دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه مقطع کارشناسی ارشد ریاضی محض

# عناصر پوچ‌توان و حلقه‌های آرمنداریز


نگارش:

**زهرا خزائی**


استاد راهنما:

**دکتر سیّد حمید حاج سیّد جوادی**

استاد مشاور:

**دکتر محمّد علی نصر آزادانی**

تیر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذّت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آن‌ها است.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

# تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به هم نشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

با تشکر و سپاس از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر سیّد حمید حاج سیّدجوادی که از محضر پرفیض تدریسشان بهره‌ها بردم.

هم‌چنین کمال تشکر از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر محمّد علی نصر آزادانی برای راهنمایی‌های ایشان در مراحل کار این پایان نامه ابراز می‌نمایم.

در پایان از پدر و مادر دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاس گذاری می‌نمایم.

# چکیده

در این پایان‌نامه با مطالعه حلقه‌های آرمنداریز به بررسی ویژگی آرمنداریز در حلقه هم حاصل ضرب از $K$ـ جبرها می‌پردازیم. سپس حلقه‌های پوچ آرمنداریز را که تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز می‌باشند مورد مطالعه قرار می‌دهیم و ساختار مجموعه‌ای از عناصر پوچ‌توان در حلقه‌های آرمنداریز و پوچ آرمنداریز را بررسی می‌نماییم. هم‌چنین به بررسی توسیع چندجمله‌ای حلقه‌های پوچ آرمنداریز می‌پردازیم. در پایان با مطالعه حلقه‌های آرمنداریز نزدیک، حلقه‌های پوچ آرمنداریز نزدیک را تعریف می‌کنیم و با اثبات قضایای مربوط به آن‌ها خواص این رده از حلقه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**کلمات کلیدی:** عنصر پوچ‌توان، حلقه چندجمله‌ای، حلقه آرمنداریز، حلقه پوچ آرمنداریز.

# فهرست مطالب

# مقدمه

مطالعه حلقه‌های آرمنداریز ریشه در حلقه‌های چندجمله‌ای دارد. برای هر حلقه کاهش یافته $R$، آرمنداریز[1] نشان داد از صفر شدن حاصل‌ضرب هر دو چندجمله‌ای با ضرایب از $R$، هر حاصل‌ضرب ضرایب دو چندجمله‌ای نیز صفر خواهد شد [۴]. در ادامه مطالعات آرمنداریز، رج[2] و چاوچاریا[3] حلقه‌هایی که بدون خاصیت کاهشی در ویژگی مذکور صدق کنند را حلقه‌های آرمنداریز نامیدند که تعمیمی از حلقه‌های کاهش‌یافته می‌باشند [۲۰]. هم‌چنین ریاضی‌دانان برجسته‌ای چون اندرسون[4] و کامیلو[5] به بررسی حلقه‌های چندجمله‌ای روی حلقه‌های آرمنداریز پرداختند [۲]. آنتونی[6] با مطالعه عناصر پوچ‌توان روی حلقه‌های آرمنداریز، حلقه‌های پوچ آرمنداریز را تعریف کرد و نشان داد که تحت چه شرایطی حلقه‌های چندجمله‌ای ویژگی پوچ آرمنداریز را به ارث می‌برند [۳].

در ادامه تعریف حلقه‌های نزدیک توسط پایلز[7]، برکین مایر[8] به مطالعه حلقه‌های نزدیک از چندجمله‌ای‌ها پرداخت و قضایای مهمی را به اثبات رساند [۶، ۱۹]. سپس حلقه‌های آرمنداریز نزدیک توسط قلندرزاده[9] تعریف شد و چند ویژگی اصلی از این رده از حلقه‌ها توسط وی مورد بررسی قرار گرفت [۱۰].

هدف اصلی این پایان‌نامه مطالعه حلقه‌های پوچ آرمنداریز است که بنا به ضرورت، به مطالعه حلقه‌های آرمنداریز می‌پردازیم. این پایان‌نامه شامل ۴ فصل همراه با بخش‌هایی به شرح زیر می‌باشد:

فصل اول که شامل ۱ بخش، مفاهیم و قضایای مقدماتی مربوط به حلقه‌ها می‌باشد که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فصل دوم شامل ۲ بخش اصلی می‌باشد. در بخش اول حلقه‌های آرمنداریز معرفی می‌شوند و قضایای مربوط به آن‌ها بیان می‌شوند. هم‌چنین حلقه‌های چندجمله‌ای روی حلقه‌های آرمنداریز مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش دوم با بیان قضایایی، مثال‌های جدیدی از حلقه‌های آرمنداریز

---

[1] Armendariz
[2] Rege
[3] Chhawchharia
[4] Anderson
[5] Camilo
[6] Antoine
[7] Pilz
[8] Birkenmeier
[9] Ghalandarzadeh

در حلقه هم حاصل‌ضرب از $K$ـ جبرها مطرح می‌شوند.

فصل سوم شامل ۲ بخش اصلی می‌باشد. در بخش اول به معرفی حلقه‌های پوچ آرمنداریز و بیان قضایای مربوط به آن‌ها پرداخته می‌شود. در این بخش نشان داده می‌شود که حلقه‌های پوچ آرمنداریز تعمیمی از حلقه‌های آرمنداریز و ۲ـ ابتدایی می‌باشند. در بخش دوم نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی حلقه‌های چندجمله‌ای از حلقه‌های پوچ آرمنداریز، ویژگی پوچ آرمنداریز را به ارث می‌برند.

در فصل چهارم با مطالعه حلقه‌های آرمنداریز نزدیک، تعمیمی از آن را به عنوان حلقه‌های پوچ آرمنداریز نزدیک ارائه می‌کنیم و سپس ویژگی‌های اصلی از این حلقه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اکثر مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۱۱، ۳] گرفته شده‌اند.

لازم به ذکر است در راستای مطالعات خویش در دوره پژوهشی کارشناسی ارشد دستاوردهای زیر حاصل شده است که برای مجلاّت مختلف ارسال گردیده و هم اکنون در دست داوری است.

1. H. Haj Seyyed Javadi; Z. Khazaee, On $\pi$–Near–Armendariz rings, Chiang Mai Journal of science. Submited on 7/6/2012.

2. Z. Khazaee; H. Haj Seyyed Javadi; Kh. Khalilnezhad, Nil–Near–Armendariz rings, Asian–European Journal of Mathematics. Submited on 29/5/2012.

3. Kh. Khalilnezhad; H. Haj Seyyed Javadi; Z. Khazaee, On Near Weak Armendariz rings, General Algebra and Applications. Submited on 15/8/2012.

هم‌چنین چکیده مبسوطی از مقالات فوق به بیست و دومین سمینار جبر و چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران ارسال گردیده و مورد پذیرش واقع شده است.

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف، لم‌ها و قضایای موردنیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. در سراسر این پایان‌نامه منظور از $R$، حلقه شرکتپذیر یکدار که لزوماً جابه‌جایی نیست می‌باشد(مگر آن‌که قید شود) و حلقه‌های $R[x]$ و $R[x, x^{-1}]$ به ترتیب حلقه چندجمله‌ای و حلقه چندجمله‌ای لوران روی $R$ می‌باشند. هم‌چنین منظور از $\operatorname{coef}(f(x))$ مجموعه ضرایب چندجمله‌ای $f(x)$ می‌باشد.

## ۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

**تعریف ۱.۱.۱.** هر حلقه جابه‌جایی و یکدار را که دارای مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی نباشد یک دامنه صحیح می‌نامیم.

**تعریف ۲.۱.۱.** دامنه صحیح جابه‌جایی و یکدار $E$ را یک دامنه اقلیدسی[۱] نامیم هرگاه تابعی مانند $\phi : E \to \mathbb{Z}$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند

۱. اگر $a, b \in E^* = E - \{0\}$ و $a \mid b$، آن‌گاه $\phi(a) \leq \phi(b)$؛

۲. برای هر زوج از عناصر $a, b \in E$ و $b \neq 0$، عناصری مانند $r, q$ در $E$ موجود باشند به طوری که $a = bq + r$ و $\phi(r) \leq \phi(b)$.

**مثال ۳.۱.۱.** هرگاه $F$ یک میدان باشد آن‌گاه حلقه $F[x]$ یک دامنه اقلیدسی است.

*اثبات.* رجوع شود به ([۲۵]، نتیجه ۴.۶). □

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد در این صورت عنصر $e$ در حلقه $R$ را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

[۱] Euclidean domain

**تعریف ۵.۱.۱.** زیر حلقه $S \subseteq R$ را یک حلقه گوشه‌ای $R$ می‌نامیم اگر زیرگروهی جمعی مانند $C \subseteq R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R = S \oplus C$ و داشته باشیم $S \cdot C \subseteq C$ و $C \cdot S \subseteq C$. زیرگروه $C$ را یک مکمل حلقه گوشه ای $S$ در $R$ می‌نامیم.

- برای مثال اگر $e$ یک خوتوان مرکزی از $R$ باشد، حلقه

$$eRe = \{r \in R | er = r = re\}$$

حلقه گوشه‌ای از $R$ است که دارای همانی $e$ می‌باشد.

**تعریف ۶.۱.۱.** ویژگی $P$ را برای حلقه $R$، ویژگی پایای موریتا[1] می‌نامیم هرگاه این ویژگی از $R$ به $M_n(R)$ و $eRe$ برای هر خودتوان نابدیهی $e$ از $R$ انتقال یابد.

**تعریف ۷.۱.۱.** حلقه $R$ را آبلی گوییم هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

**مثال ۸.۱.۱.** حلقه ماتریس‌های بالامثلثی

$$R = T_2(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

آبلی نمی‌باشد زیرا برای خودتوان غیربدیهی $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $r = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ از $R$،

$$er = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = re.$$

**تعریف ۹.۱.۱.** برای حلقه دلخواه $R$، عضو $a$ از $R$ را فون نیومن[2] منظم نامیم هرگاه عنصری چون $r \in R$ چنان موجود باشد که $a = ara$. به ویژه حلقه $R$ را فون نیومن منظم می‌نامیم هرگاه هر عضو $a$ از $R$، فون نیومن منظم باشد.

---
[1] Morita invariant
[2] Von Neumann

• برای مثال تمام عناصر وارون‌پذیر و عناصر خودتوان، عناصری منظم به مفهوم فون‌نیومن هستند.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** حلقه $R$ را آبلی منظم نامیم اگر فون نیومن منظم و آبلی باشد.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** عضو $a$ در حلقه $R$ را منظم نامیم اگر $a$ نه مقسوم‌علیه صفر چپ و نه مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** حلقه $R$ را نیم جابه‌جایی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آن‌گاه $aRb = 0$.

**تعریف ۱۳.۱.۱.** عضو $a$ از حلقه $R$ را پوچ‌توان نامیم هرگاه به ازای عضوی مانند $n \in \mathbb{N}$، $a^n = 0$. هم چنین مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه $R$ را با $\operatorname{nil}(R)$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** حلقه $R$ را دارای شاخص کراندار پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه یک عدد صحیح $n \geq 1$ چنان موجود باشد که برای هر عضو پوچ‌توان $a \in R$، $a^n = 0$.

**تعریف ۱۵.۱.۱.** ایده‌آل $I$ از حلقه $R$ را پوچ‌توان نامیم هرگاه تمام عناصر $I$ پوچ‌توان باشند.

**گزاره ۱۶.۱.۱.** برای حلقه $R$ شرایط زیر معادلند:

۱. $R$ فاقد عنصر پوچ‌توان ناصفر است.

۲. برای هر عضو $a \in R$، $a^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $a = 0$.

*اثبات.* (۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم $a \in R$ عضو ناصفری باشد که $a^n = 0$ و $n$ کوچکترین عددی باشد که در این رابطه صدق می‌کند در این صورت $(a^{n-1})^2 = a^n \cdot a^{n-2} = 0$. طبق فرض، $a^{n-1} = 0$ که تناقض است. □

**تعریف ۱۷.۱.۱.** حلقه $R$ را کاهش‌یافته گوییم هرگاه در یکی از شرایط گزاره ۱۶.۱.۱ صدق کند.

**مثال ۱۸.۱.۱.** حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ کاهش‌یافته است. هم‌چنین هر میدان و هر حلقه چندجمله‌ای روی میدان، حلقه‌های کاهش‌یافته می‌باشند.

**گزاره ۱۹.۱.۱.** اگر حلقه $R$ آبلی منظم باشد آن‌گاه $R$ حلقه کاهش‌یافته است.

*اثبات.* با توجه به تعریف حلقه منظم، برای هر $a \in R$ عنصر ناصفر $r \in R$ چنان موجود است که $ara = a$. بنابراین عنصر $ra \in R$ یک عضو خودتوان از حلقه $R$ است. حال از آن جا که حلقه $R$ آبلی است $ara = a^2r = a$. با فرض $a^2 = 0$، $a = 0$. در نتیجه حلقه $R$ کاهش‌یافته می‌باشد. □

**تعریف ۲۰.۱.۱.** حلقه $R$ را برگشت‌پذیر گوییم هرگاه برای عناصر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آن‌گاه $ba = 0$.

**لم ۲۱.۱.۱.** هر حلقه کاهش‌یافته، حلقه برگشت‌پذیر است.

*اثبات.* فرض کنیم حلقه $R$، کاهش‌یافته باشد و برای $a, b \in R$، $ab = 0$. در نتیجه $baba = 0$ که بنا بر فرض $ba = 0$. □

**لم ۲۲.۱.۱.** اگر حلقه $R$ برگشت‌پذیر باشد آن‌گاه $R$ حلقه نیم‌جابه‌جایی است.

*اثبات.* فرض کنیم $R$ حلقه برگشت‌پذیر باشد و برای $a, b \in R$، $ab = 0$. در این صورت برای هر $r \in R$، $rba = 0$. در نتیجه $arb = 0$. □

**نتیجه ۲۳.۱.۱.** هر حلقه کاهش‌یافته، حلقه نیم‌جابه‌جایی است.

**تعریف ۲۴.۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. یک $R$ـمدول راست، یک گروه آبلی جمعی $M$ همراه با نگاشت $M \times R \to M$ است به طوری که برای هر $r, s \in R$ و $m_1, m_2 \in M$،

۱. $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$؛

۲. $m(r + s) = mr + ms$؛

۳. $(ms)r = m(sr)$.

**تعریف ۲۵.۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه و ${}_RM_R$ یک $R$ـدو مدول باشد. توسیع بدیهی از $R$ بوسیله $M$ را به صورت $T(R,M) = R \oplus M$ نمایش می‌دهیم به طوری که دارای عمل جمع معمولی و ضرب به صورت $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$ می‌باشد. هم‌چنین حلقه $T(R,M)$ با حلقه ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}; r \in R, m \in M$$

یکریخت است به طوری که عمل ضرب ماتریس‌ها روی آن برقرار می‌باشد. هم‌چنین اگر حلقه $R$ جابه‌جایی و $M$ یک $R$ـمدول باشد آن‌گاه حلقه $R \oplus M$ با ضرب

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + r_2m_1)$$

را به صورت $R\ (+)\ M$ نمایش می‌دهیم.

**گزاره ۲۶.۱.۱.** اگر حلقه $R$ کاهش‌یافته باشد آن‌گاه

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$$

حلقه نیم‌جابه‌جایی است.

*اثبات.* فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$$

با جمع و ضرب زیر در نظر گرفته شود

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2,a_1b_2+b_1a_2,a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2,a_1d_2+d_1a_2).$$

با فرض $(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2)=0$ خواهیم داشت

۱. $a_1a_2=0$،

۲. $a_1b_2+b_1a_2=0$،

۳. $a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2=0$،

۴. $a_1d_2+d_1a_2=0$.

از آن‌جایی که حلقه $R$ کاهش‌یافته و از این‌رو نیم‌جابه‌جایی است، بنابر رابطه(۱)، $a_1Ra_2=0$. حال رابطه (۲) را از راست در $a_2$ ضرب می‌کنیم. در این‌صورت $0=a_1b_2a_2+b_1a_2a_2=b_1a_2a_2$ و بنابراین $b_1a_2=0$. از این رو $b_1Ra_2=0$. لذا $a_1b_2=0$ و در نتیجه $a_1Rb_2=0$. به‌طور مشابه بنابر رابطه (۴)، $a_1Rd_2=0$ و $d_1Ra_2=0$. حال اگر رابطه (۳) را از راست در $a_2$ ضرب کنیم، $0=a_1c_2a_2+b_1d_2a_2+c_1a_2a_2=c_1a_2a_2$ و در نتیجه $c_1a_2=0$. از این رو $c_1Ra_2=0$ بنابراین $a_1c_2+b_1d_2=0$. حال تساوی قبل را در $a_1$ ضرب می‌کنیم. در این‌صورت $0=a_1c_2a_1+b_1d_2a_1=a_1c_2a_1$ زیرا $a_1d_2=0$ نتیجه می‌دهد $d_2a_1=0$. لذا $a_1Rc_2=0$ در نتیجه $b_1Rd_2=0$. حال با توجه به محاسبات قبلی برای هر عضو $r,s,t,u$ از $R$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(r,s,t,u)(a_2,b_2,c_2,d_2)=$$

$$(a_1ra_2,a_1rb_2+a_1sa_2+b_1ra_2,a_1rc_2+a_1sd_2+b_1rd_2+a_1ta_2+b_1ua_2+c_1ra_2,a_1rd_2+a_1ua_2$$

$$+d_1ra_2)=0.$$

به طور معادل برای هر عضو

$$\begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\in S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s & t \\ 0 & r & u \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0$$

بنابراین حلقه $S$ نیم‌جابه‌جایی می‌باشد. □

با مثالی نشان می‌دهیم که حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی برگشت‌پذیر نیستند.

**مثال ۲۷.۱.۱.** اگر حلقه $R$ کاهش‌یافته باشد، حلقه $S$ در گزاره ۲۶.۱.۱، یک حلقه نیم‌جابه‌جایی است اما برگشت‌پذیر نمی‌باشد زیرا برای

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

$\beta\alpha \neq 0$ و $\alpha\beta = 0$ **لذا** $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

**لم ۲۸.۱.۱.** اگر حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی باشد آن‌گاه $R$ حلقه آبلی است.

*اثبات.* فرض کنیم حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی باشد ادعا می‌کنیم هر خودتوان حلقه $R$ مرکزی است. برای این منظور اگر خودتوان $e^2 = e \in R$ را در نظر بگیریم، $e(1-e) = 0$. در این صورت برای هر $r \in R$، $er(1-e) = 0$. در نتیجه $er = ere$ و به طور مشابه $re = ere$. **لذا** $er = re$ و از این رو هر خودتوان حلقه $R$ مرکزی است. □

**نتیجه ۲۹.۱.۱.** هر حلقه کاهش‌یافته، حلقه آبلی است.

**لم ۳۰.۱.۱.** اگر حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی باشد آن‌گاه $\mathrm{nil}\,(R)$ ایده‌آلی از $R$ است.

*اثبات.* فرض می‌کنیم $a, b \in \mathrm{nil}\,(R)$ به طوری‌که $a^m = b^n = 0$. اگر $k = m + n + 1$ آن‌گاه

$$(a+b)^k = \sum_s a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s}.$$

حال $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $0 \leq i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_s \leq k$ و $i_1 + i_2 + \ldots + i_s + j_1 + j_2 + \ldots + j_s = k$. اگر $i_1 + i_2 + \ldots + i_s \geq m$، آن‌گاه $a^{i_1} a^{i_2} \ldots a^{i_s} = a^{i_1+i_2+\ldots+i_s} = 0$. بنابراین از آن‌جا که حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی است، $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s} = 0$. با فرض $i_1 + i_2 + \ldots + i_s < m$، $j_1, j_2, \ldots, j_s \geq n$. بنابراین $b^{j_1+j_2+\ldots+j_s} = 0$. به طور مشابه با توجه به ویژگی نیم‌جابه‌جایی حلقه $R$، $a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_s} b^{j_s} = 0$. از این‌رو $(a+b)^k = 0$. حال فرض می‌کنیم $a^m = 0$ و $r \in R$. از آن‌جا که حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی است، $(ar)^m = (ra)^m = 0$. در نتیجه $\mathrm{nil}\,(R)$ ایده‌آلی از $R$ می‌باشد.

□

**لم ۳۱.۱.۱.** اگر حلقه $R$ نیم‌جابه‌جایی باشد آن‌گاه $\mathrm{nil}\,(R)[x] \subseteq \mathrm{nil}\,(R[x])$.

*اثبات.* فرض می‌کنیم برای $i = 0, 1, \ldots, n$، $a_i^{m_i} = 0$. اگر $k = m_0 + m_1 + \ldots + m_n + 1$ آن‌گاه

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^k = \sum_{s=0}^{nk} \Big( \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=s} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \Big) x^s.$$

جمله $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ را در نظر می‌گیریم به طوری‌که $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. اگر تعداد $a_0$ در جمله $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ بیشتر از $m_0$ باشد آن‌گاه $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ را به‌صورت $b_0 a_0^{j_1} b_1 a_0^{j_2} \ldots b_{t-1} a_0^{j_t} b_t$ در نظر می‌گیریم به طوری‌که $j_1 + j_2 + \ldots + j_t > m_0$، $1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_t$ و $b_i$ حاصل‌ضرب بعضی اعضای $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ و یا مساوی $1$ می‌باشد. از آن‌جایی که $a_0^{j_1+j_2+\ldots+j_t} = 0$ و $R$ نیم‌جابه‌جایی است، $b_0 a_0^{j_1} b_1 a_0^{j_2} \ldots b_{t-1} a_0^{j_t} b_t = 0$ و بنابراین $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} = 0$. حال اگر تعداد $a_i$ ها در جمله $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ بیشتر از $m_i$ باشد آن‌گاه مشابه محاسبات قبلی $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} = 0$، از این‌رو $\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=s} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} = 0$. در نتیجه $(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^k = 0$. □

**تعریف ۳۲.۱.۱.** اشتراک همه ایده‌آل های چپ (راست) ماکسیمال از حلقه $R$ را رادیکال جیکوبسن[۱] $R$ نامیم که با $\mathrm{rad}\ R$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳۳.۱.۱.** $R$ـمدول $M$ را ساده گوییم هرگاه دارای زیرمدول غیربدیهی نباشد.

**لم ۳۴.۱.۱.** فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. برای $a \in R$ شرایط زیر معادلند:

۱. $a \in \mathrm{rad}\ R$؛

۲. برای هر $b \in R$، $1 - ba$ از چپ وارون‌پذیر است؛

۳. برای هر $R$ـمدول چپ ساده $M$، $aM = 0$.

*اثبات.* (۲) $\Leftarrow$(۱) ، فرض می‌کنیم $a \in rad(R)$. اگر برای بعضی $b$ های عضو $R$، $1 - ba$ وارون‌پذیر نباشد آن‌گاه بنابر لم زورن $R(1 - ba) \subset R$ مشمول در یک ایده‌آل چپ ماکسیمال $I$ است. اما از آن‌جا که $1 - ba$ و $a$ اعضایی از $I$ هستند، $1 \in I$ که تناقض است.
(۳) $\Leftarrow$(۲)، فرض می‌کنیم برای بعضی $m$ های عضو $M$، $am \neq 0$ آن‌گاه $R \cdot am = M$. از طرفی برای بعضی $b$ های عضو $R$، $m = b \cdot am$. بنابر این $(1 - ba)m = 0$. اما بنابر (۲)، از آن‌جا که $(1 - ba)$ از چپ وارون‌پذیر است، $m = 0$ که تناقض می‌باشد.
(۱) $\Leftarrow$(۳)، برای هر ایده‌آل چپ ماکسیمال $I$، $\frac{R}{I}$ یک $R$ ـمدول چپ ساده می‌باشد. بنابراین طبق (۳)، $a \cdot \frac{R}{I} = 0$ در نتیجه $a \in I$. لذا طبق تعریف رادیکال جیکوبسن، $a \in \mathrm{rad}\ R$. □

**لم ۳۵.۱.۱.** اگر $R$ یک حلقه و $I \subseteq R$ ایده‌آل چپ پوچ باشد آن‌گاه $I \subseteq \mathrm{rad}\ R$.

*اثبات.* فرض کنیم $a \in I$ در این صورت برای هر $b \in R$، $ba \in I$ پوچ‌توان است. لذا عدد صحیح $n > 0$ چنان موجود است که $(ba)^n = 0$. در نتیجه $(1 + ba + \ldots + (ba)^{n-1})(1 - ba) = 1$. بنابراین $(1 - ba)$ دارای وارون چپ است. حال طبق لم ۳۴.۱.۱، $a \in \mathrm{rad}\ R$. □

[۱] Jacobson radical

**گزاره ۳۶.۱.۱.** اگر حلقه $R$ فون نیومن منظم باشد آن‌گاه $\operatorname{rad} R = 0$.

*اثبات.* فرض کنیم $a \in \operatorname{rad} R$ بنابراین عنصر $b$ از $R$ چنان موجود است که $aba = a$. از طرفی طبق لم ۳۴.۱.۱، $1 - ba$ از چپ وارون‌پذیر است. در این صورت $a(1 - ba) = a - aba = 0$ نتیجه می‌دهد $a = 0$. بنابراین $\operatorname{rad} R = 0$. □

**تعریف ۳۷.۱.۱.** ایده‌آل $I$ از حلقه $R$ را ایده‌آل اول نامیم اگر $I \neq R$ و برای ایده‌آل‌های $J, K \subseteq R$،

$$J \cdot K \subseteq I \Rightarrow J \subseteq I \quad \text{یا} \quad K \subseteq I$$

**تعریف ۳۸.۱.۱.** رادیکال پوچ پایینی حلقه $R$ برابر با اشتراک همه ایده‌آل‌های اول $R$ می‌باشد و به صورت $\operatorname{Nil}_* R = \sqrt{(0)}$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳۹.۱.۱.** حلقه $R$ را نیم اول گوییم هرگاه به ازای هر $a \in R$، $aRa = 0$ نشان دهد $a = 0$.

**گزاره ۴۰.۱.۱.** برای هر حلقه $R$ شرایط زیر معادلند:

۱. حلقه $R$ نیم اول می‌باشد؛

۲. $\operatorname{Nil}_* R = 0$؛

۳. $R$ دارای ایده‌آل پوچ‌توان ناصفر نمی‌باشد؛

۴. $R$ دارای ایده‌آل چپ پوچ‌توان ناصفر نمی‌باشد.

*اثبات.* رجوع شود به ([۱۶]، گزاره ۱۰.۱۶). □

• برای مثال هر حلقه کاهش‌یافته، حلقه نیم‌اول است.

**تعریف ۴۱.۱.۱.** رادیکال پوچ بالایی حلقه $R$ برابر با جمعی از همه ایده‌آل‌های پوچ $R$ می‌باشد که به صورت $\operatorname{Nil}^* R$ نمایش می‌دهیم به‌طوری که $\operatorname{Nil}^* R$ بزرگ‌ترین ایده‌آل پوچ از حلقه $R$ است. از این رو $\operatorname{Nil}^* R = \{a \in R : (a) \text{ پوچ}\}$.