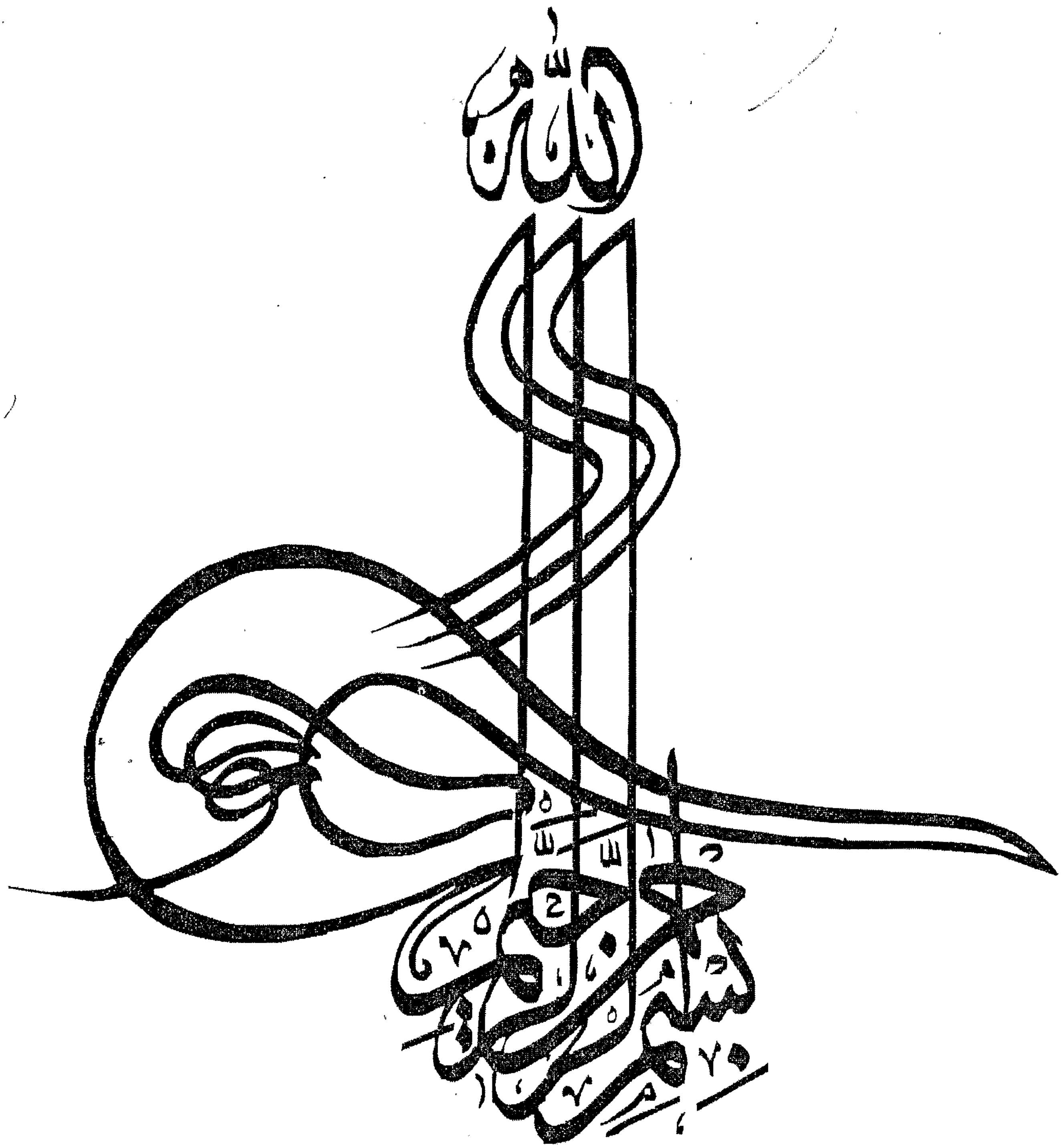

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در ریاضی کاربردی

عنوان:

مساله معکوس مقدار ویژه در مورد برخی ماتریسهای خاص

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سهیلی

تحقیق و نگارش:

سید میثم مهدوی شهری

بهار ۱۳۸۷

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان **مساله معکوس مقدار ویژه در مورد برخی ماتریسهای خاص** قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی – گرایش آنالیز عددی توسط دانشجو **سید میثم مهدوی شهری** تحت راهنمایی استاد پایان نامه **علیرضا سهیلی** تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

سید میثم مهدوی شهری

این پایان نامه 6 واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۷/۲/۲۴ توسط هیئت داوران بررسی و درجه عالی به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	**امضاء**	**تاریخ**
استاد راهنما:	دکتر علیرضا سهیلی		
داور 1:	دکتر پرویز سرگلزایی		
داور 2:	دکتر اکبر گلچین		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکترحسن میش مست		

۱۳۸۷/۶/۱

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سید میثم مهدوی شهری تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: سید میثم مهدوی شهری

امضاء

تقدیم به:

پدر مهربانم،

مادر فداکارم

و

همسر عزیزم

سپاسگزاری

از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سهیلی که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر می نمایم، همچنین از آقایان دکتر گلچین و دکتر سرگلزایی به عنوان داور این پایان نامه و دکتر میش مست نماینده تحصیلات تکمیلی قداردانی می کنم.

قدرانی و سپاسگذاری مخصوص خود را تقدیم به خانواده عزیزم می نمایم که در طول تحصیل همواره مشوق و پشتیبان من بودند، و با صبر و تحمل مرا یاری کردند.

از دوستان عزیزم آقایان هادی محمدی، مرتضی بیشه ای نیاسر، علیرضا رستمی، جاهد نقی پور، باقر مرادی، محسن مهرآوان، محمد هادی رستمی، مهدی صفی نژاد، سید علی احمدیان، احسان کرابی، سهیل سلحشور، عباس اکرمی و دیگر عزیزانی که مرا در انجام این امر یاری رساندند تشکر و قدردانی می کنم.\

چکیده:

در یک مساله مستقیم، مقادیر ویژه، بردارهاي ویژه، مقادیر منفرد و یا بردارهاي منفرد يك ماتریس مشخص و معلوم محاسبه مي شوند.

هدف اصلي در مساله معکوس مقدار ویژه، به دست آوردن پارامترهاي فيزيكي يك سيستم مشخص از روي رفتارهاي دینامیکي آن مي باشد.

دو سوال اساسی برای مساله معکوس مقدار ویژه وجود دارد، بحث تئوري در مورد حل پذيري و بحث عملي در مورد محاسبه پذيري مساله. هردو سوال مشكل و پيچيده هستند.

در این پایان نامه ابتدا به بیان و دسته بندي مساله معکوس مقدار ويژه خوايم پرداخت و سپس براي چند نوع خاص از مساله معکوس مقدار ویژه روش حل عددي آنها را مورد بررسي خواهیم داد. در انتهاي هر فصل الگوریتم ها و مثالهاي عددي مربوط به آن آمده است.

محتواي پایان نامه شامل موارد زیر مي شود:

مقدمه اي بر مساله معکوس مقدار ویژه، مساله معکوس مقدار ويژه براي ماتريسهاي انعكاسي، دو مساله معکوس مقدار ویژه براي نوع خاصي از ماتریسها، مساله معکوس مقدار ويژه كمترين مربعات براي مساله معکوس مقدار ویژه جمعي.

كلمات كليدی: مساله معکوس مقدار ویژه – ماتریسهای انعکاسی – روش کمترین مربعات

فهرست مندرجات

۱ مقدمه‌ای بر مسأله معکوس مقدار ویژه ۴

۱—۱ مقدمه ۵

۱—۲ طبقه بندی مسأله معکوس مقدار ویژه ۹

۱—۲—۱ مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره $(MVIEP)$ ۱۰

۱—۲—۲ مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری شده $(PIEP)$ ۱۱

۱—۲—۳ مسأله معکوس مقدار ویژه ساختار یافته $(SIEP)$ ۱۷

۱—۲—۴ مسأله معکوس مقدار ویژه جزئی بیان شده $(PDIEP)$ ۲۲

۱—۲—۵ مسأله معکوس مقدار ویژه تخمین کمترین مربعات $(LSIEP)$ ۲۳

۲ مسأله معکوس مقدار ویژه برای ماتریسهای انعکاسی ۲۵

۲—۱ مقدمه ۲۶

۲—۲ شرایط حل پذیری مسأله ۱ برای $S = R_r^{n\times n}(P)$ ۳۰

۲—۳ مجموعه جواب مسأله ۱ . . . . ۳۴

۲—۴ به‌دست آوردن جواب مسأله ۲ . . . . ۳۶

۲—۵ الگوریتم و نتایج عددی ۴۰
۲—۵—۱ مثالها ۴۱
۲—۵—۲ برنامه ها ۴۴

۳ دو مسأله معکوس مقدار ویژه برای یک نوع خاص از ماتریسها ۴۵

۳—۱ مقدمه ۴۶

۳—۲ خواص ماتریس A_n ۴۸

۳—۳ جواب مسائل ۱ و ۲ . . . . ۵۴

۳—۴ الگوریتمها و نتایج عددی ۵۸
۳—۴—۱ مثالها ۵۹
۳—۴—۲ برنامه‌ها ۶۵

۴ مسأله معکوس مقدار ویژه تخمین کمترین مربعات ۶۸

۴—۱ مقدمه ۶۹

۴—۲ مسأله معکوس مقدار ویژه کمترین مربعات ۷۰
۴—۲—۱ مسأله معکوس مقدار ویژه کمترین مربعات نوع اول ۷۱
۴—۲—۲ مسأله معکوس مقدار ویژه کمترین مربعات نوع دوم ۷۲

۴–۳ ارتباط بین دو مسأله کمترین مربعات ۷۲

۴–۴ روش تصویر و پادتصویر ۷۵

۴–۵ روش نیوتن برای حل مسأله ۱ . . . . ۷۷

۴–۶ الگوریتم و نتایج عددی ۸۰

۴–۶–۱ الگوریتم ۸۰

۴–۶–۲ نتایج عددی ۸۱

۴–۶–۳ مثالها ۸۲

۴–۶–۴ برنامه‌ها ۸۴

مراجع ۸۷

A. تعاریف و قضایای کاربردی ۸۹

B. واژه‌نامه ۹۱

فصل ۱

مقدمه‌ای بر مسألهٔ معکوس مقدار ویژه

۱—۱ مقدمه

همراه با هر مسأله می‌توان یک مسأله معکوس برای آن در نظر گرفت، بدین معنا که اگر در مسأله اولیه جای معلومات و مجهولات را عوض کنیم مسأله حاصل در حقیقت معکوس مسأله مذکور می‌باشد. به‌عنوان مثال می‌توان مسائل بهینه‌سازی را نوعی از مسأله معکوس به‌شمار آورد.

در این پایان نامه به نوع خاصی از مسأله معکوس خواهیم پرداخت که آن را مسأله معکوس مقدار ویژه می‌نامیم.

در فصل اول ابتدا مسأله معکوس مقدار ویژه را معرفی کرده سپس با طبقه‌بندی انواع مختلف آن، حالت کلی و مدلهای کاربردی هر یک را به‌طور مختصر ارائه خواهیم کرد.

در فصل ۲ مسأله معکوس مقدار ویژه برای ماتریسهای انعکاسی مورد بررسی قرار گرفته و روش حل و مثالهای عددی مربوط به آن ارائه شده است.

در فصل ۳ دو مسأله معکوس مقدار ویژه برای نوع خاصی از ماتریسها بیان شده و روش حل و الگوریتم و مثالهای عددی در پایان فصل آورده شده است.

و در نهایت در فصل چهارم دو روش تکراری برای حل یک نوع از مسأله معکوس مقدار ویژه ارائه شده و با ترکیب این دو روش، روشی ترکیبی ایجاد شده است. در انتهای فصل نیز با ارائه مثالهایی به مقایسه این سه روش پرداخته شده است.

توجه به این نکته ضروری است که طبقه بندی که در این فصل در مورد مسأله معکوس مقدار ویژه ارائه می‌شود یک نگرش اجمالی و کلی بر مسأله معکوس مقدار ویژه می باشد و این مسائل فقط به همین موارد محدود نمی‌شوند. برای هر نوع از مسائل، روشهای حل گوناگونی وجود دارد که به‌دلیل وسعت و حجم زیاد آنها از آوردن آن در این فصل صرف نظر شده است. البته با توجه به پیچیدگی و کاربرد محدود برخی از این مسائل هنوز روش حلی برای آنها ارائه نشده است و برای بعضی از این مسائل مشخص نیست که تحت چه شرایطی دارای جواب هستند، و حتی در برخی موارد اصولاً مورد مطالعه و بررسی قرار نگرفته‌اند. برای مطالعه و آشنایی بیشتر با انواع مسأله معکوس مقدار ویژه و روشهای حل آنها می‌توانید به مرجع [۴] مراجعه نمایید. در این کتاب اطلاعات نسبتاً جامعی در مورد مسأله معکوس مقدار ویژه آورده شده است، همچنین لیست کاملی از مقالات و مراجعی که تا زمان انتشار کتاب در مورد مسأله معکوس مقدار ویژه چاپ شده‌اند وجود دارد.

در مباحث مربوط به جبر خطی و معادلات دیفرانسیل اغلب با مسائلی مواجه می‌شویم که منجر به ایجاد ماتریس خاصی می‌شود که این ماتریس ممکن است ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات و یا مربوط به ضرایب حاصل از گسسته‌سازی معادلات مربوط به یک معادله دیفرانسیل خاص باشد و در بیشتر این موارد یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (مقادیر طیفی) این ماتریس مورد نظر می‌باشد، اینگونه از مسائل را اصطلاحاً یک مسأله مستقیم [1] می‌نامیم.

حال مسأله را به شکل دیگری درنظر بگیرید، فرض کنید مقادیر طیفی یک ماتریس خاص در دسترس باشد و مسأله، یافتن این ماتریس با شرایط از پیش تعیین شده باشد، به عبارت دیگر در این مسأله به‌جای یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای یک ماتریس معلوم به دنبال ماتریسی هستیم که مقادیر طیفی آن مشخص هستند، این نوع مسأله را **مسأله معکوس مقدار ویژه** [2] می‌نامیم.

بنابراین در یک مسأله مقدار ویژه (مسأله مستقیم) هدف یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس معین مانند A می‌باشد، که برای حل اینگونه از مسائل روشهای عددی گوناگونی وجود دارد، به عنوان مثال می‌توان به روشهایی چون تعیین چندجمله‌ای مشخصه، روشهای تبدیل به ماتریس ساده‌تر، روش QR، روش LR و روشهای شناخته شده دیگر اشاره کرد.

اما هدف از یک مسأله معکوس مقدار ویژه در حالت کلی به‌دست آوردن یک ساختار ماتریسی خاص می‌باشد به طوری که مقادیر طیفی آن داده شده اند، این داده های طیفی ممکن است شامل اطلاعاتی کامل یا جزئی از مقادیر ویژه یا بردارهای ویژه باشد. به عبارت دیگر، در مسئله های مستقیم معمولا یک ماتریس $n \times n$، $A = (a_{ij})$ معلوم است و هدف محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس می باشد، درحالیکه در یک مسأله معکوس مقادیر ویژه هدف ساختن یک ماتریس مانند $A = (a_{ij})$ با ساختار از پیش تعیین شده می‌باشد که مقادیر طیفی معینی دارند.

به عنوان مثال مجموعه $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq R$ داده شده است و هدف یافتن یک ماتریس ژاکوبی J، به‌گونه‌ای است که مقادیر ویژه آن، $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ می‌باشند.

منشأ و کاربرد مسأله معکوس مقدار ویژه را در حوزه‌هایی چون فیزیک، مکانیک، طراحی کنترل [3]،

[1] *Direct Problem*
[2] *Inverse Eigenvalue Problem*
[3] *Control Design*

سیستمهای تطبیق[۴]، تحلیل اجزأ اولیه[۵]، تحلیل ساختار سیستمهای دینامیکی و بسیاری از حوزه‌های علوم مختلف دیگر می‌توان یافت.

به خاطر کاربرد وسیع و دامنه گسترده‌ای که مسائل معکوس مقدار ویژه دارند، مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده است و روشهای گوناگونی برای حل این مسائل ارائه شده است با این وجود برای بسیاری از این مسائل هنوز معلوم نیست که آیا جوابی موجود هست و یا اگر موجود است چگونه باید این جواب را یافت.

برای در نظر گرفتن مسأله معکوس مقدار ویژه با توجه به ساختار کلی اینگونه مسائل دو جنبه اساسی را باید مدنظر داشت:

اولین مورد، مبحث تئوری، قابلیت حل (حل‌پذیری) مسأله و دومین مورد بحث عملی روی محاسبه پذیری مسأله است.

موضوع اصلی مورد بحث در حل‌پذیری مشخص نمودن شرایط لازم و کافی است که تحت آن، مسأله معکوس مقدار ویژه دارای جواب است، و هدف محاسبه‌پذیری به‌دست آوردن فرایندی است که با استفاده از داده‌های طیفی معلوم و شدنی یک ماتریس با شرایط خاص ساختاری و با استفاده از روشهای عددی ایجاد می‌شود.

وابسته به کاربرد، مسأله معکوس مقدار ویژه به شکلهای مختلفی بیان می‌شود و اغلب لازم است که مسأله به مجموعه خاصی از ماتریسها محدود شود، بویژه مجموعه ماتریسهایی که ساختار مشخصی دارند زیرا یک مسأله بدون محدودیت روی ساختار ماتریس آن کاربرد و جذابیت چندانی ندارد و در اغلب مسائل عملی نیز با ساختارهای خاص ماتریسی مواجه هستیم.

به عنوان مثال اگر مسأله یافتن ماتریسی $n \times n$، باشد که مقادیر ویژه آن $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}$ داده شده‌اند، اولین و ساده‌ترین جواب مسأله ماتریسی قطری است که عناصر قطری آن $\{\lambda_۱, \ldots, \lambda_n\}$ می‌باشند.

بنابراین در یک مسأله معکوس مقدار ویژه باید دو گروه از محدودیتها یا پیش‌فرضها معرفی شوند، پیش‌فرض اول آن قیدهایی است که مربوط به داده های طیفی می‌شود، و پیش‌فرض دوم آن قیدهایی که مربوط به ساختار ماتریس است.

متناظر با یک مسأله معکوس مقدارویژه ممکن است به همه یا قسمتی از اطلاعات مربوط به داده های طیفی برای حل آن دسترسی داشته باشیم، و این موضوع ایجاب می کند که روشهای متفاوتی برای حل این‌مسائل

---

[۴] *System Identication*

[۵] *Principal Component Analysis*

استفاده شود. در حالت کلی روشهای حل مسأله معکوس مقدار ویژه را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود:

۱) گروه اول شامل الگوریتمها و روشهایی است که به‌طور مستقیم جواب واقعی مسأله را به‌دست می‌آورند در این روشها جواب به‌دست آمده بدون خطا است.

۲) گروه دوم شامل روشهایی است که با استفاده از روشهای تکراری تخمینی برای جواب واقعی مسأله می‌یابیم.

برای هر کدام از دو گروه فوق الگوریتم های مختلفی وجود دارد.

با توجه به اینکه جواب یک مسأله معکوس مقدار ویژه با کدامیک از دو روش فوق محاسبه شود این جواب ممکن است به طور کامل سیستم را توصیف کند(گروه اول). یا یک تقریب از رفتار سیستم را ارائه نماید(گروه دوم).

همانطور که اشاره شد برای یک مسأله معکوس مقدار ویژه دو نوع محدودیت یا پیش‌فرض مورد نیاز است و با توجه به اینکه یک نوع از این محدودیتها مربوط به ساختار ماتریس است و ماتریسها ساختارهای متنوعی دارند که هر یک دارای خواص منحصربه‌فرد می‌باشند و همچنین با توجه به محدودیت دوم که مربوط به عناصر طیفی ماتریس می‌باشد و ممکن است به صورت کامل یا جزئی داده شده باشند، بنابراین ترکیب کردن حالتهای مختلف این دو محدودیت منجر به ایجاد انواع گوناگونی از مسأله معکوس مقدار ویژه می شود که در بخش بعد به دسته‌بندی آنها می‌پردازیم.

ابتدا علائم مورد نیاز را معرفی می‌کنیم:

F: معرف میدان اسکالر است و معمولاً $F = R$ یا $F = C$ درنظر گرفته می‌شود.

$\sigma(A)$: نشان دهنده طیف ماتریس A است.

$\|.\|$: نشان دهنده نرم ۲ یک بردار یا نرم فروبنیوسی یک ماتریس می‌باشد.

$$R(n) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} | a_{ij} \in R\}, \quad S(n) = \{A \in R(n) | A = A^T\},$$

$$D_R(n) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} | a_{ij} \in R, a_{ij} = 0,\ i \neq j\} = \{A | A = diag(a_{11}, ..., a_{nn}), a_{ij} \in R\},$$

$$D_C(n) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} | a_{ij} \in C, a_{ij} = 0,\ i \neq j\} = \{A | A = diag(a_{11}, ..., a_{nn}), a_{ij} \in C\},$$

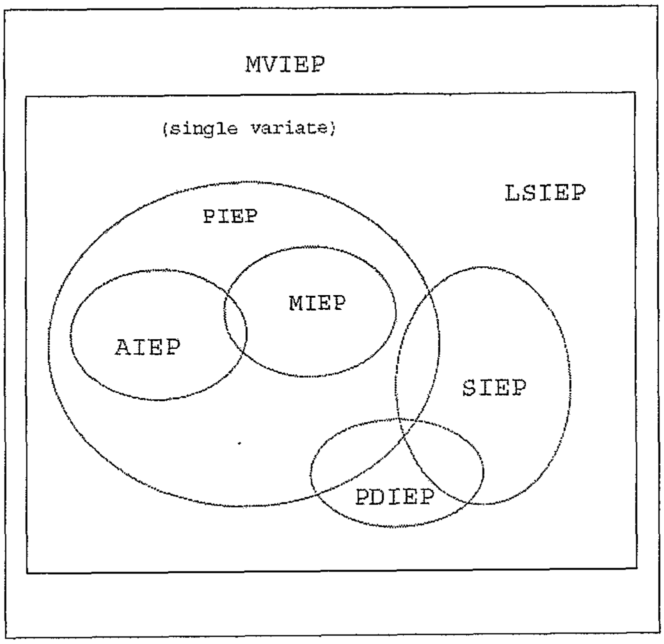
$$C(n) = \{A = (a_{ij})_{n\times n} | a_{ij} \in R(n)\}, \quad H(n) = \{A \in C(n) | A = A^*\},$$

$$O(n) = \{A \in R(n) | AA^T = I\}.$$

N: نشان دهنده یک زیر مجموعه دلخواه از $R(n)$ یا $S(n)$ است.

۱—۲ طبقه بندی مسأله معکوس مقدار ویژه

باتوجه به‌وسعت و گستردگی مسأله معکوس مقدار ویژه بررسی وجود جواب در حالت کلی غیرممکن است، بنابراین طبقه‌بندی این مسائل لازم به‌نظر می‌رسد. در این بخش وضعیت‌های مختلف مسأله معکوس مقدار ویژه را بیان می‌کنیم و به دسته‌بندی این مسئله‌ها می‌پردازیم. شکل زیر یک طبقه‌بندی کلی از مسأله معکوس مقدار ویژه را بیان می‌کند. اما باید توجه داشته باشیم که تمام مسائل معکوس مقدار ویژه محدود به این طبقه بندی نمی شوند.



شکل ۱—۱: طبقه‌بندی مسأله معکوس مقدار ویژه

در شکل فوق علائم اختصاری به‌کاربرده شده به شرح زیر می‌باشند که در بخشهای بعدی نگاهی اجمالی به هر یک خواهیم داشت.

$MVIEP$[۶] : مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره.

$SVIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه تک متغیره[۷].

$PIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری.[۸]

$SIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه ساخت یافته[۹].

---

[۶] *Multivariate Inverse Eigenvalue Problem*
[۷] *Single Variate IEP*
[۸] *Parameterized IEP*
[۹] *Structured IEP*

$AIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه جمعی .[10]

$MIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه ضربی .[11]

$PDIEP$: مسأله معکوس مقدار ویژه جزئی بیان شده.[12]

$LSIEP$: مسألهمعکوس مقدار ویژه کمترین مربعات.[13]

۱—۲—۱ مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره $(MVIEP)$

این مجموعه شامل پهنه وسیعی از مسائل معکوس مقدار ویژه است. تحقیقات و مطالعات که تا کنون انجام شده است اغلب روی مدلهای تک متغیره متمرکز شده و به‌علت کاربرد پیچیدگی و کمتر، در مورد مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره مطالعات زیادی صورت نگرفته لذا مطالعه این مدل هنوز می تواند به عنوان یک موضوع قابل مطالعه و باز در نظر گرفته شود.

حالت کلی یک مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره به صورت زیر است:

تعریف ۱—۱ (مسأله مقدار ویژه چند متغیره):

اسکالرهای حقیقی $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ و بردار حقیقی $X \in R^n$ را به‌گونه‌ای بیابید که معادله زیر برقرار باشد.

$$AX = \Lambda X, \quad \|X_i\| = 1, \quad i = 1, 2, ..., m$$

که $A \in S(n)$ یک ماتریس مثبت معین بلوکی به‌فرم زیر است

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{12} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = diag(\lambda_1 I_{n_1}, \cdots, \lambda_m I_{n_m}).$$

I_{n_i} نمایانگر ماتریس همانی از اندازه n_i است و ماتریس بلوکی $X = [X_1^T, \ldots, X_m^T]^T$.

بنابراین با توجه به مسأله فوق مسأله معکوس مقدار ویژه چند متغیره را می‌توان بدین صورت در نظر گرفت

[10] Additive IEP

[11] Multiplicative IEP

[12] Partially Described IEP

[13] Least Square IEP

که هدف یافتن ماتریس A با بلوکهای ماتریسی است که هر یک دارای ساختار مشخص با مقادیر ویژه و بردارهای ویژه معین می‌باشند.

۱ــ۲ــ۲ مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری شده $(PIEP)$

یکی از انواع مهم مسائل معکوس مقدار ویژه نوع پارامتری شده می‌باشد زیرا بسیاری از مسائل معکوس مقدار ویژه را می‌توان به‌صورت یک مسأله پارامتری شده بیان کرد، حالت کلی این مسأله به‌فرم زیر است:

تعریف ۱ــ۲ (مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری شده $(PIEP)$):

خانواده ماتریسهای $A(C) \in M$ که در آن $C = [c_1, ..., c_m]$ و مجموعه اسکالرهای $\Omega \subset F$ داده‌شده‌اند، پارامتر C را به‌گونه‌ای بیابید که

$$\sigma(A(C)) \subset \Omega$$

در تعریف فوق M مشخص کننده زیر مجموعه‌ای از ماتریسهای خاص می‌باشد که دارای خواص ساختاری مشخصی هستند، به عنوان مثال مجموعه ماتریسهای حقیقی یا مختلط، متقارن یا هرمیتی و...

Ω مجموعه‌ای از اسکالرها است که ممکن است به یکی از صورتهای زیر باشد:

۱) $\Omega = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ که در آن n مساوی با بعد ماتریس $A(C)$ است، در این حالت مقادیر ویژه به‌طور کامل داده شده‌اند.

۲) $\Omega = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ که در آن n از بعد A بزرگتر است، در این حالت نیز طیف $A(C)$ محدود شده ولی به‌طور نسبی در مجموعه متناهی از اعداد، آزاد می‌باشد.

۳) $\Omega = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ که در آن n از بعد A کوچکتر است، این حالت مربوط به نوع دیگری از مسأله معکوس مقدار ویژه می‌باشد که در بخش ۱ــ۲ــ۴ به معرفی آن می‌پردازیم.

به عنوان یک مثال ساده از مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ــ۱:

فرض کنید $R \supseteq \{\lambda_i\}_{i=1}^{3}$ داده شده اند می‌خواهیم c_1, c_2, c_3 را طوری بیابیم که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1 + c_2 \\ c_1 & 2 & c_3 + c_2 \\ c_1 + c_2 & c_3 + c_2 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ باشد.

قابل ذکر می‌باشد که ممکن است تعداد پارامترهای مجهول $c_1, ..., c_m$ با تعداد اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ برابر نباشد، همچنین باید توجه داشت که در یک مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری، ممکن است پارامترهای مجهول $c_1, ..., c_m$ به‌طور صریح در عناصر دسته ماتریسهای $A(C)$ ظاهر شوند، حل کردن و یافتن جواب یک مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری در این شکل بسیارمشکل می‌باشد. مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری یکی از وسیعترین انواع مسأله معکوس مقدار ویژه است که در اینجا تنها به بیان چند مورد از آنها اکتفا می کنیم.

مدل ۱—۱:

فرض کنید $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq R(n)$ و اعداد حقیقی $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ داده شده باشند. همچنین فرض کنید $A(C) = A_0 + \sum_{i=1}^n c_i A_i$، در این مدل هدف یافتن پارامترهای مجهول $C = (c_1, ..., c_m)$ می‌باشد به‌طوری که

$$\sigma(A(C)) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n.$$

مدل ۱—۲:

فرض کنید $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq S(n)$ و اعداد حقیقی $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ داده شده باشند. همچنین فرض کنید $A(C) = A_0 + \sum_{i=1}^n c_i A_i$، هدف یافتن پارامترهای مجهول $C = (c_1, ..., c_m)$ می‌باشد به طوری که

$$\sigma(A(C)) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n.$$

مدل ۱—۳:

اگر $A \in C(n)$ و برای $i = 1, 2, \ldots, k$، $B_i \in C^{n\times m_i}$، $D_i \in C^{l_i\times n}$، ماتریس و اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ داده شده باشند، هدف یافتن $X_i \in C^{m_i\times l_i}$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$ به‌طوری‌که

$$\sigma(A + \sum_{i=1}^{k} B_i X_i D_i) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n.$$

در مدل ۱—۳، اگر $k = 1$، این مدل به یکی از وضعیتهای تعریف شده قبلی تبدیل می شود.

دو نوع خاص از مسأله معکوس مقدار ویژه پارامتری وجود دارد که با توجه به کاربرد وسیعتر معمولاً به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند. و عبارتند از:

تعریف ۱—۳ (مسأله معکوس مقدار ویژه جمعی $(AIEP)$):

ماتریس $A \in M$ و اسکالرهای $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset F$ و یک مجموعه از ماتریسهامانند N داده‌شده‌اند، ماتریس

$X \in N$ را به‌گونه‌ای بیابید که

$$\sigma(A+X)=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$$

در این مدل بهترین حالت هنگامی رخ می‌دهد که تعداد معلومات متناظر با تعداد مجهولات باشد. در غیر این صورت روش کلاسیک برای تحلیل اینگونه مسائل روش حداقل مربعات می باشد. در فصل ۴ به بررسی این حالت خواهیم پرداخت و الگوریتم و روش حل مربوط به آن را ارائه می‌کنیم.

بعضی از مدلهای مهمتر مسأله معکوس مقدار ویژه جمعی عبارتند از:

مدل ۱ــ۴:

ماتریس $A \in R(n)$ و مجموعه $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \in R$ داده شده اند. هدف یافتن مقادیر $\{c_i\}_{i=1}^{n} \in R$ می‌باشد به طوری که

$$\sigma(A+X)=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n},\ X=diag(c_1,...,c_n)$$

مدل ۱ــ۵:

فرض کنیم $A \in S(n)$ و $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \in R$ داده شده اند. هدف یافتن مقادیری از $\{c_i\}_{i=1}^{n} \in R$ است به گونه‌ای که

$$\sigma(A+X)=\{\lambda_i\}_{i=1}^{n},\ X=diag(c_1,...,c_n)$$

هر یک از مدلهای فوق را می توان در میدان اعداد مختلط درنظر گرفت، به عنوان مثالی از کاربرد مسائل فوق به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ــ۲:

در بسیاری از مسائل مهندسی در معادلات دیفرانسیل با معادلاتی از نوع زیر مواجه می شویم:

$$-u''(x)+p(x)u(x)=\lambda u(x),\ u(0)=u(\pi)=0$$

که تابع پتانسیل $p(x)$ نا معلوم ولی مقادیر ویژه آن معلوم هستند، با انتخاب $h=\frac{\pi}{n+1}$ و استفاده از روش