دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

بررسی برخی از خواص فضای نرم‌دار مخروطی

نگارش:

لیلا محمدی

استاد راهنما:

دکتر صدیقه جاهدی

استاد مشاور:

دکتر محمود حاجی شعبانی

شهریور ماه ۱۳۹۲

تقدیم به خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را و عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید.

پدر و مادر عزیزتر از جانم

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب" من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" : ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد راهنمای ارجمندم خانم دکتر صدیقه جاهدی که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای بی دریغش در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشت، کمال تشکر را دارم. از استاد مشاور ارجمند جناب آقای دکتر محمود حاجی شعبانی که در طول این تحقیق با رهنمودها و تشویق های خود مرا مورد لطف خویش قرار دادند، صمیمانه سپاسگزارم. و در نهایت از تمامی اساتید گروه ریاضی، دوستان و هم کلاسی‌های عزیزم که در طول این مدت افتخار آشنایی و مصاحبت با آنها را داشتم، به پاس محبت‌های بی‌دریغشان سپاسگزارم.

چکیده

بررسی برخی از خواص فضای نرم‌دار مخروطی

نگارش:
لیلا محمدی

در این پایان نامه ضمن معرفی فضای نرم‌دار مخروطی، به بررسی برخی خواص توپولوژیکی و هندسی این فضا پرداخته شده است. در فصل اول، کلیات و معرفی متر مخروطی d_c روی فضای برداری یکپارچه و تعاریفی که در ادامه کار به آنها نیاز است آورده شده است. در این فصل نشان داده شده است که یک فضای برداری E مجهز به یک ترتیب $\preccurlyeq$، یکپارچه است اگر وتنها اگر به یک ترتیب برداری اکید $\prec$ مجهز باشد. در فصل دوم نرم مخروطی $\|\cdot\|_c$ معرفی گردیده و خواص توپولوژیکی فضای نرم‌دارمخروطی همراه با قضیه‌ای مبنی بر تتمیم یک فضای نرمدار مخروطی آورده شده است. هم‌چنین تام بودن فضاهای نرم‌دار مخروطی با بعد متناهی ثابت گردیده است. مسأله تعامد و موضوع بهترین تقریب در این فضا در فصل سوم و قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی و فضاهای نرم‌دار مخروطی در فصل چهارم مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

فهرست مطالب

فصل ۱

کلیات فضای متریک مخروطی

۱–۱ مقدمه

در سال ۱۹۰۵ ریاضیدان مشهور فرانسوی موریس فرشه [۱] [۱۲، ۱۳] مفهومی از فضای متریک را معرفی کرد. در سال ۱۹۳۴ دانشجوی دکترا دورو کورپا [۲] [۲۱] فضاهای متریک محض بیشتری را معرفی کرد، که در آن متر دارای مقدار در فضای برداری مرتب است. در متون معمولاً فضاهای متریک با متر برداری مقدار با عناوین مختلفی نظیر فضاهای شبه متریک، فضاهای K– متریک، فضاهای متریک توسعه یافته، فضاهای متریک برداری–مقدار، فضاهای متریک مخروطی–مقدار و فضاهای متریک مخروطی شناخته می‌شوند. فضاهای متریک مخروطی کاربردهای زیادی در آنالیز عددی و نظریه نقطه ثابت دارند؛ برخی از خواص فضای متریک مخروطی را کولاتز [۳] [۸] و زبرجکو [۴] [۳۹] بیان کردند. شرودر [۵] [۳۵، ۳۶] اولین شخصی بود که به نقش مهم فضاهای متریک مخروطی در آنالیز عددی پی برد. در سال ۲۰۰۷ مؤلفین زیادی فضاهای متریک مخروطی روی فضای باناخ یکپارچه و قضیه نقطه ثابت روی فضاهای مشابه را مورد مطالعه قرار دادند [۱۵، ۳۱، ۳۸].

---

[۱] Maurice frechet

[۲] Duro Kurepa

[۳] Collatz

[۴] Zabrejko

[۵] Schroder

۱–۲ فضای برداری همراه با همگرایی

در این بخش تعاریف ساده‌ای برای فضای برداری همراه با همگرایی معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱: فرض کنید E فضای برداری حقیقی و S مجموعه‌ای از همه دنباله‌های نامتناهی در E باشد. یک رابطه دوتایی $\longrightarrow$ میان S و E روی E همگرایی نامیده می‌شود، هرگاه اصل‌های زیر برقرار باشند:

$(c۱)$ اگر $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$، آنگاه $(x_n + y_n) \longrightarrow (x+y)$؛

$(c۲)$ اگر $x_n \longrightarrow x$ و $\lambda \in R$، آنگاه $\lambda x_n \longrightarrow \lambda x$؛

$(c۳)$ اگر $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ و $x \in E$، آنگاه $\lambda_n x \longrightarrow \lambda x$؛

جفت $(E, \longrightarrow)$ فضای برداری همراه با همگرایی نامیده می‌شود. اگر $x_n \longrightarrow x$، آنگاه دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله همگرا در E و بردار x حد دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نامیده می‌شود.

دو خاصیت زیر از همگرایی در فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ بلافاصله از اصل‌های بالا بدست می‌آید:

$(c۴)$ اگر به ازای هر $n \in N$، $x_n = x$ قرار دهیم، آنگاه $x_n \longrightarrow x$؛

$(c۵)$ همگرایی و حدود یک دنباله مستقل از تغییر تعداد متناهی از جمله‌های یک دنباله است.

فرض کنید دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E همگرا به x و دنباله $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از تغییر n جمله اول دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بدست آمده باشد.

$$\{z_n\} = \{y_n - x_n\} = \{y_۱ - x_۱, y_۲ - x_۲, ..., y_n - x_n, ۰, ۰, ...\},$$

بنابراین دنباله $\{z_n\}$ به صفر همگرا است. از آنجا که $y_n = z_n + x_n$، بنابر $(c۱)$، دنباله $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به x همگرا است. پس خاصیت $(c۵)$ برقرار است.

تعریف ۲.۱: فرض کنید $(E, \longrightarrow)$ یک فضای برداری همراه با همگرایی باشد:

(۱) مجموعه $A \subseteq E$ باز(دنباله‌ای) نامیده می‌شود، هرگاه $x_n \to x$ و $x \in A$ نتیجه دهد که برای همه بجز تعداد متناهی $n \in N$، $x_n \in A$.

(۲) مجموعه $A \subseteq E$ بسته(دنباله‌ای) نامیده می‌شود، هرگاه $x_n \to x$ و به ازای هر n، $x_n \in A$ نتیجه دهدکه $x \in A$.

لم ۳.۱: فرض کنید $(E, \longrightarrow)$ یک فضای برداری همراه با همگرایی باشد. اگر $A \subseteq E$ باز باشد، آنگاه $E - A \subseteq E$ بسته است. عکس آن به شرطی درست است که هر زیر دنباله از یک دنباله همگرا در Eبه همان حد همگرا باشد.

اثبات: نشان می‌دهیم $E - A$ بسته است. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $E - A$ به $x \in E$ همگرا باشد. پس به ازای هر n، $x_n \notin A$. از آنجا که A باز است و $x \notin A$. در نتیجه $x \in E - A$ ، یعنی $E - A$ بسته است.

بر عکس: نشان می‌دهیم A باز است. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به $x \in A$ همگرا و $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ زیر دنباله‌ای از دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به x همگرا است. از آنجا که $E - A$ بسته است و $x \notin E - A$، بنابراین $x_{n_k} \notin E - A$؛ زیرا در غیر این صورت بنا به تعریف، $x \in E - A$ خواهد بود. لذا به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in A$. یعنی A باز است. $\square$

لم ۴.۱: فرض کنید $(E, \longrightarrow)$ یک فضای برداری همراه با همگرایی باشد. در این صورت مجموعه‌های باز E در شرط‌های زیر صدق می‌کنند:

(۱) E و $\emptyset$ باز هستند.

(۲) اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است.

(۳) اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

اثبات: (۱) با توجه به اینکه E فضای اصلی است، بوضوح E باز می‌باشد. حال نشان می‌دهیم $\emptyset$ باز است. بنا به اصل انتفای مقدم $\emptyset$ باز است.

(۲) نشان می‌دهیم اگر به ازای هر $i \in N$، A_i باز باشد، آنگاه $\bigcup_i A_i$ باز است. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به $x \in \bigcup_i A_i$ همگرا باشد. پس به ازای $i \in N$، $x \in A_i$. چون A_i باز است پس به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in A_i$. در نتیجه به ازای همه بجز تعدادمتناهی n، $x_n \in \bigcup_i A_i$، به عبارت دیگر $\bigcup A_i$ باز است.

(۳) نشان می‌دهیم اگر به ازای هر $i \in \{1, 2, ..., n\}$، A_i باز باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ باز است. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ همگرا باشد. پس به ازای هر $i \in \{1, 2, ..., n\}$ وبه ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in A_i$. بنابراین به ازای همه بجز تعدادمتناهی n، $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. لذا $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ باز است. $\square$

لم ۵.۱: فرض کنید $(E, \longrightarrow)$ یک فضای برداری همراه با همگرایی باشد. اگر U و V زیر مجموعه‌هایی ناتهی از E باشند، آنگاه در شرایط زیر صدق می کنند:

(۱) اگر U باز و عدد $\lambda > 0$، آنگاه λU باز است.

(۲) اگر U یا V باز باشد، آنگاه $U + V$ باز است.

اثبات: (۱) نشان می‌دهیم اگر U باز باشد، آنگاه به ازای هر $\lambda > 0$، λU باز است. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به $x \in \lambda U$ همگرا باشد، $a \in U$ وجود دارد به طوری‌که $x = \lambda a$. چون $x_n \longrightarrow x$ و $\frac{1}{\lambda} > 0$، پس دنباله $\{a_n = \frac{1}{\lambda} x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به a همگرا است. از آنجا که $a \in U$ و U باز است بنابراین به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $a_n \in U$ و در نتیجه $\lambda a_n \in \lambda U$. پس به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in \lambda U$. به عبارت دیگر λU باز است.

(۲) نشان می‌دهیم اگر $V \subseteq E$ باز باشد، آنگاه $U + V$ باز است. فرض کنیم $U \subseteq E$ دلخواه و $V \subseteq E$ باز باشد، دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به $x \in U + V$ همگرا باشد، عناصر $u \in U$ و $v \in V$ وجود دارند به طوری‌که $x = u + v$. چون $x_n \longrightarrow x$ و $u \longrightarrow u$؛ پس دنباله $\{b_n = x_n - u\}_{n=1}^{\infty}$ به $x - u$ همگرا است؛ از طرفی $x - u = v \in V$ و V باز باشد. بنابراین به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $b_n \in V$. لذا به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n = b_n + u \in U + V$ و در نتیجه $U + V$ باز است. $\square$

تعریف ۶.۱: فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ باشد. بزرگترین مجموعه باز درون A را با A° نشان می‌دهیم و برابر با اجتماع تمام زیر مجموعه‌های باز E است که درون A قرار دارند.

لم زیر مستقیماً از تعریف نقاط درونی بدست می‌آید.

لم ۷.۱: فرض کنید A و B دو زیر مجموعه از فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ باشند. اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A^\circ \subseteq B^\circ$.

اثبات: فرض کنید $x \in A^\circ$ و دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E به x همگرا باشد. از آنجا که A° یک مجموعه باز است پس به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in A^\circ$. از طرفی $A^\circ \subset A \subset B$، بنابراین به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in B$، از طرفی B° بزرگترین مجموعه باز درون B می‌باشد لذا $x \in B^\circ$. $\square$

مثال ۸.۱: فرض کنید (Y, τ) فضای توپولوژیکی دلخواه و $\xrightarrow{\tau}$، τ ـ همگرایی روی Y باشد. واضح است $(Y, \xrightarrow{\tau})$ فضای برداری همراه با همگرایی است.

مثال ۹.۱: فرض کنید $Y = R$ فضای برداری، و توپولوژی روی R را به صورت

$$\tau = \{U \subset R : \text{متناهی باشد } U^c\text{،}\}$$

در نظر بگیرید و $x_n \xrightarrow{\tau} x$ اگر وتنها اگر به ازای هر $U \in \tau$ حاوی x عدد $n_\circ \in N$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $n \geqslant n_\circ$، $x_n \in U$. پس $(R, \xrightarrow{\tau})$ فضای برداری همراه با همگرایی است که حد در آن یکتا نمی‌باشد. به عنوان مثال دنباله $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ به صفر و هر عدد دیگری همگرا می‌باشد.

۱−۳ مخروط یکپارچه در فضای برداری همراه با همگرایی

در این بخش ضابطه‌ای مفید، برای نقاط درونی یک مخروط اثبات می‌کنیم که نقش مهمی در بخش پنجم بازی می‌کند.

تعریف ۱۰.۱: زیر مجموعه بسته و ناتهی P از فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ مخروط نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) به ازای هر $\lambda \in R^+$، $\lambda P \subset P$؛

(۲) $P + P \subset P$؛

(۳) $P \cap \{-P\} = \{\circ\}$.

مخروط P را بدیهی(صفر) می‌نامیم، هرگاه $P = \{\circ\}$. اگر درون مخروط غیر بدیهی P ناتهی باشد، آنگاه P را یک مخروط یکپارچه می‌نامیم.

لم ۱۱.۱: اگر P یک مخروط در فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ باشد، آنگاه حداکثر یک زیر مجموعه باز ناتهی $U \subset P$ وجود دارد به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) به ازای هر $\lambda \in R^+$، $\lambda U \subset U$؛

(۲) $P + U \subset U$؛

(۳) $\circ \notin U$.

اثبات: نشان می دهیم اگر زیر مجموعه باز دیگری مانند V در P وجود داشته باشد که در سه شرط بالا صدق کند، آنگاه $V = U$. فرض کنید U یک زیر مجمموعه باز ناتهی P باشد که در شرط‌های (۱) تا (۳) صدق می‌کند. ابتدا ثابت می‌کنیم که هر زیر مجموعه باز ناتهی $V \subset P$ زیر مجموعه‌ای از U می‌باشد. فرض کنید $x \in V$ و $a \neq \circ$ متعلق به U باشد. اگر دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$، به صورت $x_n = x - \frac{۱}{n}a$ در نظر بگیریم، آنگاه $x_n \longrightarrow x$. چون V مجموعه‌ای باز است؛ پس به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \in V$ و در نتیجه $x_n \in P$. از طرفی $a \in U$ و $\frac{۱}{n} > \circ$ بنابراین بنابر شرط (۱)، $\frac{۱}{n}a \in U$ و $x = x_n + \frac{۱}{n}a$؛ لذا بنابر شرط (۲)، $x \in U$. به عبارت دیگر $V \subset U$. حال فرض کنید U و V دو زیر مجموعه باز ناتهی از P باشند که در شرط‌های (۱) تا (۳) صدق می‌کنند پس مشابه آنچه بیان شد، $U \subset V$. بنابراین $V = U$ و اثبات تمام است. $\square$

قضیه ۱۲.۱: فرض کنید P یک مخروط یکپارچه در فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ باشد. در این صورت P° در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) به ازای هر $\lambda \in R^+$، $\lambda P^\circ \subset P^\circ$؛

(۲) $P + P^\circ \subset P^\circ$؛

(۳) $\circ \notin P^\circ$.

برعکس اگر K یک زیر مجموعه باز ناتهی از P باشد که در شرایط (۱) تا (۳) صدق کند، آنگاه $K = P^\circ$.

اثبات: نشان می‌دهیم P° در شرایط (۱) تا (۳) صدق می‌کند.

(۱) فرض کنید $\lambda \in R^+$. چون P° مجموعه‌ای باز است، پس بنابر لم ۵.۱، λP° مجموعه‌ای باز است. از طرفی $P^\circ \subset P$، بنابراین $\lambda P^\circ \subset \lambda P \subset P$. به‌علاوه P° بزرگترین مجموعه باز درون P می‌باشد. لذا $\lambda P^\circ \subset P^\circ$.

(۲) بنابر لم ۵.۱، اگر P° باز و P دلخواه باشد، آنگاه $P + P^\circ$ باز خواهد بود. بنابراین

$$(P + P^\circ)^\circ = P + P^\circ.$$

از طرفی $P + P \subset P$ و $P^\circ \subset P$. پس $P + P^\circ \subset P$. بنابراین بنابر لم ۷.۱، $P + P^\circ \subset P^\circ$.

(۳) نشان می‌دهیم $\circ \notin P^\circ$. برهان خلف: فرض کنیم $\circ \in P^\circ$. چون P غیر بدیهی و ناتهی است، پس عنصر ناصفر $a \in P$ وجود دارد به طوری‌که $-\frac{۱}{n}a \longrightarrow \circ$. چون P° مجموعه‌ای باز است پس به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $-\frac{۱}{n}a \in P^\circ$. از طرفی $\frac{۱}{n} > \circ$. لذا بنابر شرط (۱)، $-a \in P^\circ$ خواهد بود. بنابراین $-a \in P$. اما P یک مخروط یکپارچه است؛ پس $a = \circ$ و تناقض با $a \neq \circ$ دارد. پس $\circ \notin P^\circ$.

فرض کنید K یک مجموعه باز ناتهی از P باشد که در شرایط (۱) تا (۳) صدق می‌کند. بنابر لم ۱۱.۱، حداکثر یک مجموعه باز وجود دارد که در این شرایط صدق می‌کند. از طرفی بنا بر قسمت اول قضیه، مجموعه نقاط درونی P نیز در شرایط (۱) تا (۳) لم ۱۱.۱، صدق می‌کند. بنابراین $K = P^\circ$. □

۱–۴ فضای برداری مرتب شده

یک رابطه دوتایی $(\preccurlyeq)$ روی مجموعه E را یک ترتیب روی E می‌نامیم، هرگاه دارای خواص انعکاسی، پاد متقارن و تعدی باشد.

تعریف ۱۳.۱: یک ترتیب $(\preccurlyeq)$ روی فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$ ترتیب برداری نامیده می‌شود، هرگاه با ساختار جبری و ساختار همگرایی روی E به گونه‌ای سازگار باشد که شرایط زیر درست باشند:

$(V۱)$ اگر $x \preccurlyeq y$، آنگاه $x + z \preccurlyeq y + z$.

$(V۲)$ اگر $\lambda \geqslant ۰$ و $x \preccurlyeq y$، آنگاه $\lambda x \preccurlyeq \lambda y$.

$(V۳)$ اگر دنباله‌های $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به ترتیب به x و y همگرا و به ازای هر n، $x_n \preccurlyeq y_n$، آنگاه $x \preccurlyeq y$.

فضای برداری E که به یک ترتیب برداری مجهز شده باشد را فضای برداری مرتب شده می‌نامیم و با $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ نشان می‌دهیم. اگر همگرایی روی E به وسیله توپولوژی τ تولید شود، آنگاه $(E, \tau, \preccurlyeq)$ را به جای $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ به کار می‌بریم. به طور مشابه اگر همگرایی به وسیله $\|.\|$ تولید شود، آنگاه $(E, \|.\|, \preccurlyeq)$ را داریم. اصل $(V۳)$ با حکم زیر معادل است.

$(V۳')$ اگر دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به ۰ همگرا باشد و به ازای هر n، $x_n \preccurlyeq ۰$، آنگاه $x \preccurlyeq ۰$.

اگر در اصل $(V۳)$ به ازای هر n، $y_n = ۰$ قرار دهید، آنگاه حکم $(V۳')$ ثابت می‌شود. برعکس: اگر در اصل $(V۳')$ به ازای هر n، $x_n = x_n - y_n$ قرار دهید، آنگاه حکم $(V۳)$ ثابت می‌شود.

هر ترتیب برداری روی فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ هم‌چنین در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(V۴)$ اگر $\lambda \leqslant ۰$ و $y \succcurlyeq x$، آنگاه $\lambda y \preccurlyeq \lambda x$.

اگر $\lambda \leqslant ۰$، آنگاه $-\lambda \geqslant ۰$ و بنابر اصل $(V۲)$، $-\lambda y \succcurlyeq -\lambda x$. بنابراین $\lambda y - \lambda x \succcurlyeq ۰$ و در نتیجه $\lambda y \preccurlyeq \lambda x$.

($V۵$) اگر $\mu \leq \lambda$ و $x \succcurlyeq \circ$، آنگاه $\mu x \preccurlyeq \lambda x$.

اگر $\lambda \leq \mu$، آنگاه $\mu - \lambda \geqslant \circ$. از طرفی بنابر ($V۲$)، $(\mu - \lambda)x \succcurlyeq \circ$ و در نتیجه $\lambda x \succcurlyeq \mu x$.

($V۶$) اگر $\mu \leq \lambda$ و $x \preccurlyeq \circ$، آنگاه $\mu x \succcurlyeq \lambda x$.

اگر $\lambda \leq \mu$، آنگاه $\mu - \lambda \geqslant \circ$ و بنابر ($V۲$)، $(\mu - \lambda)x \preccurlyeq \circ$ و درنتیجه $\lambda x \preccurlyeq \mu x$.

($V۷$) اگر $x \preccurlyeq y$ و $u \preccurlyeq v$، آنگاه $u + x \preccurlyeq v + y$.

اگر $x \preccurlyeq y$، آنگاه بنابر ($V۱$)، $x + u \preccurlyeq y + u$. همچنین اگر $u \preccurlyeq v$، آنگاه بنابر ($V۱$)، $u + y \preccurlyeq v + y$. بنابراین $u + x \preccurlyeq v + y$.

تعریف ۱۴.۱: فرض کنید $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ یک فضای برداری مرتب شده باشد. در این صورت مجموعه

$$E_+ = \{x \in E : x \succcurlyeq \circ\},$$

یک مخروط مثبت با ترتیب ($\preccurlyeq$) یا به اختصار یک مخروط مثبت از E نامیده می‌شود.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مخروط مثبت یک مخروط است؛ به علاوه در یک فضای برداری همراه با همگرایی $(E, \longrightarrow)$، ترتیب برداری $\preccurlyeq$ و مخروط‌ها در یک تناظر یک به یک هستند.

قضیه ۱۵.۱: فرض کنید $(E, \longrightarrow)$ یک فضای برداری همراه با همگرایی باشد. اگر رابطه ($\preccurlyeq$) یک ترتیب برداری روی E باشد، آنگاه مخروط مثبت E_+ یک مخروط در E است. برعکس اگر زیر مجموعه P از E یک مخروط باشد، آنگاه رابطه ($\preccurlyeq$) روی E که به صورت

$$x \preccurlyeq y \Longleftrightarrow y - x \in P$$

تعریف می‌شود یک ترتیب برداری روی E است. مخروط مثبت E_+ را با P نشان می‌دهیم.

اثبات: نشان می‌دهیم E_+ یک مخروط است.

(۱) نشان می‌دهیم به ازای هر $\lambda \in R_+$، $\lambda E_+ \subset E_+$. فرض کنیم $\lambda \in R_+$ و $y \in \lambda E_+$. بنابراین $x \in E_+$ وجود دارد به‌طوری‌که $y = \lambda x$. چون $\preccurlyeq$ یک رابطه ترتیبی است، $\lambda \geqslant \circ$ و $x \succcurlyeq \circ$. پس $\lambda x \succcurlyeq \circ$ و درنتیجه $\lambda x \in E_+$.

(۲) نشان می‌دهیم $E_+ \subset E_+ + E_+$. فرض کنیم $z \in E_+ + E_+$. بنابراین $x, y \in E_+$ وجود دارند به طوریکه $z = x + y$. چون $\preccurlyeq$ یک رابطه ترتیبی است، $y \succcurlyeq \circ$ و $x \succcurlyeq \circ$. پس $z = x + y \succcurlyeq \circ$ و در نتیجه $z \in E_+$.

(۳) نشان می‌دهیم $E_+ \cap \{-E_+\} = \{\circ\}$. برهان خلف: فرض کنیم $E_+ \cap \{-E_+\} \neq \{\circ\}$. پس $x \neq \circ$ و $x \in E_+ \cap \{-E_+\}$ وجود دارد، از آنجا که

$$-E_+ = -\{x \in E : x \succcurlyeq \circ\} = \{-x \in E : x \succcurlyeq \circ\} = \{x \in E : x \preccurlyeq \circ\}.$$

بنابراین $x \succcurlyeq \circ$ و $x \preccurlyeq \circ$ و درنتیجه $x = \circ$ و این تناقض با $x \neq \circ$ دارد. پس E_+ یک مخروط در E است.

برعکس: نشان می‌دهیم رابطه $\preccurlyeq$ یک ترتیب برداری روی E است. فرض کنیم $P \subseteq E$ یک مخروط باشد.

(۱) اگر $x \preccurlyeq y$، آنگاه $y-x \in P$. بنابراین $(y+z)-(x+z) \in P$ و درنتیجه $(y+z) \succcurlyeq (x+z)$.

(۲) اگر $x \preccurlyeq y$ و $\lambda \in R_+$، آنگاه $y-x \in P$. چون P یک مخروط است پس $\lambda(y-x) \in P$ یا $\lambda y - \lambda x \in P$ و در نتیجه $\lambda y \succcurlyeq \lambda x$.

(۳) اگر دنباله‌های $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به ترتیب به x و y همگرا و به ازای هر n، $y_n \preccurlyeq x_n$، آنگاه $x_n - y_n \in P$. چون P بسته است، هنگامی‌که $n \longrightarrow \infty$، $x - y \in P$ و در نتیجه $x \succcurlyeq y$.
بنابراین رابطه $\preccurlyeq$ یک ترتیب برداری روی E است. $\square$

تعریف ۱۶.۱: فرض کنید $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ یک فضای برداری مرتب شده باشد.

(۱) مجموعه $A \subseteq E$ کراندار نامیده می‌شود، هرگاه بردارهای $a, b \in E$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که به ازای هر $x \in A$، $a \preccurlyeq x \preccurlyeq b$.

(۲) دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E کراندار نامیده می‌شود، هرگاه مجموعه متشکل از اعضای دنباله، کراندار باشد.

(۳) دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E صعودی نامیده می‌شود، هرگاه ... $x_۱ \preccurlyeq x_۲ \preccurlyeq x_۳ \preccurlyeq$.

(۳) دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در E نزولی نامیده می‌شود، هرگاه ... $x_۱ \succcurlyeq x_۲ \succcurlyeq x_۳ \succcurlyeq$.

تعریف ۱.۱۷: فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$، فضای برداری یکپارچه نامیده می‌شود، هرگاه مخروط مثبت یکپارچه باشد.

تعریف ۱.۱۸: فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$، فضای برداری نرمال نامیده می‌شود، هرگاه به ازای دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E که به ازای هر n، $x_n \preccurlyeq y_n \preccurlyeq z_n$، $x_n \longrightarrow x$ و $z_n \longrightarrow x$ نتیجه دهد $y_n \longrightarrow x$.

تعریف بالا به قضیه ساندویچ یا رول از دنباله میانی معروف است.

تعریف ۱.۱۹: فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$، فضای برداری منظم نامیده می‌شود، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) هر دنباله صعودی کراندار در E همگرا باشد.

(۲) هر دنباله نزولی کراندار در E همگرا باشد.

۱–۵ ترتیب برداری اکید و مخروط یکپارچه

در این بخش مفاهیمی از ترتیب برداری اکید را معرفی نموده و نشان می‌دهیم که یک فضای برداری مرتب شده می‌تواند به یک ترتیب برداری اکید مجهز شود اگر و تنها اگر یک فضای برداری یکپارچه باشد. رابطه دوتایی $\prec$ روی مجموعه E ترتیبی اکید نامیده می‌شود، هرگاه غیرانعکاسی، نامتقارن و متعدی باشد.

تعریف ۱.۲۰: فرض کنید $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ یک فضای برداری مرتب شده باشد. ترتیب $\prec$ روی E ترتیب برداری اکید نامیده می‌شود، هرگاه با ساختار جبری و ساختار همگرایی روی E به گونه‌ای سازگار باشد که شرایط زیر درست باشند:

$(S1)$ اگر $x \prec y$، آنگاه $x \preccurlyeq y$.

$(S2)$ اگر $x \preccurlyeq y$ و $y \prec z$، آنگاه $x \prec z$.

($S۳$) اگر $x \prec y$، آنگاه $x + z \prec y + z$.

($S۴$) اگر $\lambda \geqslant ۰$ و $x \prec y$، آنگاه $\lambda x \prec \lambda y$.

($S۵$) اگر $x_n \to x$، $y_n \to y$ و $x \prec y$، آنگاه به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \prec y_n$.

یک فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ که به یک ترتیب برداری اکید $\prec$ مجهز شود، با $(E, \preccurlyeq, \prec, \longrightarrow)$ نشان می‌دهیم. فضای برداری مرتب شده که به یک ترتیب برداری اکید مجهز شده باشد، فضای برداری یکپارچه نامیده می‌شود. اصل ($S۵$) با حکم زیر معادل است:

($S۵'$) اگر دنباله $x_n \to ۰$ و $۰ \prec c$، آنگاه به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $x_n \prec c$.

اگر در اصل ($S۵$) به ازای هر n، $y_n = c$ قراردهید، آنگاه حکم ($S۵'$) ثابت می‌شود.

ترتیب برداری اکید $\prec$ روی فضای برداری مرتب شده $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$، همچنین در شرایط زیر صدق می‌کند:

($S۶$) اگر $\lambda \leqslant ۰$ و $x \succ y$، آنگاه $\lambda x \prec \lambda y$.

($S۷$) اگر $\lambda \leq \mu$ و $x \succ ۰$، آنگاه $\lambda x \prec \mu x$.

($S۸$) اگر $\lambda \leq \mu$ و $x \prec ۰$، آنگاه $\lambda x \succ \mu x$.

($S۹$) اگر $x \prec y$ و $y \preccurlyeq z$، آنگاه $x \prec z$.

($S۱۰$) اگر $x \preccurlyeq y$ و $u \prec v$، آنگاه $u + x \prec v + y$.

($S۱۱$) اگر به ازای هر $c \succ ۰$، $x \prec c$، آنگاه $x \preccurlyeq ۰$.

($S۱۲$) برای هر مجموعه متناهی $A \subset E$ شامل بردارهای اکید مثبت، بردار $c \succ ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$، $x \prec c$. به علاوه برای هر بردار $b \succ ۰$ می‌توان $\lambda > ۰$ چنان یافت که $c = \lambda b$.

($S۱۳$) برای هر مجموعه متناهی $A \subset E$ بردار $c \succ ۰$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $x \in A$، $-c \prec x \prec c$. به علاوه برای هر بردار $b \succ ۰$، می‌توان $\lambda > ۰$ چنان یافت که $c = \lambda b$.

(S۱۴) برای هر $x \in E$ و $b \succ ۰$ در E، $\lambda > ۰$ وجود دارد به طوری‌که $-\lambda b \prec x \prec \lambda b$.

اثبات: خواص (S۶) تا (S۱۰) بدیهی است. خاصیت (S۱۴) نیز حالت خاصی از (S۱۳) است.

(S۱۱) بردار $b \succ ۰$ در E در نظر بگیرید. بنابر (S۴)، به ازای هر $n \in N$، $\frac{۱}{n}b \succ ۰$. پس $\frac{۱}{n}b \succ x$ و $\frac{۱}{n}b \longrightarrow ۰$. بنابراین $x \preccurlyeq ۰$.

(S۱۲) نشان می‌دهیم $\lambda > ۰$ وجود دارد به طوری‌که $c = \lambda b$ و به ازای هر $x \in A$، $c \prec x$. فرض کنید $x \in A$ و بردار $b \succ ۰$ در E در نظر می‌گیریم. چون $x \succ ۰$ و $\frac{۱}{n}b \longrightarrow ۰$، پس بنابر ($S$۵)، به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $\frac{۱}{n}b \prec x$. از طرفی مجموعه A یک مجموعه متناهی است بنابراین برای n به اندازه کافی بزرگ، به ازای هر $x \in A$، $\frac{۱}{n}b \prec x$. لذا به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n، هر بردار به صورت $c = \frac{۱}{n}b$ در رابطه، $c \prec x$ صدق می‌کند. حال اگر $\lambda = \frac{۱}{n} > ۰$ قرار دهیم، آنگاه حکم برقرار خواهد بود.

(S۱۳) نشان می‌دهیم $\lambda > ۰$ وجود دارد به طوری‌که $c = \lambda b$ و به ازای هر $x \in A$، $c \prec x \prec c$. فرض کنید x بردار دلخواهی در A باشد. بردار $b \succ ۰$ در E در نظر بگیرید. چون $\frac{۱}{n}x \longrightarrow ۰$ و $-\frac{۱}{n}x \longrightarrow ۰$؛ پس بنابر ($S$۵)، به ازای همه بجز تعداد متناهی n، $\frac{۱}{n}x \prec b$ و $-\frac{۱}{n}x \prec b$ خواهند بود، بنابراین $-nb \prec x \prec nb$ از طرفی A یک مجموعه متناهی است، پس برای n به اندازه کافی بزرگ، به ازای هر $x \in A$، $-nb \prec x \prec nb$. بنابراین به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ n، هر بردار به صورت $c = nb$ در رابطه $-c \prec x \prec c$ صدق می‌کند؛ حال اگر $\lambda = n > ۰$ قرار دهیم، آنگاه حکم برقرار خواهد بود. $\square$

قضیه زیر نشان می‌دهد که یک فضای برداری مرتب شده می‌تواند به یک ترتیب برداری اکید مجهز شود اگر و تنها اگر فضای برداری یکپارچه باشد. به علاوه روی هر فضای برداری مرتب شده حداکثر یک ترتیب برداری اکید وجود دارد؛ به عبارت دیگر مخروط‌های یکپارچه و ترتیب برداری اکید روی یک فضای برداری مرتب شده در تناظر یک به یک هستند.

قضیه ۲۱.۱: فرض کنید $(E, \preccurlyeq, \longrightarrow)$ یک فضای برداری مرتب شده و P یک مخروط مثبت باشد یعنی $P = \{x \in E : x \succcurlyeq ۰\}$. اگر $\prec$ یک ترتیب برداری اکید روی E باشد، آنگاه P یک