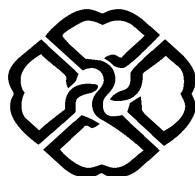


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

بررسی گرمایش تاج خورشید به وسیله اختلاط فازی امواج آلفن

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک نظری (گرایش نجوم و اختر فیزیک)

نویسنده:

زانبار ابراهیمی

استاد راهنما:

دکتر کیومرث کرمی

اسفند ماه ۱۳۸۷

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات،

ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این

پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه کردستان است.

این اثر را تقدیم می کنم به

پدرم،

مادرم،

آرینا، آرش، مازیار

و شایسته عزیز،

که همواره پشتیبان من در زندگیم بوده اند.

تشکر و قدر دانی

صمیمانه از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر کیومرث کرمی
به پاس زحمات و راهنمایی های ارزنده ایشان تشکر می کنم.

چکیده

از زمان کشف دمای میلیون کلونی تاج خورشید حدود ۶۶ سال می گذرد. محققین پیوسته در جستجوی دلایل ممکن برای وجود چنین دمایی در تاج خورشید بوده اند. از جمله نظریه های موجود برای حل این مساله، میرایی امواج مغناطویدرودینامیکی می باشد که در سالهای اخیر پس از کشف وجود این امواج در تاج خورشید، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در این تحقیق میرایی امواج آلفن به وسیله اختلاط فاز برای یک تیغه شار مغناطیده تحت شرایط تاج مورد بررسی قرار می گیرد. محاسبات عددی ما نشان می دهند که آهنگ های اتلاف بدست آمده، با مشاهدات تریس در توافق خوبی به سر می برند.

کلمات کلیدی: تاج خورشید، امواج مغناطویدرودینامیک، اختلاط فاز

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: مقدمه

۱	۱-۱ ساختار تاج خورشید
۴	۲-۱ مسأله گرمایش تاج خورشید
۶	۳-۱ اهمیت مطالعه امواج آلفن

فصل دوم: امواج مغناطوهیدرودینامیک در تاج خورشید

۸	۱-۲ معادلات اساسی مغناطوهیدرودینامیک
۹	۲-۲ معادلات مغناطوهیدرودینامیک برای تاج خورشید
۱۱	۳-۲ امواج مغناطوهیدرودینامیک
۱۱	۱-۳-۲ معادلات حرکت
۱۵	۲-۳-۲ امواج تراکمی
۱۷	۳-۳-۲ امواج غیر تراکمی
۱۹	۴-۲ امواج مغناطوهیدرودینامیک در لوله های شار مغناطیسی تاج خورشید

فصل سوم: اختلاط فازی امواج آلفن

۲۶	۱-۳ امواج آلفن برشی
۲۷	۲-۳ اختلاط فازی امواج آلفن برشی
۳۰	۳-۳ میرایی امواج آلفن برشی بر اثر اختلاط فازی
۳۰	۱-۳-۳ معادلات حرکت
۳۲	۲-۳-۳ امواج رونده
۳۴	۳-۳-۳ امواج ایستاده
۳۸	۴-۳ مروری بر برخی از مطالعات صورت گرفته تا کنون

فصل چهارم: اختلاط فازی پالس آلفنی برشی ایستاده

۵۳	۱-۴ مدل مورد بررسی
۵۵	۲-۴ معادلات حرکت
۵۸	۳-۴ شرایط مرزی و اولیه
۵۹	۴-۴ روش حل عددی
۶۳	۵-۴ نتایج عددی
۷۶	۶-۴ خلاصه مطالب و نتیجه گیری

۷۸

مراجع

فصل اول

مقدمه

۱-۱ ساختار تاج^۱ خورشید

اتمسفر خورشید به چهار لایه تقسیم می شود که به ترتیب ارتفاع از سطح خورشید عبارتند از: شید سپهر^۲ به ضخامت ۵۰۰ کیلومتر، فام سپهر^۳ به ضخامت ۱۰۰۰ کیلومتر، ناحیه گذار^۴ به ضخامت ۱۰۰ کیلومتر و در نهایت، تاج که ضخامت این لایه در حدود ۲ برابر شعاع خورشید است. آنچه که ما با چشمانمان از خورشید می بینیم نور تابشی از لایه شید سپهر آن است. شدت نور مرئی در تاج خورشید یک میلیون بار از شید سپهر کمتر است. بنابراین مشاهده تاج تنها در مواقع خورشید گرفتگی که سطح خورشید توسط قرص ماه پوشانده می شود، امکان پذیر است. البته باید در نظر داشته باشیم که نور مرئی که از تاج می بینیم به دلیل تابش خود تاج نبوده بلکه از پراکنده کردن نور شید سپهر حاصل می شود. شدت نور تابشی تاج خورشید در نواحی ماوراء بنفش و اشعه ایکس از شید سپهر بیشتر است. بنابراین برای مشاهده تاج بایستی از چنین فیلتر هایی استفاده کنیم. از آنجا که اتمسفر زمین جاذب نور در این طول موج ها می باشد، تنها راه رصد تاج خورشید، استفاده از تلسکوپ های فضایی است. ماهواره های سوهو^۵ و تریس^۶ دارای تلسکوپ هایی هستند که برای مشاهده تاج خورشید در طول موج های ماوراء بنفش طراحی شده اند.

^۱ - Corona

^۲ - Photosphere

^۳ - Chromosphere

^۴ - Transition Region

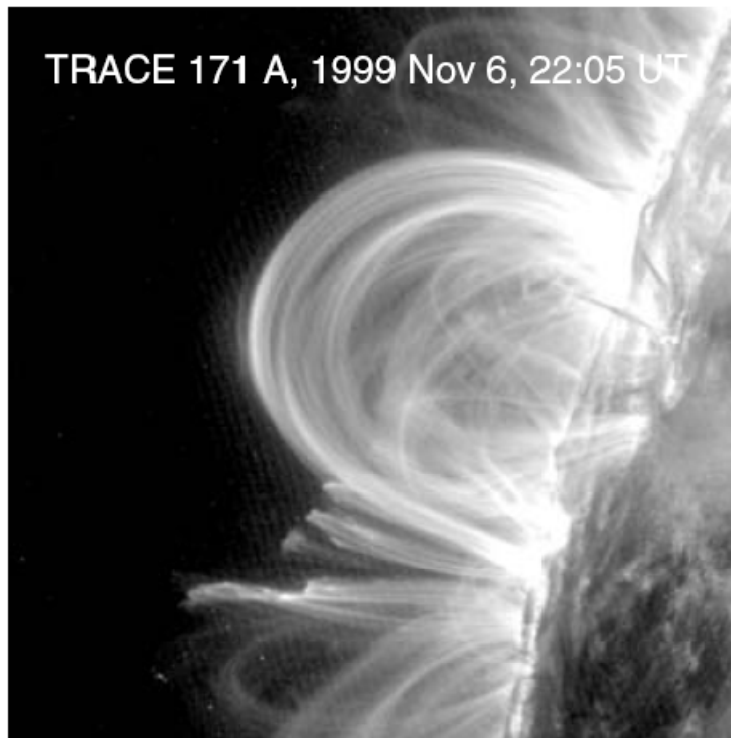
^۵ - SOHO (Solar and Heliospheric Observatory)

^۶ - TRACE (Transition Region and Coronal Explorer)

تاج خورشید در راستای زاویه قطبی به سه منطقه تقسیم می شود: ۱- نواحی فعال، که در حوالی استوای خورشید قرار دارند، ۲- نواحی خاموش، که در نواحی دورتر از استوای خورشید قرار دارند، ۳- حفره های تاج، که در قطب های خورشید قرار دارند. آنچه که این نواحی را از یکدیگر متمایز می سازد ساختار میدان مغناطیسی آنها و در نتیجه آن، نوع فعالیت هایی است که در آنها رخ می دهد. تاج خورشید یک محیط مغناطیسی است که پلاسما در آن شارش یافته است. میدان مغناطیسی خورشید کنترل کننده دینامیک و توپولوژی تمام پدیده های مربوط به تاج می باشد. از پارامتر های مهم و تعیین کننده در تاج خورشید، پارامتر β ، نسبت فشار حرارتی به فشار مغناطیسی می باشد. در بیشتر نواحی تاج مقدار این پارامتر کوچکتر از یک است [۱] که در نتیجه آن، محدودیت شدیدی در توزیع پلاسما در تاج به وجود می آید، به این معنا که ذرات پلاسما تنها در راستای خطوط میدان مغناطیسی می تواند شارش یابد. در نواحی $\beta < 1$ گیر افتادگی ذرات باردار پلاسما حول خطوط میدان مغناطیسی باعث به وجود آمدن ساختار هایی می شود که تاج خورشید را به شدت ناهمگن می سازند. این ساختار ها اتمسفر خورشید را به زیر اتمسفر هایی تقسیم می کنند که هر کدام از آنها بایستی به صورت مجزا مورد بررسی قرار گیرد. دو نوع میدان در تاج خورشید یافت می شود، میدان های بسته که از سطح خورشید شروع شده و به سطح خورشید ختم می شوند و میدان های باز که از سطح خورشید شروع شده و تا فضای بین سیاره ای ادامه می یابند. در نتیجه، ساختار ها به طور کلی به دو نوع باز و بسته تقسیم می شوند. ساختار های باز معمولاً در حفره های تاج یافت می شوند و منشأ تولید باد های خورشیدی هستند و ساختار های بسته عمدتاً در نواحی فعال خورشید تشکیل می شوند. چگالی پلاسما در ساختار های باز معمولاً از ساختار های بسته کمتر است، به این دلیل که پلاسما موجود در این نواحی، در راستای خطوط میدان به نواحی بیرونی ساختار رانده می شود [۲]. باد های خورشیدی از چنین فرایندی به وجود می آیند. از جمله مهمترین ساختار های بسته در تاج خورشید، حلقه های تاج^۱ نام دارند که در نواحی فعال و گاهی در نواحی خاموش نیز دیده می شوند. حلقه های تاج، لوله های شار^۲ مغناطیسی به شکل استوانه های خمیده هستند که از اندرکنش میدان مغناطیسی و پلاسما تشکیل یافته اند. دو سر این حلقه ها به دو قطب مغناطیسی متضاد بر روی شید سپهر که معمولاً لکه های خورشیدی هستند، ختم می شوند. چنین ساختارهایی را می توان در شکل (۱-۱) دید. طول این لوله ها در نواحی فعال از ۱۰ تا ۱۰۰

^۱ - coronal loop

^۲ - flux tube



شکل ۱-۱: یکی از نواحی فعال خورشید که از تعداد زیادی حلقه تشکیل شده است.

(منبع [۲]: اشواندن ۲۰۰۵: ۱۵۲)

میلیون متر و در خورشید خاموش از ۲۰ تا ۷۰۰ میلیون متر متغیر است [۲]. تعادل هیدروستاتیکی حلقه های تاج نتیجه برابری فشار مغناطیسی و فشار حرارتی است. در واقع نیروی لورنتس وارد بر بارهای متحرک در پلاسما سعی در متراکم کردن این ذرات حول میدان مغناطیسی دارد و از طرف دیگر فشار حرارتی گاز تمایل به واپاشی حلقه و همگن کردن محیط تاج دارد.

میدان مغناطیسی در سطح خورشید به شدت ناهمگن است. بیشترین شدت میدان مغناطیسی در محل لکه های خورشیدی وجود دارد که به ۲۰۰۰ تا ۳۰۰۰ گاوس می رسد. در نواحی فعال در اطراف لکه های خورشیدی، میدان مغناطیسی از ۱۰۰ تا ۳۰۰ گاوس متغیر است در حالیکه در نواحی خورشید خاموش و حفره های تاج، این مقدار به ۰/۱ تا ۰/۵ گاوس کاهش می یابد [۲].

چگالی تعداد ذرات در تاج خورشید از قوی ترین خلأ های موجود بر روی زمین کمتر است [۲]. مقدار این کمیت از 10^6 cm^{-3} در نواحی با ارتفاع زیاد تاج تا 10^{11} cm^{-3} در حلقه های شاره ای تغییر می کند. در نواحی فعال خورشید، چگالی تعداد مقادیری در حدود $2 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$ تا $2 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ دارد.

از آنجا که میدان مغناطیسی در محیط تاج به شدت ناهمگن است، توزیع پلازما نیز در نتیجه انحصار آن حول خطوط میدان، ناهمگن می باشد. به عنوان مثال نسبت چگالی پلازما در خارج یک حلقه تاج به مقدار آن در مرکز حلقه می تواند از ۰/۱ تا ۰/۵ متغیر باشد [۳,۴].

۲-۱ مسأله گرمایش تاج خورشید

آنچه که تاج را از لایه های دیگر اتمسفر خورشید متمایز می سازد، دمای بسیار بالای آن می باشد. در سال ۱۹۴۳ بنت ادلن^۱ با بررسی طیف الکترومغناطیسی گرفته شده از تاج خورشید به این حقیقت دست یافت که تاج خورشید دارای دمایی از مرتبه میلیون درجه کلوین است [۵]. این در حالی است که دمای سطح خورشید در حدود ۶۰۰۰ درجه کلوین است. بنابراین این سوال مطرح شد که چرا تاج خورشید دمایی بیشتر از سطح آن دارد. گرمایش تاج خورشید، یک مسأله بزرگ حل نشده در فیزیک خورشید به حساب می آید. این پدیده در ظاهر امر با قانون دوم ترمودینامیک در تضاد است. بر طبق این قانون گرما از جسم داغ تر به جسم سرد تر به طور خود به خود منتقل می یابد و عکس آن بدون انجام کار امکان پذیر نیست. بنابراین در حالت کلاسیک بایستی انتظار داشت که تاج خورشید دمای کمتری نسبت به سطح آن داشته باشد. از آن زمان تا کنون نظریه های گوناگونی برای توجیه این پدیده مطرح شده اند که از میان آنها می توان به گرمایش توسط امواج صوتی [۶,۷] و امواج مغناطویدرودینامیکی^۲ (MHD) [۸,۹] اشاره کرد. امواج صوتی برد ضعیفی دارند و نمی توانند به تاج برسند [۶,۷]. همچنین امواج صوتی قادر به تامین انرژی لازم برای گرمایش تاج خورشید نیستند [۱۰,۱۱]. انتظار می رود که گرمایش تاج به میدان مغناطیسی مربوط شود. مقدار لازم شار انرژی در واحد زمان برای اینکه تاج در نواحی فعال دماهای مشاهداتی را داشته باشد، از مرتبه $10^7 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ است [۱۲]. نظریه وجود امواج MHD ابتدا در سال ۱۹۴۳ توسط هانس آلفن^۳ مطرح شد [۱۳]. این امواج در نتیجه اختلالات در یک سیال رسانا در حضور میدان مغناطیسی به وجود می آیند. ناکاریاکوف^۴ و همکارانش [۱۴] با تجزیه و تحلیل مشاهدات تریس در سال ۱۹۹۹ از یک کلاف لوله تاج خورشید که توسط یک شراره از حالت تعادل خارج می شوند، زمان میرایی نوسانات یک لوله

^۱ - Bengt Edlen

^۲ - Magnetohydrodynamic (MHD)

^۳ - Hannes Alfvén

^۴ - Nakariakov

نوعی را در حدود ۱۵ دقیقه و پریود نوسانات را در حدود ۵ دقیقه گزارش کردند. بر اساس این گزارش دمای لوله پس از میرا شدن نوسانات حدود ۳۰۰ هزار کلوین بالا رفته است. میرایی این نوسانات می تواند وابسته به عوامل مختلفی باشد. از جمله این عوامل، می توان به نشت موج از پایه های لوله^۱ [۱۵]، نشت موج از بدنه لوله^۲ [۱۶، ۱۷، ۱۸] و میرایی موج بر اثر وشکسانی و مقاومت پلاسمای موجود در لوله [۸، ۹]، اشاره کرد. ناکارایکف و همکارانش [۱۴] در بررسی خود، زمان مقیاس نشت موج از پایه های لوله مورد نظر را در حدود دو مرتبه بزرگی بیشتر از زمان میرایی موج تخمین زده اند. بنابراین می توان از این عامل چشم پوشی کرد. نشت موج از بدنه لوله به این دلیل که لوله ها موجبر های ایده آل نیستند می تواند رخ دهد. اما نشان داده شده است که اثر نشت بدنه ای موج، در میرایی لوله ها بسیار ضعیف است و می توان از آن چشم پوشی کرد [۱۶، ۱۷، ۱۸]. بنابراین مکانیسم هایی که از وشکسانی و مقاومت پلاسمای برای میرایی امواج استفاده می کنند، بیشتر مورد بررسی قرار گرفتند که از جمله این مکانیسم ها می توان به جذب تشدید^۳ امواج مغناطیویدرودینامیکی [۹] و اختلاط فازی^۴ امواج آلفن [۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱] اشاره کرد. جذب تشدید هنگامی رخ می دهد که فرکانس کلی نوسان لوله با یکی از فرکانس های موضعی لوله برابر شود که در نتیجه آن، دامنه موج در لایه نازکی از لوله که لایه تشدید نام دارد به شدت افزایش می یابد و در صورت وجود وشکسانی و مقاومت، مقدار زیادی از انرژی موج در این لایه جذب پلاسمای می شود [۹]. اختلاط فازی امواج آلفن که موضوع مورد بررسی ما است، در نتیجه غیر یکنواخت بودن سرعت فاز آلفن در راستای عمود بر جهت انتشار و همچنین جهت نوسان رخ می دهد [۸]. در این پدیده، با انتشار موج، اختلاف فاز بین نوسان های مجاور هم افزایش یافته که باعث بوجود آمدن گرادیان های شدید سرعت و میدان مغناطیسی در راستای ناهمگنی می شود. در چنین حالتی مقاومت های چسبندگی و اهمی محیط به سرعت افزایش یافته و باعث میرایی هرچه بیشتر موج می شوند. این پدیده در فصل های بعد به طور مفصل مورد بررسی قرار می گیرد. امواج MHD از این جهت دارای اهمیت هستند که حاوی انرژی کافی برای گرمایش تاج خورشید می باشند [۲]. در تاج خورشید، امواج MHD می توانند بوسیله اختلالات مغناطیسی یا صوتی که در

^۱ - footpoint leakage

^۲ - lateral leakage

^۳ - resonant absorption

^۴ - phase-mixing

شید سپهر یا نزدیک آن رخ می دهند، تحریک شوند. برای اینکه امواج MHD بتوانند دمای زیاد تاج را توجیه کنند، زمان میرایی امواج و نوسانات بایستی با زمان مقیاس تابشی که تاج بوسیله تابش، انرژی حرارتی خود را از دست می دهد، برابری کند.

۱-۳ اهمیت مطالعه امواج آلفن

مطالعه برهمکنش امواج آلفن با ناهمگنی های موجود در محیط های پلاسمای مغناطیسی، چه در پلاسمای های اختر فیزیکی چه آزمایشگاهی دارای اهمیت است، از این جهت که امواج آلفن و ناهمگنی های پلاسمای هر دو با هم در چنین محیط هایی وجود دارند. نظر بر این است که امواج آلفن کاندید خوبی برای گرمایش پلاسمای موجود در تاج خورشید می باشند [۸, ۱۹, ۲۰]. از یک طرف، در بسیاری از شرایط فیزیکی موجود در اتمسفر خورشید، امواج آلفن به راحتی قابل تحریک هستند. به عنوان مثال، لرزش های سطح خورشید در اثر جریان همرفتی نواحی داخلی آن می توانند امواج آلفن را در نور سپهر تحریک کنند. از طرفی دیگر، امواج آلفن بر اثر چسبندگی برشی میرا می شوند [۸]. در پلاسمای اختر فیزیکی، چسبندگی برشی در مقایسه با نوع حجمی آن مقدار بسیار کوچکی دارد، از این رو امواج آلفن بسیار سخت میرا می شوند. یکی از راه های ممکن برای تقویت میرایی امواج آلفن، کاهش مقیاس های فاصله ای موجود در سیستم است، که در نتیجه آن نقش چسبندگی برشی بیشتر اهمیت پیدا می کند. هیوارتر^۱ و پریست^۲ در سال ۱۹۸۳ چنین فرایندی را که اختلاط فازی امواج آلفن نامیده می شود، مورد بررسی قرار دادند [۸]. این پدیده هنگامی رخ می دهد که امواج آلفن با قطبش خطی در محیطی با سرعت آلفن زمینه ناهمگن که راستای ناهمگنی، عمود بر میدان زمینه باشد، منتشر شوند. در چنین حالتی جبهه های موج آلفن که در آغاز تخت می باشند، با انتشار موج به طور فزاینده ای خمیده می شوند که بدلیل وجود سرعت های فاز متفاوت در راستای ناهمگنی می باشد. در نتیجه، گرادیان های شدیدی در راستای ناهمگنی ایجاد می شوند که با وجود میرایی هر چند ضعیف در محیط، باعث می شوند که امواج آلفن به سرعت میرا شوند. بنابراین اختلاط فازی می تواند نقش مهمی در گرمایش تاج خورشید ایفا کند.

^۱ - Heyvaerts

^۲ - Priest

در فصل دوم، امواج مغناطوهیدرودینامیکی و معادلات اساسی حاکم بر آنها در تاج خورشید بررسی می شود. در فصل سوم، مکانیسم اختلاط فازی امواج آلفن مطالعه می شود. در فصل چهارم، اختلاط فازی پالس های آلفن برشی ایستاده، بعنوان مکانیسمی برای گرمایش تاج خورشید معرفی می شود.

فصل دوم

امواج مغناطوهیدرودینامیک در تاج خورشید

۱-۲ معادلات اساسی مغناطوهیدرودینامیک

نظریه وجود امواج مغناطوهیدرودینامیکی ابتدا در سال ۱۹۴۳ مطرح شد [۱۳]. بر اساس این نظریه، سیالات رسانای مغناطیده، علاوه بر امواج صوتی می توانند محیطی برای انتشار دسته ای جدید از امواج به نام امواج مغناطوهیدرودینامیکی باشند. این امواج در گستره وسیعی از پلاسما های اختر فیزیکی وجود دارند. آشکارسازی این امواج در چنین پلاسما هایی اغلب به صورت غیر مستقیم با مقایسه مشاهدات رصدی با نظریه های موجود صورت می گیرد. مشکلی که در تشخیص امواج MHD در پلاسما های فضایی وجود دارد این واقعیت است که این پلاسما ها به شدت ناهمگن و مغناطیده می باشند. در اتمسفر خورشید، لوله های شار مغناطیده، مثالی از چنین محیط هایی هستند که پدیده های نوسانی در آنها مشاهده شده اند. برای توضیح امواج MHD ابتدا بایستی معادلات آنها را مورد بررسی قرار دهیم. این معادلات، عبارتند از معادلات ماکسول، قانون اهم تعمیم یافته و معادلات هیدرودینامیکی مربوط به پلاسمای مورد نظر که به ترتیب عبارتند از [۲۲]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (2.8)$$

که در آنها ρ ، چگالی جرمی، \mathbf{D} ، چگالی جریان جابجایی، \mathbf{E} ، میدان الکتریکی، \mathbf{B} ، میدان مغناطیسی، \mathbf{J} ، چگالی جریان الکتریکی، \mathbf{g} ، شتاب گرانش، P ، فشار و \mathbf{v} ، سرعت پلاسما می باشند. μ_0 ، σ ، η و γ به ترتیب عبارتند از تراوایی مغناطیسی خلأ، رسانندگی الکتریکی، چسبندگی و نسبت گرماهای ویژه. معادلات (۲.۶) تا (۲.۸) به ترتیب عبارتند از معادله نیرو، معادله پیوستگی و معادله حالت گاز ایده آل برای فرایند بی دررو. انتخاب معادله حالت (۲.۸) بر این فرض استوار است که در شرایط تاج خورشید تحولات وابسته به امواج MHD از نوع بی دررو هستند. این معادلات با هم توصیف کننده رفتار پلاسما در حضور میدان مغناطیسی می باشند.

۲-۲ معادلات مغناطوهیدرودینامیک برای تاج خورشید

در کاربردهای اختر فیزیکی این معادلات به شکل خلاصه تری ظاهر می شوند. به عنوان مثال با توجه به معادله (۲.۴) داریم:

$$\frac{\mu_0}{\nabla \times \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx \frac{1}{c^2} \frac{B \mathbf{v}}{L} \approx \frac{v^2}{c^2}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که هنگامیکه سرعت های مشخصه محیط، بسیار کوچکتر از سرعت نور هستند چگالی جریان جابجایی قابل صرف نظر کردن می باشد. سرعت جابجایی لوله های تاج خورشید از مرتبه 50 km/s می باشد [۱۴]. بنابراین در مغناطوهیدرودینامیک تاج خورشید از چگالی جریان جابجایی صرف نظر می شود. در این صورت از ترکیب معادلات (۲.۳) تا (۲.۵) معادله زیر برای میدان مغناطیسی و سرعت به دست می آید:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (v_m \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

که در آن $v_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ ضریب پخش مغناطیسی می باشد. با فرض یکنواخت بودن این ضریب در کل محیط و با استفاده از معادله (۲.۲)، رابطه (۲.۹) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + v_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.10)$$

که به آن، معادله القائیدگی گفته می شود. جملات اول و دوم سمت راست این معادله، به ترتیب معرف همرفت^۱ و پخش^۲ میدان در سیال هستند. نسبت جمله همرفت به جمله پخش، عدد لوندکوئیست^۳ گفته می شود که برابر است با

$$S = \frac{Lv}{v_m} \quad (2.11)$$

که در آن، L ، طول مشخصه و v ، سرعت مشخصه سیستم می باشند. برای $S \gg 1$ جمله همرفت و برای $S \approx 1$ جمله پخش غالب خواهد بود. در پلاسمای تاج خورشید $S \gg 1$ [۱۴]، بنابراین جمله اول غالب خواهد بود و میدان مغناطیسی در پلاسما منجمد می باشد. بدین معنی که با حرکت پلاسما میدان نیز با آن حرکت خواهد کرد و بالعکس.

با استفاده از معادله (۲.۴) با صرف نظر از چگالی جریان جابجایی و اثرات مربوط به گرانش، معادله نیرو را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.12)$$

^۱ - convection

^۲ - diffusion

^۳ - Lundquist

در نهایت معادلات MHD مناسب برای بررسی امواج و نوسانات مغناطوهیدرودینامیکی تاج خورشید به صورت زیر در می آیند [۲]:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (2.16)$$

۲-۳ امواج مغناطوهیدرودینامیک

۲-۳-۱ معادلات حرکت

با در دست داشتن معادلات MHD (۲.۱۳) تا (۲.۱۶)، حال به بررسی نحوه انتشار اختلالات ایجاد شده در پلاسمای مغناطیده، می پردازیم. برای این منظور فرض می کنیم که $\eta = 0$ و $\sigma = \infty$ ، بدین معنی که از جملات اتلافی در معادلات (۲.۱۳) و (۲.۱۴) صرف نظر می کنیم. دستگاه مختصات (دکارتی یا استوانه ای) را طوری تعریف می کنیم که یک میدان مغناطیسی به صورت $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ داشته باشیم. در حالت تعادل، چگالی پلاسما، فشار حرارتی، میدان مغناطیسی و سرعت سیال را با نمادهای ρ_0 ، p_0 ، B_0 و \mathbf{v}_0 مشخص می کنیم که در حالت کلی می توانند تابع مکان در مختصات مورد نظر باشند اما در اینجا برای سهولت محاسبات، فرض می کنیم که در راستای z مقدار ثابتی دارند. همچنین فرض می کنیم که سیال در حالت تعادل، شارش اولیه نداشته باشد، بدین معنی که $\mathbf{v}_0 = 0$. شرط تعادل هیدروستاتیکی به صورت زیر می باشد:

$$\nabla \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (2.17)$$

که نشان می دهد هرگونه تغییر در فشار مغناطیسی بایستی با تغییر فشار حرارتی موازنه شود. اختلالات اوپلری ایجاد شده در چگالی، فشار حرارتی، میدان مغناطیسی و سرعت را با δp ، $\delta \mathbf{B}$ و $\delta \mathbf{v}$ نشان می دهیم. منظور از اختلالات اوپلری، تغییرات کمیت ها در یک مکان پس از

گذشت زمان dt است. $\delta \mathbf{v}_\perp$ ، مؤلفه ای از اختلال سرعت است که عمود بر میدان مغناطیسی زمینه می باشد. این مؤلفه در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $\delta \mathbf{v}_\perp = \delta v_x \hat{x} + \delta v_y \hat{y}$ ، و در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت $\delta \mathbf{v}_\perp = \delta v_r \hat{r} + \frac{1}{r} \delta v_\phi \hat{\phi}$ می باشد. در اینجا محاسبات در حالت کلی و بدون در نظر گرفتن دستگاه مختصات خاصی صورت می گیرد. در حالت اختلالی، کمیات چگالی، فشار حرارتی، میدان مغناطیسی و سرعت، به صورت زیر خواهند بود:

$$P = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_\perp + \delta v_z \hat{z}. \quad (2.18)$$

با جایگذاری کمیات مختل شده (۲.۱۸) در معادله نیرو (۲.۱۳)، و با صرف نظر کردن از جمله اتلافی $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ داریم:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{v}_\perp + \delta v_z \hat{z}) = -\nabla \delta p - \frac{1}{\mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{B}. \quad (2.19)$$

در این رابطه از جملات مرتبه دوم اختلالات صرف نظر شده است. اختلال در فشار کل را به صورت $\delta p_T \equiv \delta p + \delta p_m$ تعریف می کنیم که در آن $\delta p_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}$ اختلال در فشار مغناطیسی است. در نتیجه رابطه (۲.۱۹) به صورت زیر ساده می شود:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\delta \mathbf{v}_\perp + \delta v_z \hat{z}) = -\nabla_\perp \delta p_T - \frac{\partial}{\partial z} \delta p_T \hat{z} + \frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

که در آن، مؤلفه های عمود بر میدان و در راستای میدان عملگر ∇ را از هم تفکیک کرده ایم. همچنین با جایگذاری (۲.۱۸) در معادله القائیدگی (۲.۱۴)، و با صرف نظر کردن از جمله اتلافی $\nu_m \nabla^2 \mathbf{B}$ ، رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{B} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{v}_\perp - B_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\perp) \hat{z}. \quad (2.21)$$

اگر از رابطه (۲.۲۰) نسبت به زمان مشتق بگیریم و از رابطه (۲.۲۱) برای حذف اختلال میدان $\delta \mathbf{B}$ استفاده کنیم، به رابطه

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta \mathbf{v}_\perp + \delta v_z \hat{z}) = -\nabla_\perp \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta p_T \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta p_T \right) \hat{z} + \frac{B_0^2}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta \mathbf{v}_\perp - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\perp) \hat{z} \right). \quad (2.22)$$

می‌رسیم. بنابراین تا اینجا معادله نیرو و معادله القائیدگی را در یک معادله برای $\delta \mathbf{v}$ و δp_T خلاصه کرده ایم. صورت اختلالی معادله پیوستگی با جایگذاری (۲.۱۸) در (۲.۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (2.23)$$

که در آن از جملات مرتبه دوم اختلالات صرف نظر شده است. با توجه به معادله حالت (۲.۱۶) داریم:

$$\frac{d \ln p}{d \ln \rho} = \gamma, \quad \Rightarrow \quad dp = \frac{\gamma P}{\rho} d\rho = v_s^2 d\rho, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.24)$$

در اینجا $v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ سرعت صوت است. با قراردادن رابطه (۲.۲۴) در معادله (۲.۲۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p = -\rho_0 v_s^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{v}. \quad (2.25)$$

همچنین برای اختلال در فشار مغناطیسی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \left(B_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{v}_\perp - B_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\perp) \hat{z} \right) = -\frac{B_0^2}{\mu_0} \nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\perp. \quad (2.26)$$

با استفاده از صورت اختلالی معادله پیوستگی (۲.۲۳) داریم:

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\perp = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho - \frac{\partial}{\partial z} \delta v_z, \quad (2.27)$$

که با قرار دادن آن در رابطه (۲.۲۶) و استفاده دوباره از معادله (۲.۲۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p_m = \rho_0 v_A^2 \frac{\partial}{\partial z} \delta v_z - \rho_0 v_A^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{v}. \quad (2.28)$$