دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تکمیلی پوشا در قاب‌های منظم فشرده با نگاشت‌های اسکلتی

استاد راهنما:
دکتر علی‌اکبر استاجی

استاد مشاور:
دکتر غلامرضا مقدسی

نگارش:
زینب نظری

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم

به همراهم، همسفرم، **همسرم**

به **مادرم** که قلبش رستاخیز همه خوبی‌هاست.

به برادرم **برزو** که همه زندگی علمی‌ام از اوست.

تشکر و قدردانی

... قسم به قلم و آنچه می‌نگارد.

حمد وثنا و سپاس و ستایش، ویژه رب رحمان و رحیم است. اینک که به فضل و لطف خداوند توفیق اتمام این پایان‌نامه نصیبم شده است، سزاوار است مراتب بندگی و عبودیت خویش را در پیشگاه ملکوتی خداوند اقرار نمایم. امید است که شکرانه‌ای بر لطف و رحمتش باشد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم صمیمانه‌ترین تشکرات قلبی خود را به استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکترعلی اکبر استاجی که همواره از محضر علم و اخلاق ایشان بهره‌مند شده‌ام و راهنمایی‌های ارزنده ایشان راهگشای من بوده است، ابراز دارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکترغلامرضا مقدسی که مشاوره این پایان‌نامه را به عهده داشته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و سرکار خانم دکتر مژگان محمودی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند و از راهنمایی‌های ارزنده ایشان بهره‌مند شده‌ام، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

فهرست مندرجات

نمادها و نشانه‌ها

مشبکه L

اجتماع .... $\cup$

اشتراک .... $\cap$

اتصال .... $\vee$

مقطع .... $\wedge$

تعلق .... $\in$

عدم تعلق .... $\notin$

زیرمجموعه .... $\subseteq$

مجموعه تهی .... $\emptyset$

زیرمجموعه سره .... $\subsetneq$

مجموعه‌ی عناصر فشرده L .... $\xi(L)$

مجموعه‌ی عناصر قطبی L .... PL

توپولوژی .... τ

فضای توپولوژیکی X .... (X,τ)

بستار A در X .... $cl_X A$

درون A در X .... $int_X A$

خانواده تمام زیرمجموعه‌های باز منظم فضای X .... $\mathcal{RD}(X)$

قابی از مجموعه‌های باز .... $\mathcal{D}(X)$

رسته تمام قاب ها .... Frm

رسته قاب های بولی .... $BFrm$

رسته قاب های منظم	Reg
رسته قاب های منظم فشرده با نگاشت های اسکلتی	$sRegC$
رسته قاب های قویاً تصویرپذیر	$C\beta RegC$
رسته فضاهای هاسدورف فشرده با نگاشت های اسکلتی	sT_2C
مجموعه تمتم اشیاء کامل رسته B	$E(B)$
مجموعه تمام ایده‌آل‌های مشبّکه‌ی L	$Idl(L)$
ایده‌آل تولید شده توسط X	$< X >$
مجموعه تهی	$\emptyset$
ایده‌آل تولید شده توسط $\{x\}$	$\downarrow x$

مقدمه

در سال‌های اخیر، موضوع قاب‌ها که به آن توپولوژی بی‌نقطه نیز می‌گویند، در بسیاری از مباحث ریاضیات نفوذ عمیقی کرده و نظر نویسندگان و پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است.

موضوع توپولوژی بی‌نقطه، مطالعه فضای توپولوژیکی X به قسمی می‌باشد که مجموعه‌های باز فضای توپولوژیکی X به جای نقاط (عضوهای X) در نظر گرفته شوند.

این تحقیق برخاسته از تلاشی برای تعمیم نظریه‌های مربوط به توسیع‌های اساسی گروه‌های مشبکه‌ای مرتب [۱] است. جورج مارتینز و اریک زینک تکمیلی پوشا را در قاب‌های ارشمیدسی نرمال منسجم نیز در مرجع [۱۷] بررسی کرده‌اند. ابزاری که در این پایان‌نامه به کار رفته است از مرجع [۱۸] سرچشمه می‌گیرد. این نوشتار مشتمل بر سه فصل است. در بخش اول از فصل اول مفاهیم اولیه مورد نیاز از نظریه رسته‌ها را بیان می‌کنیم که از مرجع [۹] استفاده شده است. در دو بخش بعدی مفاهیم لازم از نظریه مشبکه‌ها را به اختصار بیان می‌کنیم و سپس قاب‌ها را معرفی کرده و ویژگی‌های آنها را بیان می‌کنیم که بر اساس منابع [۱۷] و [۱۴] نوشته جورج مارتینز و اریک زینک است.

در بخش اول از فصل دوم نگاشت‌های اسکلتی با توجه به منبع [۸] بررسی می‌شود. در بخش دوم قاب‌های ارشمیدسی را به طور مختصر بر اساس مراجع [۱۳] و [۱۷] مورد بحث قرار داده‌ایم. در بخش سوم مروری بر ویژگی‌های قاب ایده‌آل‌ها می‌شود که در فصل آخر کاربرد اساسی دارد. و در ادامه مطلق یک قاب منظم فشرده را بیان می‌کنیم که یک قاب ایده‌آل است.

در نهایت فصل سوم که مهم‌ترین فصل این پایان‌نامه است، شامل دو بخش است. در بخش اول مونوانعکاس ε در زیر رسته $C\beta RegC$ بررسی می‌شود و در بخش دوم بزرگ‌ترین زیر قاب منظم

[۱] lattice-ordered

یک قاب را معرفی می‌کنیم و همچنین به بیان فشرده سازی استون چک یک قاب منظم می‌پردازیم و در آخر نشان می‌دهیم که تابعگون ε یک تکمیلی پوشا در رسته $sRegC$ است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه نظریه قاب‌ها

این فصل دربرگیرنده تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز است که در سه بخش می آوریم. بخش اول شامل پیش زمینه‌هایی از نظریه رسته‌ها می‌باشد که در این نوشتار مورد استفاده است. در بخش دوم تعاریف و قضایایی از نظریه مشبکه‌ها را بیان می‌کنیم و در بخش سوم به بیان مفاهیم کلی، تعاریف، نکات و قضایایی در مورد قاب‌ها می‌پردازیم که این مفاهیم در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ رسته‌ها

در این بخش به طور مختصر با برخی مفاهیم اولیه در نظریه رسته‌ها آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۱.۱ : هر رسته رده‌ای است مانند A از اشیاء (که با C و B و A و... نمایش داده می‌شوند.) با این ویژگی که:

۱) به ازای هر دو شیء مثل B و C مجموعه‌ای متناظر شود که با $Mor_A(B,C)$ نشان می‌دهیم و هر عضو آن را ریخت می‌نامیم. بعلاوه دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شیء E و D و C

و B که $(B,C) \neq (D,E)$، $Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \cap Mor_{\mathcal{A}}(D,E) = \emptyset$.

۲) به ازای هر سه شیء D و C و B تابع

$$f : Mor_{\mathcal{A}}(C,D) \times Mor_{\mathcal{A}}(B,C) \longrightarrow Mor_{\mathcal{A}}(B,D)$$

$$(g,f) \longmapsto gf$$

موجود است که

۱) به ازای اشیاء E و D و C و B، اگر $f \in Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$ و $g \in Mor_{\mathcal{A}}(C,D)$ و همچنین $h \in Mor_{\mathcal{A}}(D,E)$، آن‌گاه

$$h(gf) = (hg)f$$

۲) به ازای هر شیء مثل B عضوی از $Mor_{\mathcal{A}}(B,B)$ مثل 1_B موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(B,C)$ مانند f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{A}}(C,B)$ مانند g،

$$f1_B = f \qquad \text{و} \qquad 1_B g = g$$

همه اشیاء رسته $\mathcal{A}$ را با $ob(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ : در رسته $\mathcal{A}$ ریخت $f : B \longrightarrow C$ را یک یکریختی یا تعادل یا هم‌ارزی می‌نامیم، اگر ریختی مانند $g : C \longrightarrow B$ موجود باشد به طوری که $gf = 1_B$ و $fg = 1_C$.
اگر $f : B \longrightarrow C$ یک تعادل باشد، گوییم C و B یکریخت یا معادل یا هم‌ارزند.

تعریف ۳.۱.۱ : تابعگون F از رسته $\mathcal{A}$ به رسته $\mathcal{B}$ تابعی است که به هر شیء C از $\mathcal{A}$ شیء $F(C)$ از $\mathcal{B}$ وبه ریخت $f : C \longrightarrow C'$ در $\mathcal{A}$ ریخت یکتای $F(f) : F(C) \longrightarrow F(C')$ در $\mathcal{B}$ را نسبت دهد و بعلاوه شرایط زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $F(id_C) = id_{F(C)}$ برای هر $C \in \mathcal{A}$، یعنی؛ F حافظ همانی باشد.

۲) $F(f_1f_2)=F(f_1)F(f_2)$ به ازای $f_1 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_1,A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_2,A_3)$. یعنی؛ F حافظ ترکیب باشد.

(۳) $F(f_2f_1)=F(f_1)F(f_2)$ برای $f_1 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_1,A_2)$ و $f_2 \in Mor_{\mathcal{A}}(A_2,A_3)$. یعنی؛ F ترکیب را معکوس کند.

اگر F در شرایط (۱) و (۲) صدق کند، تابعگون همورد نامیده می‌شود. و اگر در شرایط (۱) و (۳) صدق کند، تابعگون پادورد نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ : برای شیء B در رسته $\mathcal{A}$ ریخت $id_B : B \longrightarrow B$ را $\mathcal{A}-$ همانی روی B می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ : رسته $\mathcal{A}$ زیر رسته $\mathcal{B}$ است، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $ob(\mathcal{A}) \subseteq ob(\mathcal{B})$

۲) برای هر $B' \in ob(\mathcal{A})$ و B، $hom_{\mathcal{A}}(B,B') \subseteq hom_{\mathcal{B}}(B,B')$.

۳) برای هر $A' \in ob(\mathcal{A})$، $\mathcal{B}-$ همانی روی A' یک $\mathcal{A}-$ همانی روی A' باشد.

۴) قانون ترکیب در $\mathcal{A}$ تحدید قانون ترکیب در $\mathcal{B}$ به ریخت‌های $\mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱ : رسته $\mathcal{A}$ را زیر رسته کامل از رسته $\mathcal{B}$ نامیم، اگر زیر رسته $\mathcal{B}$ باشد و برای هر $B \in ob(\mathcal{A})$ و A،

$$hom_{\mathcal{A}}(A,B)=hom_{\mathcal{B}}(A,B)$$

تعریف ۷.۱.۱ : یک ریخت $f : A \longrightarrow B$ رایک مونومورفیسم گوئیم، هرگاه برای هر جفت $k : C \longrightarrow A$ و h از ریخت‌ها که $foh=fok$، نتیجه شود $h=k$.

تعریف ۸.۱.۱ : یک تابعگون $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک هم‌ارزی رسته‌هاست، اگر تابعگون $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ چنان وجود داشته باشد که

$$F.G = 1_{\mathcal{B}} \quad \text{و} \quad G.F = 1_{\mathcal{A}}$$

تعریف ۹.۱.۱ : یک ریخت $f : A \longrightarrow B$ رایک اپیمورفیسم گوئیم، هرگاه برای هر جفت $k : B \longrightarrow C$ و h از ریخت‌ها که $hof = kof$، نتیجه شود $h = k$.

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسته بوده و $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ و $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ تابعگون‌هایی همورد باشند. تبدیل طبیعی $\alpha : S \to T$ تابعی است که به هر شیء C از $\mathcal{A}$، ریخت $\alpha_c : S(C) \to T(C)$ از $\mathcal{B}$ را چنان نسبت می‌دهد که به ازای هر ریخت $f : C \to C'$ از $\mathcal{A}$، نمودار

$$\begin{tikzcd}
S(C) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(C) \arrow[d, "T(f)"] \\
S(C') \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & T(C')
\end{tikzcd}$$

جابجا شود. هرگاه α_c به ازای هر C در $\mathcal{A}$ یک تعادل باشد، آن‌گاه α_c یک یکریختی طبیعی (یا تعادل طبیعی) از تابعگون‌های S و T می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ : فرض کنیم $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ و $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ تابعگون‌های همورد باشند. گوییم S یک الحاق چپ T است (یا T یک الحاق راست S است) اگر یک یکریختی طبیعی از تابعگون $hom_{\mathcal{B}}(S(-), -)$ به تابعگون $hom_{\mathcal{B}}(-, T(-))$ موجود باشد. لذا اگر S یک الحاق چپ T باشد، به ازای هر C از $\mathcal{A}$ و D از $\mathcal{B}$ یک یکریختی مانند

$$\alpha_{C,D} : hom_{\mathcal{B}}(S(C), D) \longrightarrow hom_{\mathcal{A}}(C, T(D))$$

وجود دارد که نسبت به D و C طبیعی است.

۲.۱ مشبکه‌ها

در این بخش به اختصار به مطالعه تعاریف اولیه و بیا ن نتایجی از مجموعه‌های مرتب جزئی، مشبکه‌ها و مشبکه‌های توزیع‌پذیر می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ : یک ترتیب جزئی روی مجموعه P، یک رابطه دوتایی $(\leq)$ روی P است، یعنی؛ یک زیرمجموعه از $P \times P$ است که دارای خواص زیر است :

۱) خاصیت انعکاسی: اگر $a \in P$، آن‌گاه $a \leq a$.

۲) خاصیت پاد متقارنی: اگر aو $b \in P$، $a \leq b$ و $b \leq a$، آن‌گاه $a = b$.

۳) خاصیت تعدی: اگر a، b و $c \in P$ و $a \leq b$ و $b \leq c$، آن‌گاه $a \leq c$.

زوج $(P, \leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامیم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار می‌گوییم P یک مجموعه مرتب جزئی است.

فرض کنیم که P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. دو عضو c و $d \in P$ را مقایسه‌پذیر گوییم، در صورتی که $c \leq d$ یا $d \leq c$. یک مجموعه مرتب جزئی که هر دو عضو آن مقایسه‌پذیر باشند را زنجیر می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ : فرض می‌کنیم P یک مجموعه مرتب جزئی باشد و $X \subseteq P$. عضو $a \in P$ را اینفیمم یا بزرگترین کران پایین از X گوییم، اگر

۱) a یک کران پایین برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $a \leq x$.

۲) برای هر کران پایین b از X داشته باشیم، $b \leq a$.

علاوه بر این، اینفیمم X در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigwedge X$ نشان داده می‌شود.

به طور مشابه، عضو $a \in P$ را سوپریمم یا کوچکترین کران بالا برای X گوییم، هرگاه

۱) a یک کران بالا برای X باشد، یعنی؛ برای هر $x \in X$، $x \leq a$.

۲) برای هر کران بالای b از X داشته باشیم، $a \leq b$.

علاوه بر این، سوپریمم X در صورت وجود یکتا می‌باشد و با $\bigvee X$ نشان داده می‌شود.

اگر X یک مجموعه مرتب جزئی باشد، واضح است که به انتفای مقدم هر عضو X کران بالایی برای $\emptyset$ است. بنابراین در صورت وجود کوچکترین عضو در X، برابر با $\bigvee \emptyset$ است و به طور کلی $\bigvee \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای کوچکترین عضو باشد. ما $\bigvee \emptyset$ را در صورت وجود، صفر می‌نامیم و با ۰ نشان می‌دهیم.

به طور مشابه، $\bigwedge \emptyset$ وجود دارد اگر و تنها اگر P دارای بزرگترین عضو باشد. عضو $\bigwedge \emptyset$ را در صورت وجود، همانی(یکه) می‌نامیم و با ۱ نشان می‌دهیم.

در این نوشتار فرض می‌کنیم که‌هر مجموعه جزئی مرتب P، دارای بزرگترین و کوچکترین عضو باشد، به عبارت دیگر $1 \in P$ و ۰.

تعریف **۳.۲.۱** : مجموعه مرتب جزئی L را یک مشبکه گوییم، در صورتی که برای هر $b \in L$ و a، $\bigvee\{a, b\} = a \vee b$ و $\bigwedge\{a, b\} = a \wedge b$ در L وجود داشته باشند و آن را با $(L, \leq, \vee, \wedge)$ نشان می‌دهیم و چنانچه ابهامی پیش نیاید به اختصار L را مشبکه می‌نامیم.

قضیه **۴.۲.۱** : مشبکه $(L, \leq, \vee, \wedge)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $c \in L$ و b و a، گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند

۱) $a \leq b$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \wedge b = a$.

۲) خودتوانی: $a = a \wedge a = a \vee a$.

۳) شرکت پذیری: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ و $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

۴) قانون جذب: $a \vee (a \wedge b) = a$ و $a \wedge (a \vee b) = a$.

برهان: با توجه به تعریف بدیهی است.

■

لم ۵.۲.۱ : فرض می‌کنیم که L مشبکه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

۱) به ازای هر $z \in L$ و y و x، $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

۲) به ازای هر $z \in L$ و y و x، $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

۳) به ازای هر $z \in L$ و y و x، $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$.

برهان ۲ ⇐ ۱) فرض می‌کنیم $c \in L$ و b و a. در این صورت با استفاده از (۱)، اگر قرار دهیم $x = a \vee b$، $y = a$ و $z = c$، آن‌گاه

$$\begin{array}{rcl} (a \vee b) \wedge (a \vee c) & = & ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ & = & a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ & = & (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ & = & a \vee (b \wedge c) \end{array}$$

بنابراین (۲) بر قرار است.

۱ ⇐ ۲) مشابه حالت قبل بر قرار است.

۳ ⇐ ۲) با توجه به این که $z \leq x \vee z$،

$$\begin{array}{rcl} (x \vee y) \wedge z & \leq & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ & = & x \vee (y \wedge z) \end{array}$$

۲ ⇐ ۳) اگر قرار دهیم $x = a$، $y = b$ و $z = a \vee c$، آن‌گاه

$$\begin{array}{rcl} (a \vee b) \wedge (a \vee c) & \leq & a \vee (b \wedge (a \vee c)) \\ & = & a \vee ((a \vee c) \wedge b) \end{array}$$

حال قرار می‌دهیم $x = a$، $y = c$ و $z = b$. دراین صورت، $(a \vee c) \wedge b \leq a \vee (c \wedge b)$. **با ترکیب این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که**

$$\begin{aligned} a \vee ((a \vee c) \wedge b) &\leq a \vee (a \vee (c \wedge b)) \\ &= a \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

از طرفی، می‌دانیم $b \wedge c \leq c$ **و** $b \wedge c \leq b$. **بنابراین**

$$a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b \quad \text{و} \quad a \vee (b \wedge c) \leq a \vee c$$

درنتیجه

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

پس تساوی مورد نظر برقرار است.

■

اگر در مشبکه‌ای یکی از گزاره‌های فوق برقرار باشند، آن‌گاه آن را مشبکه‌ای توزیع‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱ : مشبکه L را متمم‌دار گوییم، اگر برای هر $x \in L$، x دارای متمم باشد، یعنی؛ $y \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $x \wedge y = ۰$ و $x \vee y = ۱$. یک مشبکه توزیع‌پذیر و متمم‌دار را جبر بول می‌گوییم. توجه می‌کنیم که هر عضو x از یک جبر بول دارای متمم یکتا است و آن را با x' نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۲.۱ : اگر B یک جبر بول باشد، آن‌گاه برای $z \in B$ و y و x داریم:

۱) (قانون دمورگان) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ و $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

۲) $x' \geq y'$ اگر وتنها اگر $x \leq y$.

۳) $x \leq z \vee y'$ اگر وتنها اگر $x \wedge y \leq z$.

۴) $x \geq z \wedge y'$ اگر وتنها اگر $x \vee y \geq z$.

برهان ۱) بنا بر توزیع‌پذیری B،

$$\begin{array}{rcl}(x \wedge y) \vee (x' \vee y') & = & ((x \vee x') \vee y') \wedge ((y \vee x') \vee y') \\ & = & ۱ \wedge ۱ \\ & = & ۱\end{array}$$

و همچنین داریم

$$\begin{array}{rcl}(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') & = & ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y') \\ & = & ۰ \wedge ۰ \\ & = & ۰\end{array}$$

لذا بنابر منحصر به فردی متمم یک عضو، نتیجه می‌شود که $(x' \vee y')$ متمم $(x \wedge y)$ است. قانون دیگر به طور مشابه اثبات می‌شود.

۲) داریم

بنا بر قانون دمورگان ،

$$\begin{array}{rcl}x \leq y & \Leftrightarrow & x \wedge y = x \\ & \Leftrightarrow & x' \vee y' = x' \\ & \Leftrightarrow & y' \leq x'\end{array}$$

۳) اگر $x \wedge y \leq z$، آن‌گاه

بنا بر قسمت دوم لم ۵.۲.۱،

$$\begin{array}{rcl}z \vee y' & \geq & (x \wedge y) \vee y' \\ & = & (x \vee y') \wedge (y \vee y') \\ & = & x \vee y' \geq x\end{array}$$

و اگر $x \leq z \vee y'$، آن‌گاه

بنا بر قسمت اول لم ۱. ۵.۲،

$$\begin{array}{rcl}x \wedge y & \leq & (z \vee y') \wedge y \\ & = & (z \wedge y) \vee (y' \wedge y) \\ & = & z \wedge y \\ & \leq & z\end{array}$$

۴) برهان این قسمت دوگان قسمت (۲) است.

■

مثال **۸.۲.۱** : برای مجموعه X، مجموعه توانی $\mathcal{P}(X)$ به همراه رابطه شمول، جبر بول است به طوری که $\vee$ و $\wedge$، به‌صورت اشتراک و اجتماع و ۰ و ۱ برابر با مجموعه تهی و X می‌باشند.

تعریف ۹.۲.۱ : زیرمجموعه S از مشبکه L را زیرمشبکه‌ای از L گوییم، اگر تحت اینفیمم و سوپریمم متناهی بسته باشد. به عبارت دیگر، برای هر x، $y \in S$ و $x \vee y \in S$ و $x \wedge y$.

تعریف ۱۰.۲.۱ : فرض کنیم P و Q مجموعه‌هایی مرتب جزئی باشند. تابع

$$f : P \longrightarrow Q$$

را حافظ ترتیب گوییم، هرگاه برای هر a و $b \in P$، $a \leq b$ نتیجه دهد $f(a) \leq f(b)$.

تعریف ۱۱.۲.۱ : مشبکه‌های $L_۱$ و $L_۲$ را در نظر می‌گیریم. تابع $f : L_۱ \longrightarrow L_۲$ را همریختی مشبکه‌ای گوییم، هرگاه

۱) $f(\circ) = \circ$ و $f(۱) = ۱$.

۲) برای هر x و $y \in L$، $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ و $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

یک همریختی مشبکه‌ای دوسویی را یکریختی می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۲.۱ : مشبکه L را کامل گوییم، اگر برای هر $X \subseteq L$، $\bigvee X$ و $\bigwedge X$ در L وجود داشته باشند.

قضیه ۱۳.۲.۱ : فرض کنیم که L یک مشبکه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند

۱) برای هر $X \subseteq L$، $\bigvee X \in L$ وجود دارد.

۲) برای هر $X \subseteq L$، $\bigwedge X \in L$ وجود دارد.

برهان ۲ $\Rightarrow$ ۱) برای $X \subseteq L$، فرض کنیم $\bigwedge X$ وجود داشته باشد. همچنین فرض کنیم K مجموعه‌ای از تمام کران‌های بالای X باشد. با توجه‌به فرض، $\bigwedge K$ وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$a = \bigwedge K$$

اگر $x \in X$، **آن‌گاه برای هر** $k \in K$، $x \le k$. **بنابراین** $x \le a$ **و** $a \in K$. **پس** a **کوچکترین عضو** K **است، یعنی؛** $a = \bigvee X$.

۱ ⇐ ۲) مشابه برهان (۲ ⇐ ۱) است.

■

تعریف **۱۴.۲.۱** : عضو $p \in L$ را قطبی [1] گوییم، هرگاه $y \in L$ به قسمی وجود داشته باشد که $p = y^{\perp}$. که اینجا $y^{\perp} = \bigvee\{x \in L : x \wedge y = 0\}$. مجموعه تمام عضوهای قطبی L را با PL نشان می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که $0^{\perp} = 1$ و $1^{\perp} = 0$.

قضیه **۱۵.۲.۱** : فرض می‌کنیم L یک مشبکه توزیع‌پذیر باشد. برای هر a و $b \in L$ گزاره‌های زیر برقرار می‌باشند

۱) اگر a و $a^{\perp\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a \le a^{\perp\perp}$.

۲) اگر $a^{\perp}$ و $b^{\perp}$ در L وجود داشته باشند و $a \le b$، آن‌گاه $b^{\perp} \le a^{\perp}$.

۳) اگر $a^{\perp}$، $a^{\perp\perp}$ و $a^{\perp\perp\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a^{\perp} = a^{\perp\perp\perp}$.

۴) اگر $a^{\perp}$، $b^{\perp}$ و $(a \vee b)^{\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $(a \vee b)^{\perp} = a^{\perp} \wedge b^{\perp}$.

۵) اگر $a^{\perp}$، $b^{\perp}$ و $(a \wedge b)^{\perp}$ در L وجود داشته باشند، آن‌گاه $a^{\perp} \vee b^{\perp} \le (a \wedge b)^{\perp}$.

برهان ۱) می‌دانیم $a^{\perp\perp}$ برابر با بزرگترین عضو از مجموعه $\mathcal{A} = \{x \in L : x \wedge a^{\perp} = 0\}$ می‌باشد. حال با توجه به این که $a \wedge a^{\perp} = 0$، پس $a \in \mathcal{A}$. از این رو $a \le a^{\perp\perp}$.

[1] polar