دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

ریاضی کاربردی ، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

بررسی پیچیدگی مسئلهی حداکثر جریان با قیدهای جداکنندهی دودویی

استاد راهنما

جواد مهری تکمه

استاد مشاور

میرکمال میرنیا

پژوهشگر

صنم جاهداورنگ

۱۳۹۱

به نام قلم، به یاد هنر و به پاس خرد...

«هزار سال آسمان و اختران را در مدار و سیر به شیب و بالا، جان باید کندن، تا از این آسیابک، دانه ای چون عمر خیام بیرون افتد و از این هفت شهرپای بالا و هفت ده سرنشیب، یک قافله سالار دانش، چون من در آید.»

گفتار فوق از ریاضی دان و دانشمند بلندآوازه ی ایران، حکیم عمر خیام می‌باشد و نیازی به یادآوری نیست که تاریخ علم و دانش این مرز و بوم، نام های بسیاری از این قسم گنجینه‌ها را در سینه ی خود دارد و من بی نهایت خوشحالم در کشوری زندگی می کنم که تاریخ علم و فکر و تمدن بشریت، وام دار بی چون و چرای آن است. علم و دانش موهبتی است که انسان از همان ابتدای خلقت، به سبب حس کنجکاوی که در نهادش به ودیعه گذارده شده، به سویش کشیده شده و در طی قرن‌ها بر کمیت و کیفیت آن افزوده است. اما وجه دیگر علم که به نظر می رسد مهم تر و ارزش مندتر از خود علم باشد، همان است که صاحب نظران از آن به «رسالت علم» تعبیر کرده، «علم حقیقی» یا «علم خالص» را مطرح نموده اند که درست در مقابل «موهومات» قرار دارد. جورج سارتن، نویسنده ی کتاب «تاریخ علم» می نویسد: «امروزه یک رشته موهومات، به جای علوم حقیقی رواج پیدا کرده اند که چون سودآور به نظر می رسند زودتر از علوم خالص انتشار پیدا می کنند. چه، قدر علم خالص را در هر زمان عده ی کمی می دانند و به آن توجه می کنند». اینجاست که یکی از مرزهای روشن مابین «علم حقیقی» با «موهومات» آشکار می شود و آن «حکمت و معرفت» است. ویل دورانت در این مورد تعبیر زیبایی دارد: «ما با دانش خود که سرمستمان کرده است نابود خواهیم شد. بدون حکمت، نجات نخواهیم یافت». آیا نمی توان گفت حکمت همان است که خردمندی به همراه دارد و سعادت و فضل را ارمغان بشر می کند؟ مگر نه این است که حکیم دانا، خردمند هم هست؟ اما آیا کسی می تواند مدعی شود در این چند روزه ی عمر که کوتاهیش شباهت غریبی با عمر گل یخ دارد، می تواند هم علم را بیاموزد و هم رسالتش را به جای آورد؟ به قول بقراط: «زندگی کوتاه است، هنر در دوردست‌ها، فرصت در حال فرار، تجربه خیانت پیشه و داوری دشوار.»

امیدوارم من و هر آن کسی که قدم در راه علم و دانش برمی دارد، بتوانیم رسالت علمی‌مان را هم به سرانجام برسانیم، روز به روز داناتر، خردمندتر، فاضل تر و حکیم تر شویم و در راه کسب علم خالص و حقیقی، موفق تر باشیم. پایان نامه ی پیش رو، حاصل یک دوره تکاپوی ذهن در بستر دانش و مادر آن، ریاضیات است و بی شک این تحقیق به ثمر نمی نشست مگر به یاری اساتید گرامی و دانشمندان فرهیخته‌ای که بی هیچ منتی، دریای معلومات خویش را در اختیارم گذاردند. امید است مقبول افتد.

صنم جاهداورنگ

تقدیم به:

پدر و مادرم

بنام خدا

و لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **جواد مهری تکمه** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر **میرکمال میرنیا** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم و اساتید گرامی مخصوصاً از آقای دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر غلامرضا حجتي معاونت آموزشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حسین خیری مدیرگروه ریاضی کاربردی، کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

صنم جاهداورنگ

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: جاهداورنگ نام: صنم
عنوان: بررسی پیچیدگی مسئله‌ی حداکثر جریان با قیدهای جداکننده‌ی دودویی
استاد راهنما : جواد مهری تکمه استاد مشاور : میرکمال میرنیا
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: تحقیق در عملیات دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۱۰۴
کلید واژه‌ها: مسئله‌ی حداکثر جریان، مسئله‌ی حداکثر جریان با کران‌های پایین، قیدهای جداکننده‌ی دودویی منفی، قیدهای جداکننده‌ی دودویی مثبت، گراف قیدی، گراف تصادم، گراف اجبار.
چکیده یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی در مبحث شبکه، تعیین جریان ماکزیمم از یک رأس منبع (مبدأ) مفروض به یک رأس چاهک (مقصد) مفروض، تحت محدودیت‌های ظرفیت‌های یالی و بقای جریان است. در این پایان‌نامه مسئله‌ی حداکثر جریان را تحت یک سری محدودیت‌های اضافی، به نام قیدهای جداکننده‌ی دودویی بررسی می‌کنیم. در یک شبکه یک قید جداکننده‌ی دودویی منفی بیان کننده‌ی این حالت است که از دو یال معین، نمی‌توان به طور هم زمان در یک جواب شدنی جریان ارسال کرد. در مقابل، یک قید جداکننده‌ی دودویی مثبت بیان کننده‌ی این حالت است که از یک جفت معین از یال‌ها در یک جواب شدنی، حداقل یک یال باید حامل جریان باشد. برای راحتی کار قیدهای جداکننده‌ی منفی را با یک گراف قیدی به نام گراف تصادم نشان می‌دهیم، به طوری که رأس‌های این گراف متناظر با یال‌های شبکه‌ی اصلی و هر یال آن متناظر با یک قید جداکننده‌ی دودویی منفی است. به طور مشابه، قیدهای جداکننده‌ی دودویی مثبت را نیز توسط یک گراف قیدی به نام گراف اجبار نشان می‌دهیم.

ثابت می‌کنیم مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف تصادم قویاً $\mathcal{NP}$-سخت است، حتی اگر هر مؤلفه‌ی همبند گراف تصادم، یک یال تنها باشد. در مقابل نشان می‌دهیم مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف اجبار قابل حل به صورت کارا است، اگر جریان‌های یالی مقادیر دلخواه (غیر صحیح) باشند. در صورتی که جریان‌های یالی مقادیر صحیحی باشند، نمونه‌ها را می‌توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم کرد؛ نمونه‌هایی که قابل حل در یک زمان چندجمله‌ای هستند و نمونه‌هایی که قویاً $\mathcal{NP}$-سخت هستند.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

مقدمه

بسیاری از وضعیت‌های دنیای واقعی را می‌توان به راحتی به وسیله‌ی نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که زوج‌های معینی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، توصیف کرد. به عنوان مثال نقاط می‌توانند معرف مراکز ارتباطی باشند و خطوط واصل بین زوج‌ها می‌توانند معرف ارتباط‌های بین آنها باشند. تجرد ریاضیاتی وضعیت‌هایی از این نوع، به پیدایش مفهوم گراف منجر شده است.

یک گراف وسیله‌ی مؤثری برای نمایش ساختار ارتباطی بین یک مجموعه از اجزا است. هنگامی که امکان وجود جریان در امتداد یال‌ها باشد، گراف جهت‌دار را شبکه می نامیم. یک شبکه در عمل ممکن است نمایانگر یک سیستم حمل و نقل یا یک شبکه‌ی مخابراتی و یا ... باشد. در برخی از کاربردها مفید است فرض کنیم که کران‌های بالایی برای جریان مجاز در یال‌های مختلف موجودند. این فرض به مفهوم شبکه‌های ظرفیت دار می‌انجامد.

یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی در مبحث شبکه، مسئله‌ی تعیین حداکثر جریان ممکن از یک رأس منبع (مبدأ) مفروض به یک رأس چاهک (مقصد) مفروض، تحت یک سری محدودیت‌های خاص است. در حالت کلی مسئله‌ی حداکثر جریان دارای دو نوع محدودیت است، قیدهای بقای جریان و قیدهای ظرفیت. با توجه به قیدهای بقای جریان، جریان در یک رأس نمی‌تواند از بین برود یا به وجود آید مگر اینکه آن رأس، یک رأس منبع یا یک رأس چاهک باشد. جریان خالص خروجی و ورودی در هر رأس به غیر از رأس‌های منبع و چاهک برابر با صفر است. در حالیکه جریان خالص

خروجی از یک رأس منبع و جریان خالص ورودی به یک رأس چاهک یک مقدار مثبتی است. با توجه به قیدهای ظرفیت، جریان گذرنده از یک یال نمی‌تواند بیشتر از کران بالای آن یال باشد.

ممکن است در عمل، با برخی مسائل پیچیده‌ای مواجه شویم که نیازمند این باشیم، یک سری محدودیت‌های دیگری به نام قیدهای جداکننده‌ی دودویی را بر روی جریان‌های یالی اعمال کنیم. با وجود اینکه مسئله‌ی حداکثر جریان قابل حل به صورت کارا است، ممکن است مسئله‌ی حداکثر جریان با قیدهای جداکننده‌ی دودویی پیچیده تر از آن باشد که بتوان آن را با یک الگوریتم کارا حل کرد. در این پایان نامه پیچیدگی مسئله‌ی حداکثر جریان با جریان‌های یالی صحیح را تحت قیدهای جداکننده‌ی دودویی بررسی می کنیم. قیدهای جداکننده‌ی دودویی به دو صورت کلی تقسیم می‌شوند؛ قیدهای جداکننده‌ی دودویی منفی و قیدهای جداکننده‌ی دودویی مثبت. در یک شبکه یک قید جداکننده‌ی دودویی منفی بیان کننده‌ی این حالت است که از دو یال معین، نمی‌توان به طور هم زمان در یک جواب شدنی جریان ارسال کرد. در مقابل، یک قید جداکننده‌ی دودویی مثبت بیان کننده‌ی این حالت است که از یک جفت معین از یال‌ها در یک جواب شدنی، حداقل یک یال باید حامل جریان باشد. برای راحتی کار قیدهای جداکننده‌ی دودویی منفی را با یک گراف قیدی به نام گراف تصادم نشان می‌دهیم. به طور مشابه قیدهای جداکننده‌ی دودویی مثبت را نیز با یک گراف قیدی به نام گراف اجبار نشان می‌دهیم.

برای استفاده‌ی راحت از این پایان‌نامه کوشیده‌ایم پیش‌نیازهای لازم را تا جای ممکن بیان کنیم تا نیازی به ارجاع به منابع دیگر نباشد. محتوای این تحقیق به دو قسمت عمده تقسیم شده است، قسمت اول شامل فصل ۱ و ۲ است. در فصل ۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی درباره‌ی گراف و طبقه بندی مسائل سخت و آسان توسط کلاس‌های پیچیدگی مطرح می‌شود. در فصل ۲، به بیان مسئله‌ی حداکثر جریان و برخی مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی دیگر می پردازیم که در فصل‌های ۳ و ۴ به آنها نیاز خواهیم داشت. قسمت دوم که دارای اهمیت بیشتری است شامل فصل‌های ۳ و ۴ می‌باشد.

در فصل ۳ مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف تصادم بررسی می‌شود. ابتدا ساده ترین نمونه‌های موجود برای مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف تصادم را در نظر می‌گیریم، شبکه‌ی اصلی در این نمونه‌ها، از مسیرهای مجزا از رأس منبع به رأس چاهک تشکیل می‌شود و مؤلفه‌های گراف تصادم مسیرهایی به طول یک یا به عبارت دیگر یال‌های تنها هستند. سپس نتایج به دست آمده را می‌توان به صورت کلی تر مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف تصادم تعمیم داد.

در فصل ۴ به بررسی مسئله‌ی حداکثر جریان با گراف اجبار، در دو حالت می‌پردازیم. نخست پیچیدگی مسئله‌ی فوق را با جریان‌های یالی صحیح بررسی می کنیم. چون ارسال مقدار بسیار کمی از جریان، مانند $\varepsilon > 0$، از برخی یال‌ها باعث برآورده شدن شرایط القایی توسط گراف اجبار می‌شود، این مسئله را با جریان‌های یالی غیر صحیح نیز بررسی می‌کنیم.

قبلاً نیز نتایج قابل توجهی برای برخی از مسائل بهینه‌سازی با قیدهای جداکننده‌ی دودویی به دست آمده است. مسئله‌ی کوله پشتی [۱] با گراف تصادم در [۱۵] توسط فاشی [۲] و شاوآ [۳] به تفصیل بررسی شده است. نشان داده شده است که مسئله‌ی کوله پشتی با گراف تصادم یک مسئله‌ی $\mathcal{NP}$-سخت است، اما اگر گراف تصادم یک گراف وتری [۴] یا یک درخت باشد، الگوریتم‌هایی با زمان شبه چندجمله‌ای برای این مسئله موجود است.

جانسن [۵] و اورینگ [۶] در [۱۱] و [۱۲]، پیچیدگی مسئله‌ی بسته‌بندی [۷] با نمونه‌های خاصی از

[۱] Knapsack Problem

[۲] Pferschy

[۳] Schauer

[۴] chordal graph

[۵] Jansen

[۶] Öhring

[۷] Bin Packing Problem

گراف تصادم را بررسی کرده‌اند. گوسنز [۸] و اِسپیکسما [۹] در [۱۰] نشان داده اند که الگوریتم‌هایی با زمان چندجمله‌ای برای مسئله‌ی حمل ونقل [۱۰] با قیدهای جداکننده‌ی دودویی موجود است.

برای پیچیدگی مسئله‌های کوتاه‌ترین مسیر[۱۱] و جورسازی ماکزیمم [۱۲] با گراف‌های تصادم و اجبار به [۷] نوشته‌ی دارمان [۱۳]، فاشی، شاوآ و وُگینگر[۱۴] مراجعه کنید. همچنین مسئله‌ی درخت فراگیر مینیمم [۱۵] با گراف‌های تصادم و اجبار، در [۱۸] توسط چانگ [۱۶]، کابادی [۱۷] و پونِن [۱۸] مطرح شده است. بررسی پیچیدگی همین مسئله به تفصیل در [۷] نیز بیان شده است.

[۸] Goossens

[۹] Spieksma

[۱۰] Transportation Problem

[۱۱] Shortest Path Problem

[۱۲] Maximum Maching Problem

[۱۳] Darmann

[۱۴] Woeginger

[۱۵] Minimum Spanning Tree Problem

[۱۶] Zhang

[۱۷] Kabadi

[۱۸] Punnen

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل، به بیان برخی مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت. تعریف‌های ارائه شده در این بخش مطالبی استاندارد است که در بسیاری از کتاب‌های مربوط به نظریه‌ی گراف آورده شده است. اکثر مطالب این بخش به نقل از [۴] است.

۱.۱ مفاهیم پایه برای گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف بدون جهت G، یک سه‌تایی مرتب به صورت $(N(G), A(G), \psi_G)$ است که در آن، $N(G)$ یک مجموعه متناهی و ناتهی، $A(G)$ یک مجموعه‌ی مجزا از مجموعه‌ی $N(G)$ و ψ_G یک تابع وقوع است به طوری که هر عضو از مجموعه‌ی $A(G)$ را به یک جفت نامرتب از اعضای $N(G)$ نظیر می‌کند. اعضای $N(G)$ را، رأس‌های گراف G و اعضای $A(G)$ را، یال‌های گراف G می‌نامیم.

اگر a یک یال باشد و u و v رأس‌هایی باشند به قسمی که $\psi_G(a) = \{u, v\}$، آن‌گاه می‌گوییم یال a، u و v را به هم وصل می‌کند و به طور خلاصه می‌نویسیم $a = \{u, v\}$. رأس‌های u و v را دو انتهای یال a می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. گراف جهت‌دار G، یک سه‌تایی مرتب به صورت $(N(G), A(G), \psi_G)$ است که در آن، $N(G)$ یک مجموعه متناهی و ناتهی، $A(G)$ یک مجموعه‌ی مجزا از مجموعه‌ی $N(G)$ و ψ_G یک تابع وقوع است به طوری که هر عضو از مجموعه‌ی $A(G)$ را به یک جفت مرتب از اعضای $N(G)$ نظیر می‌کند. به طور مشابه اعضای $N(G)$ را، رأس‌های گراف G و اعضای $A(G)$ را، یال‌های گراف G می‌نامیم.

اگر $a \in A(G)$ و u و v رأس‌هایی باشند به قسمی که $\psi_G(a) = (u, v)$، آن‌گاه می‌گوییم یال a

رأس u را به رأس v وصل می‌کند یا از رأس u خارج و به رأس v وارد می‌شود. رأس u را ابتدا و رأس v را انتهای یال a می‌نامیم و به طور خلاصه می‌نویسیم $a = (u, v)$.

به عنوان مثال گراف $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ یک گراف بدون جهت است که در آن

$N(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$,

$A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$

است و تابع وقوع ψ_G به صورت

$\psi_G(a_1) = \{u, v\}$, $\psi_G(a_2) = \{v, y\}$,

$\psi_G(a_3) = \{z, v\}$, $\psi_G(a_4) = \{v, x\}$,

$\psi_G(a_5) = \{u, w\}$, $\psi_G(a_6) = \{y, u\}$,

$\psi_G(a_7) = \{y, z\}$, $\psi_G(a_8) = \{z, w\}$

تعریف می‌شود. همچنین گراف $H = (N(H), A(H), \psi_H)$ یک گراف جهت‌دار است که در آن

$N(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,

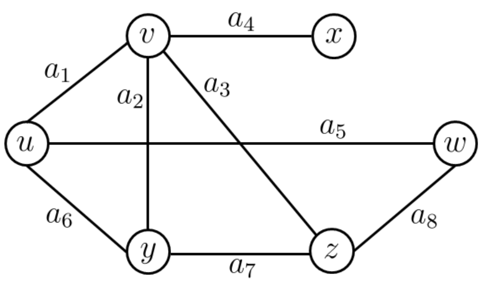
$\psi_H(a) = (2, 1)$, $\psi_H(b) = (1, 4)$,

$\psi_H(c) = (3, 1)$, $\psi_H(d) = (2, 5)$,

$\psi_H(e) = (4, 2)$, $\psi_H(f) = (3, 4)$,

$\psi_H(g) = (5, 4)$, $\psi_H(h) = (4, 6)$,

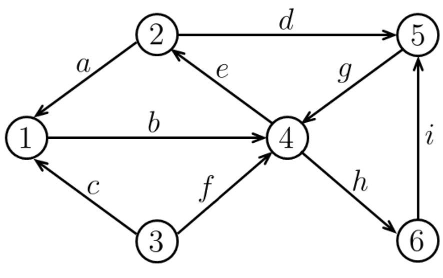
$\psi_H(i) = (6, 5)$



شکل ۱.۱: گراف بدون جهت $G = (N(G), A(G), \psi(G))$

است.

این مبحث را به این دلیل گراف می‌نامند که می‌توان موضوع مورد بحث را به صورت یک نمودار (گراف) نمایش داد. هر رأس از یک گراف بدون جهت به صورت یک نقطه و هر یال آن به وسیله‌ی یک خط که دو انتهای یال را به هم وصل می‌کند، مشخص می‌شود. نمودار گراف جهت‌دار نیز به صورت مشابه رسم می‌شود تنها با این تفاوت که در آن یک یال به صورت یک خط جهت‌دار از ابتدای یال به انتهای آن رسم می‌شود. غالباً نمودار گراف را رسم و به آن به عنوان خود گراف اشاره می‌کنیم. با همین برداشت، نقطه‌هایش را «رأس» و خط‌هایش را «یال» می‌نامیم. نمودار گراف‌های G و H به ترتیب به صورت شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ نمایش داده می‌شود. در این پایان‌نامه رأس‌های یک گراف را به صورت یک دایره و در برخی مواقع به صورت یک نقطه رسم کرده‌ایم.



شکل ۲.۱: گراف جهت‌دار $H = (N(H), A(H), \psi(H))$

برای راحتی کار، اغلب گراف بدون جهت $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ به صورت زوج مرتب

(N, A) نشان داده می‌شود که در آن

$N = N(G)\,,$

$A = \{\{u, v\} \mid \psi_G(a) = \{u, v\}\,,\, a \in A(G)\}$

است. به طور مشابه گراف جهت‌دار $G = (N(G), A(G), \psi_G)$ نیز به صورت زوج مرتب (N, A) نشان داده می‌شود که در آن

$N = N(G)\,,$

$A = \{(u, v) \mid \psi_G(a) = (u, v)\,,\, a \in A(G)\}$

است. در این صورت برای تعریف گراف G نیازی به بیان تابع وقوع ψ_G نخواهد بود. N و A را به ترتیب مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های گراف G می‌نامیم. به عنوان مثال گراف داده شده در شکل ۱.۱ به صورت $G = (N, A)$ تعریف می‌شود که در آن

$N = \{u, v, w, x, y, z\},$

$A = \{\{u, v\}, \{v, y\}, \{z, v\}, \{v, x\}, \{u, w\}, \{y, u\}, \{y, z\}, \{z, w\}\}$

است.

تعریف ۳.۱.۱. گراف جهت‌دار $G = (N, A)$ را یک شبکه گوییم، اگر امکان وجود جریان در امتداد یال‌ها باشد.

تعریف ۴.۱.۱. در گراف بدون جهت $G = (N, A)$، دو رأس $u, v \in N$ را مجاور گوییم، هرگاه $\{u, v\} \in A$. مجموعه رئوس مجاور با رأس $u \in N$ را، همسایگی u می‌نامیم و با $N(u)$ نشان می‌دهیم

$$N(u) = \{v \in N : \{u, v\} \in A\}.$$

تعداد اعضای مجموعه‌ی $N(u)$، یعنی $|N(u)|$، به عنوان درجه‌ی رأس $u \in N$ در نظر گرفته می‌شود.