آل سره حلقه R باشد. دراین صورت،

$$Var(I) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \mathfrak{p} \supseteq I\},$$

حداقل یک عضو مینیمال نسبت به رابطه شمول دارد. عضوهای مینیمال $Var(I)$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال I گویند. هم‌چنین مجموعه ایده‌آل‌های اول مینیمال I را با $Min(I)$ نشان می‌دهند.

لم ۱-۱-۲۸. *فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول حلقه R و $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. دراین صورت احکام زیر معادلند:*

(۱) *به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$*، $\mathfrak{p} \supseteq I_j$.

(۲) $\mathfrak{p} \supseteq \cap_{i=i}^{n} I_i$.

(۳) $\mathfrak{p} \supseteq \Pi_{i=1}^{n} I_i$.

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

نتیجه ۱-۱-۲۹. *فرض کنید $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد و $\mathfrak{p} = \cap_{i=1}^{n} I_i$. دراین صورت به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$*، $\mathfrak{p} = I_j$.

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

---

[۱] prime

[۲] radical

تعریف ۱-۱-۳۰. زیرمجموعه S از حلقه R را بسته ضربی [1] گویند هرگاه:

(۱) $1_R \in S$؛

(۲) اگر $s_1, s_2 \in S$، آن‌گاه $s_1 s_2 \in S$.

تعریف ۱-۱-۳۱. حلقه R را نوتری [2] گویند هرگاه در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند:

(۱) هرگاه $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد و چنان‌چه

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \cdots ,$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$.

(۲) هر مجموعه ناتهی از ایده‌آل‌های R دارای عضوی ماکسیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

تعریف ۱-۱-۳۲. حلقه R را آرتینی [3] گویند هرگاه در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند:

(۱) هرگاه $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد و چنان‌چه

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq I_{i+1} \supseteq \cdots ,$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$.

(۲) هر مجموعه ناتهی از ایده‌آل‌های R دارای عضوی مینیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

لم ۱-۱-۳۳. *فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی باشد. دراین صورت هر ایده‌آل اول R ماکسیمال می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

لم ۱-۱-۳۴. *فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی باشد. دراین صورت تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۱-۳۵. *هر حلقه جابه‌جایی آرتینی R، نوتری می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

---

[1] closed multiplicativity

[2] noetherian

[3] artinian

۱-۲ مدول

تعریف ۱-۲-۱. اگر $\circ \neq N \subseteq M$، آن‌گاه N را زیرمدول [۱] گویند هرگاه:

(۱) به‌ازای هر $a, b \in N$، $a + b \in N$؛

(۲) به‌ازای هر $r \in R$ و $a \in N$، $ra \in N$.

تعریف ۱-۲-۲. اگر M یک R-مدول ناصفر باشد آن‌گاه زیرمدول سره N از M را زیرمدول ماکسیمال گویند هرگاه به‌ازای هر زیرمدول K از M، که $N \subseteq K \subseteq M$، آن‌گاه $K = M$ یا $K = N$.

مجموعه زیرمدول‌های ماکسیمال M را با $Max(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۳. زیرمدول N از M را مینیمال [۲] گویند هرگاه $N \neq \circ$ و به‌ازای هر زیرمدول K از M که $\circ \subseteq K \subseteq N$، آن‌گاه $K = N$ یا $K = \circ$.

تعریف ۱-۲-۴. R-مدول ناصفر M را ساده [۳] گویند هرگاه به‌جز خودش و صفر، زیرمدول دیگری نداشته باشد.

لم ۱-۲-۵. *زیرمدول N از M مینیمال است اگروفقط‌اگر به عنوان یک مدول، ساده باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. دراین صورت،

$$Ann_R(M) = \{r \in R : \forall m \in M, rm = \circ\}.$$

$$Ann_R(m) = \{r \in R : rm = \circ\}.$$

$$Ann_R(M) = \cap_{m \in M} Ann_R(m).$$

تعریف ۱-۲-۷. R-مدول M را وفادار [۴] گویند هرگاه $Ann_R(M) = \circ$.

---

[۱] submodule

[۲] minimal

[۳] simple

[۴] faithful

تعریف ۱-۲-۸. R-مدول M را نیم‌ساده [۱] گویند هرگاه بتوان آن‌را به‌صورت حاصل‌جمعی از زیرمدول‌های مینیمالش نوشت.

تعریف ۱-۲-۹. حلقه R را نیم‌ساده گویند هرگاه به‌عنوان یک R-مدول، نیم‌ساده باشد.

قضیه ۱-۲-۱۰. *فرض کنید R حلقه‌ای نیم‌ساده باشد. دراین‌صورت R نوتری است.*

اثبات. به مرجع [۲۸] مراجعه شود. ■

لم ۱-۲-۱۱. *هر زیرمدول یک R-مدول نیم‌ساده، نیم‌ساده می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. ■

نکته ۱-۲-۱۲. *اگر M یک R-مدول نیم‌ساده باشد آن‌گاه هر زیرمدول N از M دارای یک مکمل N' است به‌قسمی‌که $M = N + N'$ و $N \cap N' = \circ$.*

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین صورت حاصل‌جمع تمام زیرمدول‌های مینیمال M را با $Soc_R(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۱۴. R-مدول M را هم‌نیم‌ساده [۲] گویند هرگاه هر زیرمدول M به‌صورت اشتراک زیرمدول‌های ماکسیمال M باشد.

تعریف ۱-۲-۱۵. زیرمدول سره P از M را اول گویند هرگاه به‌ازای هر $r \in R$ و $m \in M$، که $rm \in P$، آن‌گاه $m \in P$ یا $r \in (P :_R M)$.

گزاره ۱-۲-۱۶. *فرض کنید I ایده‌آل R و N زیرمدول M باشد. دراین صورت زیرمدول P از R-مدول M اول است اگروفقط‌اگر از $IN \subseteq P$* **نتیجه شود** *$I \subseteq (P :_R M)$ یا $N \subseteq P$.*

اثبات. به مرجع [۱۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۱۷. زیرمدول اول P از R-مدول M را زیرمدول اول مینیمال از زیرمدول N گویند هرگاه $N \subseteq P$ و هیچ زیرمدول اول از M شامل N مانند Q وجود نداشته باشد به‌طوری که $Q \subset P$.

---

[۱] semi-simple

[۲] cosemi-simple

گزاره ۱-۲-۱۸. *فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین صورت،*

(۱) *N زیرمدول اول مینیمال M است اگروفقط‌اگر ایده‌آل اول مینیمال P از $Ann_R(M)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $N = PM \neq M$.*

(۲) *هر زیرمدول اول M شامل یک زیرمدول اول مینیمال می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۱۹. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین صورت اگر $X = M$ و $I = rR$ که $r \in R$ آن‌گاه rRM را با rM نشان می‌دهند که زیرمدولی از M می باشد و برابر است با

$$rM = \{rx : x \in M\}$$

اگر $I = R$ آن‌گاه RX را زیرمدول تولید شده توسط X گویند و برابر است با

$$RX = \begin{cases} \Sigma_{k=1}^{n} r_k x_k : n \geq 1, r_k \in R, x_k \in X & , X \neq \emptyset \\ 0 & , X = \emptyset \end{cases}$$

زیرمجموعه X از R-مدول M را مجموعه‌ی مولد M گویند هرگاه $M = RX$. اگر M مجموعه مولد متناهی‌ای داشته باشد آن‌گاه M را متناهی‌مولد [۱] گویند و هرگاه M مجموعه مولد تک عضوی‌ای داشته باشد آن‌گاه M را دوری [۲] گویند.

لم ۱-۲-۲۰ (لم ناکایاما). *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد و I ایده‌آلی از R باشد و $I \subseteq Jac(R)$. دراین صورت اگر $M = IM$، آن‌گاه $M = 0$.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

لم ۱-۲-۲۱ (نتیجه لم ناکایاما). *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری که $I \subseteq Jac(R)$ و N زیرمدولی از M باشد و $N + IM = M$. دراین صورت $M = N$.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

گزاره ۱-۲-۲۲. *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد و I ایده‌آلی از حلقه R باشد به‌طوری که $M = IM$. دراین صورت $a \in I$ وجود دارد به‌طوری که*

[۱] finitely generated

[۲] cyclic

$$(1-a)M = 0.$$

اثبات. به مرجع [۱۷] مراجعه شود. ■

گزاره ۱-۲-۲۳. *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد باشد و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R که $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$ و I ایده‌آلی از R باشد به‌طوری که $IM \subseteq \mathfrak{p}M$. دراین صورت $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

اثبات. به مرجع [۱۱] مراجعه شود. ■

گزاره ۱-۲-۲۴. *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد به‌طوری که $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$. دراین صورت $(\mathfrak{p}M :_R M) = \mathfrak{p}$.*

اثبات. به مرجع [۱۱] مراجعه شود. ■

نکته ۱-۲-۲۵. *فرض کنید به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، I_λ مجموعه‌ای ناتهی از ایده‌آل‌های R و M یک R-مدول باشد. دراین صورت،*

$$(\Sigma_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)M = \Sigma_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M).$$

تعریف ۱-۲-۲۶. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. دراین صورت تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک همریختی R-مدولی [1] گویند هرگاه:

(۱) به‌ازای هر $m_1, m_2 \in M$، $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$؛

(۲) به‌ازای هر $m \in M$ و $r \in R$، $f(rm) = rf(m)$.

اگر f به ترتیب پوشا و یک‌به‌یک باشد آن‌گاه آن‌را به ترتیب بروریختی [2] و تکریختی [3] گویند. درصورتی که f یک‌به‌یک و پوشا باشد f را یک یکریختی R-مدولی [4] گویند.

تعریف ۱-۲-۲۷. دو R-مدول M و N را یکریخت گویند هرگاه یک یکریختی R-مدولی بین M و N وجود داشته باشد و $M \cong N$. درحالتی‌که $M = N$، f را یک درون‌ریختی [5] و اگر f یک یکریختی باشد و $M = N$،

---

[1] homomorphism

[2] epimorphism

[3] monomorphism

[4] isomorphism

[5] endomorphism

آن‌گاه f را یک خودریختی [1] گویند.

مجموعه همریختی‌های R-مدولی از M به N را با $Hom_R(M,N)$ نشان می‌دهند.

یک همریختی R-مدولی از M به N را نگاشت R-خطی گویند.

مجموعه درون‌ریختی‌های M را با $End_R(M)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱-۲-۲۸ (قضیه اول یکریختی)**.** *فرض کنید M و N دو R-مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی R-مدولی باشد. دراین صورت،*

$$M/Ker(f) \cong Im(f).$$

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۲-۲۹ (قضیه دوم یکریختی)**.** *فرض کنید M یک R-مدول و N و K زیرمدول‌هایی از M باشند. دراین صورت،*

$$K + N/K \cong N/N \cap K.$$

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۲-۳۰. *فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد و $f : M \longrightarrow M$ یک نگاشت R-خطی پوشا باشد. دراین صورت f یک‌به‌یک و یک خودریختی می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۳۱. فرض کنید R یک دامنه صحیح و M یک R-مدول باشد. دراین صورت،

(۱) عضو $m \in M$ را عضو تابی گویند هرگاه $Ann_R(m) \neq 0$. مجموعه تمام اعضای تابی M را با $T(M)$ نشان می‌دهند.

(۲) R-مدول M را بدون تاب [2] گویند هرگاه $T(M) = 0$.

(۳) اگر $T(M) = M$، آن‌گاه M را مدولی تابی گویند.

---

[1] automorphism

[2] torsion free

قضیه ۱-۲-۳۲. *فرض کنید M یک R-مدول و $S = End_R(M)$ یک دامنه باشد. دراین صورت $Ann_R(M)$ ایده‌آل اول R می‌باشد.*

اثبات. به مرجع [۸] مراجعه شود. ■

لم ۱-۲-۳۳. *فرض کنید M یک R-مدول باشد و N و K و L زیرمدول‌هایی از M و $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ و $(N_\theta)_{\theta\in\Theta}$ دو خانواده از زیرمدول‌های M باشند. دراین صورت،*

(۱) $(\cap_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda :_M N) = \cap_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda :_M N)$؛

(۲) $(L :_M \Sigma_{\theta\in\Theta} N_\theta) = \cap_{\theta\in\Theta}(L :_M N_\theta)$؛

(۳) $Ann_M(N+K) = Ann_M(N) \cap Ann_M(K)$.

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۳۴. فرض کنید M یک R-مدول و N زیرمدولی از M و I ایده‌آلی از R باشد. دراین صورت $(N :_M I)$ زیرمدولی از M می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(N :_M I) = \{m \in M : \forall r \in I : rm \in N\}.$$

اگر $N = 0$، آن‌گاه:

$$(0 :_M I) = \{m \in M : \forall r \in I : rm = 0\},$$

و آن‌را با $Ann_M(I)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۳۵. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین صورت $r \in R$ را مقسوم‌علیه صفر M گویند هرگاه $0 \neq m \in M$ای وجود داشته باشد به‌طوری که $rm = 0$.

مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر M را با $Z(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۲-۳۶. R-مدول M را نوتری گویند هرگاه در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند:

(۱) هرگاه $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد و چنان‌چه

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq \cdots ,$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $N_i = N_{k+i}$.

(۲) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضوی ماکسیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

تعریف ۱-۲-۳۷. R-مدول M را آرتینی گویند هرگاه در یکی از شرایط زیر که معادلند صدق کند:

(۱) هرگاه $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد و چنان‌چه

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_i \supseteq N_{i+1} \supseteq \cdots ,$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $N_k = N_{k+i}$.

(۲) هر زیرمجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عضوی مینیمال نسبت به رابطه شمول باشد.

قضیه ۱-۲-۳۸. *M یک R-مدول نوتری است اگروفقط‌اگر هر زیرمدول M متناهی‌مولد باشد.*

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۲-۳۹. *فرض کنید M یک R-مدول و N زیرمدولی از M باشد. دراین صورت،*

(۱) M نوتری است اگروفقط‌اگر M/N و N نوتری باشند.

(۲) M آرتینی است اگروفقط‌اگر M/N و N آرتینی باشند.

اثبات. به مرجع [۲۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۱-۲-۴۰. فرض کنید M یک R-مدول باشد. دراین صورت منظور از زنجیر اکید از زیرمدول‌های M، زنجیره‌ای متناهی و اکیداً صعودی به‌صورت،

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{n-1} \subset N_n,$$

از زیرمدول‌های M است به‌طوری که $N_0 = 0$ و $N_n = M$.

هر زنجیر اکید از زیرمدول‌های M به‌صورت،

$$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{n-1} \subset N_n = M,$$

را سری ترکیبی [۱] M گویند هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، M_i/M_{i-1} یک R-مدول ساده باشد.

[۱] composition series