دانشگاه ارومیه

دانشکده ی علوم
گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در گرایش آنالیز

# نامساو ی های تابعی برای توابع بسل تعمیم یافته

نگارش:

فریبا حمیدی خضرلو

استاد راهنما:

**دکتر رسول آقالاری**

شهریور

۱۳۹۱

# قدردانی و تشکر

خدا راشکر می گویم از اینکه فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو وتمرین تفکرریاضی وار به من عطا کرد. از استاد راهنمای گرامی دکتر آقالاری که تکمیل این پایان نامه بدون کمک های ایشان ممکن نبود کمال تشکر را دارم. از داوران محترم آقایان دکتراستادباشی ودکترشمس ودکترآزادی بخاطر راهنمایی های ارزشمند بسیار سپاسگزارم. قدردانی خود رااز اساتید گروه ریاضی دانشگاه ارومیه که افتخارشاگردیشانم راداشتم اعلام می دارم. همچنین ازاعضای خانواده‌ام که دراین مدت محیطی مناسب برای مطالعه فراهم آوردند بسیار ممنونم.

# فهرست مندرجات

# چکیده


فرض کنیم تابع چگالی احتمال $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ و تابع توزیع $\bar{\phi}(u) : \mathbb{R} \to (0, 1)$ از توابع نرمال استاندارد به صورت زیر تعریف شوند.

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\bar{\phi}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

و تابع $r : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ بصورت زیرتعریف می‌شود.

$$r(u) = \frac{\bar{\phi}(u)}{\varphi(u)} = e^{\frac{u^2}{2}} \int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

که به عنوان نسبت میلز از توزیع نرمال استاندارد شناخته شده است. در حالی که معکوس $\frac{1}{r}$ بصورت $\frac{\varphi(u)}{\bar{\phi}(u)} = \frac{1}{r(u)}$ تعریف می‌شود که میزان (نرخ) شکست نامیده می‌شود که در علم اقتصاد و مهندسی بصورت فراوان به چشم می‌خورد.

# پیشگفتار

این پایانامه شامل چهار فصل است.

فصل اول شامل دو بخش است که بخش اول مربوط به مفاهیم مقدماتی و بخش دوم مربوط به توابع فوق هندسی گاوس می‌باشد. فصل دوم مربوط به خاصیت یکنوایی برخی توابع شامل توابع بسل تعمیم یافته است که خود شامل سه بخش است که بخش اول راجع به توابع بسل تعمیم یافته نوع دوم از مرتبه $V$ است و بخش سوم که در آن کرانهای بالا و پایینی برای مشتق لگاریتمی از توابع بسل تعمیم یافته $I_V$ و $k_V$ مطرح شده است و فصل سوم مربوط به تحدب توابع بسل تعمیم یافته با توجه به میانگین های توانی است و در آخر فصل چهارم کاربرد $\log$ —مقعری توزیع گاما—گاما بیان شده است.

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای مقدماتی

## ۱.۱ مفاهیم مقدماتی

**تعریف ۱.۱.۱** بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مفروض‌اند. گوئیم $f$ تابعی محدب [۱] روی $I$ است، هر گاه به ازاء هر $x, y$ در $I$ و هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y)$$

اگر به ازاء هر $x \neq y$ و $۰ < \lambda < ۱$ نامساوی

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) < \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y)$$

برقرار باشد گوئیم $f$ اکیداً محدب است.

[۱] convex Function

**تعریف ۲.۱.۱** بازه $I \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مفروض‌اند. گوئیم $f$ تابعی مقعر[۲] روی $I$ است، هر گاه به ازای هر $y, x$ در $I$ و هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

اگر به ازای هر $x \neq y$ $(۰ < \lambda < ۱)$ نامساوی

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) > \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y)$$

برقرار باشد گوئیم $f$ اکیداً مقعر است.

**تذکر ۳.۱.۱** تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مقعر (اکیداً مقعر) روی $I$ است هر گاه $(-f)$ تابعی محدب (اکیداً محدب) باشد.

**تذکر ۴.۱.۱** فرض کنید تابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق دوم $I$ باشد در این صورت:

$i$) تابع $f$ اکیداً محدب است هر گاه به ازای هر $x \in I$، $f''(x) > ۰$

$ii$) تابع $f$ اکیداً مقعر است هر گاه به ازای هر $x \in I$، $f''(x) < ۰$

**تعریف ۵.۱.۱** تابع $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow (۰, \infty)$ را محدب لگاریتمی[۳] گوئیم هر گاه $\log f(x)$ تابعی محدب باشد به عبارت دیگر اگر به ازاء هر $u_۱, u_۲ \in [a, b]$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم :

$$f(\lambda u_۱ + (۱ - \lambda) u_۲) \leq [f(u_۱)]^{\lambda} [f(u_۲)]^{۱ - \lambda}$$

[۲] concave Function

[۳] Logarithmically convex Function

**تعریف ۶.۱.۱** تابع $g$ را مقعر لگاریتمی[۴] روی $(a,b)$ گوئیم، هرگاه تابع $\log f(x)$ تابعی مقعر روی $(a,b)$ باشد.

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنید$J \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد تابع $M : J^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک میانگین در$J$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\min\{x,y\} \leq M(x,y) \leq \max\{x,y\} \qquad x,y \in J$$

**مثال ۸.۱.۱** (۱): تابع

$$M(x,y) = A(x,y) = \frac{x+y}{۲}$$

میانگین حسابی نامیده می شود.

(۲): تابع

$$M(x,y) = G(x,y) = \sqrt{xy}$$

میانگین هندسی نامیده می شود.

(۳): تابع

$$M(x,y) = H(x,y) = \frac{۱}{A(\frac{۱}{x},\frac{۱}{y})}$$

میانگین هارمونیک نامیده می شود.

(۴): برای $x \neq y$، تابع

$$M(x,y) = L(x,y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}$$

[۴] Logarithmically concave Function

و $L(x,y) = x$ میانگین لگاریتمی نامیده می شود.

تعریف **۹.۱.۱** فرض کنید $I \subseteq J$ یک بازه و $N, M$ دو تابع میانگین باشند تابع $f : I \longrightarrow J$ را $MN-$ محدب یا $MN-$ مقعر یا $MN-$ آفین نامند هر گاه به ترتیب

$$\text{۱)}\quad f(M(x,y)) \leq N(f(x), f(y)) \qquad , \qquad \forall x, y \in I$$

$$\text{۲)}\quad f(M(x,y)) \geq N(f(x), f(y)) \qquad , \qquad \forall x, y \in I$$

$$\text{۳)}\quad f(M(x,y)) = N(f(x), f(y)) \qquad , \qquad \forall x, y \in I$$

در حالت خاص $M = N$ تابع $f$ را به ترتیب $M-$ محدب یا $M-$ مقعر یا $M-$ آفین می‌نامند.

به ازای هر $x, y \in I$، $f(M(x,y))$ قابل تعریف است زیرا $x < M(x,y) < y$ با فرض $(x < y)$ و چون هر زیر بازه از $\mathbb{R}$ محدب است لذا $M(x,y) \in I$ توجه کنید که این تعریف زمانی که $M = N = A$ باشد منجر به تحدب (تقعر) معمولی می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که $G, H$ و $M, N = A$ نه حالت ممکنه خاصیت $MN-$ تحدب(تقعر) به تحدب یا تقعر(تقعر یا تحدب) معمولی منجر می‌شود (بواسطه تغییرات ساده‌ای در متغیر)

قضیه **۱۰.۱.۱** فرض کنید $I$ یک زیر بازه از $(\circ, \infty)$ باشد. فرض کنید $f : I \longrightarrow (\circ, \infty)$ پیوسته باشد در قسمت‌های (۹—۴) فرض کنید $I = (\circ, b), \circ < b < \infty$

۱) $f$، $A-$ محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $f$ محدب (مقعر) باشد.

۲) $f$، $AG-$ محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $\log f$ محدب (مقعر) باشد.

۳) $f$، $AH-$ محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $\frac{1}{f}$ مقعر (محدب) باشد.

۴) $f$، $GA-$ محدب (مقعر) روی $I$ است ، اگر و فقط اگر $f(be^{-t})$ روی $(0,\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

۵) $f$، $G-$ محدب (مقعر) روی $I$ است اگر و فقط اگر $\log(be^{-t})$ روی $(0,\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

٦) $f$، $GH-$ محدب (مقعر) روی $I$است اگر و فقط اگر $\frac{1}{f(be^{-t})}$ روی $(0,\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

۷) $f$، $AA-$ محدب (مقعر) روی $I$ است اگر و فقط اگر $f(\frac{1}{x})$ روی $(\frac{1}{b},\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

۸) $f$، $HG-$ محدب (مقعر) روی $I$ است اگر و فقط اگر $\log f(\frac{1}{x})$ روی $(\frac{1}{b},\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

۹) $f$، $H-$ محدب (مقعر) روی $I$ است اگر و فقط اگر $f(\frac{1}{x})$ روی $(\frac{1}{b},\infty)$ محدب (مقعر) باشد.

**برهان :** به مرجع [ 11 ] رجوع شود.

قضیه **۱۱.۱.۱** فرض کنید $I$ یک زیر بازه‌ی باز از $(0,\infty)$ باشد. و فرض کنید $f : I \longrightarrow (0,\infty)$ مشتق پذیر باشد.

درقسمت های (۴) تا (۹)، فرض کنید$0 < b < \infty$ و $I = (0,b)$.

۱) $f$، $A-$ محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $f'(x)$ صعودی (نزولی) باشد.

۲) $f$، $AG-$ محدب (مقعر) است اگر و فقط اگر $\frac{f'(x)}{f(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

۳) $f$، $AH-$ محدب (مقعر) است اگر وفقط اگر$\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

۴) $f$، $GA-$ محدب (مقعر)است اگر وفقط اگر$xf'(x)$ صعودی (نزولی ) باشد.

۵) $f$، $G-$ محدب (مقعر) است اگر وفقط اگر $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

۶) $f$، $GH-$ محدب (مقعر)است اگر وفقط اگر $\frac{xf'(x)}{f^{2}(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

۷) $f$، $HA-$ محدب (مقعر)است اگر وفقط اگر $x^{2}f'(x)$ صعودی (نزولی) باشد.

۸) $f$، $HG-$ محدب (مقعر)است اگر وفقط اگر $\frac{x^{2}f'(x)}{f(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

۹) $f$، $H-$ محدب (مقعر)است اگر وفقط اگر $\frac{x^{2}f'(x)}{f^{2}(x)}$ صعودی (نزولی) باشد.

**برهان(۱) :**

بنابه فرض،$f$ مشتق پذیراست. فرض کنید $f'(x)$ بر $I$ صعودی (نزولی) باشد.

فرض کنید $t,s,u \in I$ و $s<t<u$ و بنابرقضیه ی مقدارمیانگین $x,y$ موجودند به طوری که

$s<x<t$ و $t<y<u$ و

$$f'(x)=\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

$$f'(y)=\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

بنابر صعودی بودن $f'$، $f'(x)<f'(y)$ لذا

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\frac{f(u)-f(t)}{u-t}\Longleftrightarrow(u-t)(f(t)-f(s))\leq(t-s)(f(u)-f(t))$$

$$\Longleftrightarrow uf(t)-uf(s)+tf(s)+tf(s)\leq tf(u)-sf(u)+sf(t)$$

$$\Longleftrightarrow(u-s)f(t)\leq(t-s)f(u)+(u-t)f(s)$$

$$\Longleftrightarrow f(t) \leq \frac{(t-s)}{(u-s)} f(u) + \frac{(u-t)}{(u-s)} f(s)$$

بااختیار $\lambda = \frac{u-t}{u-s}$ واضح است که $\circ < \lambda < ۱$ و$۱ - \lambda = \frac{t-s}{u-s}$ ونیز$t = \lambda s + (۱ - \lambda) u$ و تمام

اینهامحدب بودن $f$ رانتیجه می دهند.

برعکس، فرض کنید$f$ محدب باشدو$x, y \in I$ کافی است نشان دهیم $f'(x) < f'(y)$ . بنابر مطلبی که

دربالاآمد و با توجه به برگشت پذیری روابط ذکرشده ، به ازای هر$t, s \in I$ که $s < x < t < y$ داریم:

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

لذا

$$f'_-(x) = \lim_{s \to \bar{x}} \frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq \lim_{t \to \bar{y}} \frac{f(y)-f(t)}{y-t} = f'_-(y)$$

چون $f$ بر$I$ مشتق پذیراست لذا$f'(x) = f'_-(x)$ و$f'(y) = f'_-(y)$. بنابرین $f'(x) \leq f'(y)$ لذاتابع $f$

محدب( $A-$ محدب (مقعر))(مقعر)است اگرو فقط اگر $f'$ صعودی باشد.

**برهان(۲):**

فرض کنید $g(x) = \log f(x))$. $f$ بر$I$ مشتق پذیر است لذا$\log f(x)$ نیزبر$I$ مشتق پذیراست.

حال داریم :

$g$ محدب است $\Longleftrightarrow$ $f$، $AG-$ محدب است

$\Longleftrightarrow$ $g'$ صعودی است

$\Longleftrightarrow$ $\frac{f'(x)}{f(x)}$ صعودی است

**برهان(۳):**

فرض کنید $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ وچون $f$ مشتق پذیراست و $f(x)\neq 0$ لذا $g$ مشتق پذیراست.

$$g(x)=\frac{1}{f(x)} \text{ مقعر است } \iff f \text{، } AH- \text{ محدب است } = g'(x)$$

$$\frac{-f'(x)}{f^2(x)} \text{ نزولی است } \iff$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} \text{ صعودی است } \iff$$

**برهان(۴):**

به‌ازای $x\in(0,b)$، فرض کنید $x=be^{-t}$ (قبلاً گفتیم که چنین $t$ وجود دارد ) لذا $\frac{dx}{dt}=-be^{-t}=-x$

داریم :

$$f(be^{-t}) \text{ محدب است } \iff f \text{، } GA- \text{ محدب است}$$

$$(*) \qquad \frac{df(be^{-t})}{dt} \text{ صعودی است برای } t\in(0,\infty) \iff$$

(با توجه به این که $\frac{df(x)}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ لذا $\frac{df(x)}{dt}=-xf'(x)$)

بافرض $x,y\in(0,b)$ به طوری که $x=be^{-t}$ و $y=be^{-s}$ و $x\le y$ باتوجه به $(*)$، داریم:

$$s\le t \iff be^{-t}\le be^{-s} \iff \frac{df(be^{-s})}{dt}\le\frac{df(be^{-t})}{dt}$$

درنتیجه داریم :

$$-yf'(y)\le -xf'(x) \iff xf'(x)\le yf'(y)$$

$$xf'(x) \text{ صعودی باشد } \iff$$

**برهان(۵):**

$$\log f(be^{-t}) \text{ محدب است } \iff f \text{، } G- \text{ محدب است}$$

$$\frac{df(be^{-t})/dt}{f(be^{-t})} \text{ صعودی است } \iff$$

به ازای $x,y \in (0,b)$ که $x = be^{-s_1}$ و $y = be^{-s_2}$ اگر $x < y$ آن گاه $s_2 < s_1$ درنتیجه داریم:

$$x < y \qquad \frac{-xf'(x)}{f(x)} \leq \frac{-yf'(y)}{f(y)} \Longleftrightarrow \frac{df(be^{-s_1})/dt}{f(be^{-s_1})} \leq \frac{df(be^{-s_2})/dt}{f(be^{-s_2})}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{xf'(x)}{f(x)} \leq \frac{yf'(y)}{f(y)}$$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ صعودی باشد

**برهان(۶):**

$\frac{1}{f(be^{-t})}$ مقعر است $\Longleftrightarrow$ $f$، $GH-$ محدب است

$\Longleftrightarrow$ $\frac{-df(be^{-t})/dt}{f^2(be^{-t})}$ نزولی است

به ازای $x,y \in (0,b)$ که $x = be^{-s_1}$ و $y = be^{-s_2}$ اگر $x < y$ آن گاه $s_2 < s_1$ درنتیجه داریم:

$$\frac{yf'(y)}{f(y)} \leq \frac{xf'(x)}{f(x)} \Longleftrightarrow \frac{-df(be^{-s_2})/dt}{f(be^{-s_2})} \leq \frac{-df(be^{-s_1})/dt}{f^2(be^{-s_1})}$$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{xf'(x)}{f^2(x)}$ صعودی است

**برهان(۷):**

بـه‌ازای $y \in (\frac{1}{b},\infty)$ ، $f(\frac{1}{y})$ مـحـدب اسـت $\Longleftrightarrow$ $f$، $HA-$ مـحـدب اسـت

$\Longleftrightarrow$ $\frac{df}{dy}(\frac{1}{y})$ صعودی است

( بافرض $x = \frac{1}{y}$، $\frac{df}{dy} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$ یعنی $\frac{df}{dy} = -f'(\frac{1}{y}) \cdot (\frac{1}{y})^2 = -x^2 f'(x)$)

به ازای $x_1, x_2 \in (\frac{1}{b},\infty)$ بافرض $x_1 < x_2$ و $x_1 = \frac{1}{y_1}$ و $x_2 = \frac{1}{y_2}$ آن گاه $y_2 < y_1$ ودرنتیـجه داریم:

$$\frac{df}{dy}(\frac{1}{y_2}) \leq \frac{df}{dy}(\frac{1}{y_1}) \Longleftrightarrow -x_2^2 f'(x_2) \leq -x_1^2 f'(x_1)$$

$$\Longleftrightarrow x_1^2 f'(x_1) \leq x_2^2 f'(x_2)$$

$\Longleftrightarrow$ $x^2 f'(x)$ صعودی است

**برهان(۸):**

$\log f(\frac{1}{y})$ روی $(\frac{1}{b}, \infty)$، محدب است $\Longleftrightarrow f$، $HG-$ محدب است

$\Longleftrightarrow$ $\frac{df/dy}{f(\frac{1}{y})}$ صعودی است

(بافرض $x = \frac{1}{y}$ داریم : $\frac{df/dy}{f(\frac{1}{y})} = \frac{-x^2 f'(x)}{f(x)}$ )

$\Longleftrightarrow x \in (\frac{1}{b}, \infty)$ برای $\frac{-x^2 f'(x)}{f(x)}$ نزولی است

$\Longleftrightarrow x \in (\frac{1}{b}, \infty)$ برای $\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}$ صعودی است

**برهان(۹):**

به‌ازای $y \in (\frac{1}{b}, \infty)$ ، $1/f(\frac{1}{y})$ مقعر (محدب)است $\Longleftrightarrow f$، $H-$ محدب است

$\Longleftrightarrow$ $\frac{-df(\frac{1}{y})/dy}{f^2(\frac{1}{y})}$ نزولی است

(بافرض $x = \frac{1}{y}$ داریم : $\frac{-df(\frac{1}{y})/dy}{f^2(\frac{1}{y})} = \frac{x^2 f'(x)}{f^2(x)}$ )

به‌ازای $x \in (\frac{1}{b}, \infty)$ ، $\frac{x^2 f'(x)}{f^2(x)}$ صعودی باشد $\Longleftrightarrow f$، $HH-$ محدب است

حال مشابه بحث بالا، می توان قضیه را برای حالت تقعر نیز اثبات کرد. ■

**تعریف ۱۲.۱.۱** تابع $f$ روی بازه $a \leq s \leq b$ کاملاً یکنوا گفته می‌شود هرگاه $(-1)^k f^{(k)}(s) \geq 0$

**تعریف ۱۳.۱.۱** متغیر تصادفی تابعی است که از فضای نمونه یک آزمایش به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود.یعنی هرگاه$S$ یک فضای نمونه باشد، در این صورت تابع $X : S \longrightarrow R$ را متغیر تصادفی می نامند.

## ۲.۱ توابع فوق هندسی گاوس

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنید $0 < x < \infty$ در اینصورت انتگرال ناسره

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

را که یک انتگرال همگرا می‌باشد را تابع گاما[5] می‌نامیم

**تعریف ۲.۲.۱** هر گاه $m, n > 0$ در اینصورت

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

را تابع بتا[6] می‌نامیم

**تعریف ۳.۲.۱** اگر$(a \neq 0)$ نمادپوچهامربه شکل زیرتعریف می شود.

$$(a,n) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

که (1,n)=n! و (a,0)=1.

**تعریف ۴.۲.۱** فرض کنید $a, c$ اعدادی مختلط باشند بطوریکه $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ تابع

$$\phi(a,c;z) = F_1(a,c;z) = 1 + \frac{a}{c}z + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

[5] Gamma Function

[6] Beta Function

تابع کومر[۷] می‌نامیم.

**تذکر ۵.۲.۱** با استفاده از نماد پوچهامر تابع کومر را می‌توان به فرم زیر نمایش داد.

$$\phi(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n z^n \qquad (1)$$

که در آن $e_n=\frac{(a,n)}{(c,n)n!}$ لذا

$$\phi(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)}z^n$$

به راحتی می‌توان دید که سری (۱) برای $z$ هایی که $|z|<1$ بطور مطلق همگراست و برای $|z|>1$ واگراست همچنین برای $z$ هایی که $|z|=1$ بطور مطلق همگراست هر گاه $a<c$، و برای $z=-1$ سری همگراست، هرگاه $a-1<c$. با مشتق گیری از تابع کومر داریم :

$$\phi'(a,c;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(a,n)}{(c,n)n!}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n+1)}{(c,n+1)n!}z^n$$

اما چون $(a,n+1)=a(a+1,n)$ لذا داریم

$$\phi'(a,c;z)=\frac{a}{c}\phi(a+1,c+1;z)$$

همچنین توابع کومر را می‌توان بصورت انتگرالی نمایش داد.

$$\phi(a,c;z)=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt$$

و نیز برخی از توابع مقدماتی توسط توابع کومر تولید می‌شوند.

$$\phi(a,a,z)=e^z \qquad \phi(0,c,z)=1$$

[۷] Kummer Function

**تعریف ۶.۲.۱** فرض کنید $a, b, c$ اعداد مختلط و $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ باشد تابع

$$F(a,b,c;z) = 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^{2}$$

را تابع فوق هندسی گاوس[8] می‌نامیم. این تابع بر $U$ (قرص واحد) تحلیلی است.

**تذکر ۷.۲.۱** با استفاده از نماد پوچهامر تابع فوق هندسی گاوس را می‌توان به شکل زیر نمایش داد.

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad (2)$$

که به آن $d_n = \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)n!}$ لذا

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n$$

به راحتی می‌توان دید که سری (۲) برای $z$ هایی که $|z| < 1$، بطور مطلق همگراست و برای $1 < |z|$ واگراست. همچنین برای $z$هایی که $|z| = 1$ بطور مطلق همگراست، هرگاه $c > a + b$، و برای $z = -1$ سری همگراست، هرگاه $c > a + b - 1$ لذا تابع فوق هندسی در $U$ تحلیلی است و با مشتق گیری از طرفین (۲) داریم :

$$F'(a,b,c;z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a,n)(b,n)}{(c,n)n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n+1)(b,n+1)}{(c,n+1)}$$

[8] Gouss Hypergeometric Function

اما چون $(a, n+1) = a(a+1, n)$ پس

$$F'(a,b,c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1; z)$$

**تذکر ۸.۲.۱** توابع مهم و بسیاری در آنالیز توسط توابع فوق هندسی بیان می‌شوند

$$\log(1+z) = zF(1,1,2;z)$$

$$(1-z)^{-a} = F(a,b,b;z)$$

$$\sin^{-1} z = zF(1/2, 1/2, 3/2; z^2)$$

**تعریف ۹.۲.۱** تابع $F(a,b,c;x)$ را صفر—متعادل[۹] گوئیم هر گاه $c = a + b$

**تعریف ۱۰.۲.۱** تابع $f$ را تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی $X$ روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم اگر

الف) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) \geq 0$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

پ) $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

**تعریف ۱۱.۲.۱** اگر $X$ یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f$ باشد، تابع توزیع تجمعی $X$ که با نماد $F(x)$ نشان داده می‌شود عبارت است از

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

و در نتیجه

$$p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

[۹] Zero-Balanced