بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

وجود یک خودریختی غیر داخلی مرتبه ی p، برای P–گروه ها

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

پژوهشگر:

فاطمه السادات میریان

آبان ماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم فاطمه السادات میریان

تحت عنوان:

وجود یک خودریختی غیر داخلی مرتبه p برای p –گروهها

در تاریخ ... ۸۸/۸/۲۰..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر محمدجواد عطایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

بار الها تو را سپاس می گویم که به مدد و یاری تو و با تکیه به رحمت تو توانایی هر کاری را حتی در سخترین شرایط برای انسان مقدور می سازی. خدایا تو را سپاس می گویم که منت امنیت و سلامت را به من عطا کردی تا بتوانم در طلب علم گامی هر چند ناچیز بردارم.

به مصداق حدیث شریف که می فرماید "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق"

بر خود واجب می دانم که از زحمات استاد علم و اخلاق خویش، جناب آقای دکتر محمدی که افتخار شاگردی در محضر ایشان را دارم وهمواره و بی دریغ مرا مرهون راهنمایی ها و الطافشان قرار دادند صادقانه سپاس گذارم.

همچنین از داورهای محترم جناب آقای دکتر عبدالهی و جناب آقای دکتر عطایی که قبول زحمت کردند و پایان نامه ی بنده را مطالعه کردند تشکر می کنم.

از پدر عزیزم که درس سخت کوشی، همت و اراده ی آهنین داشتن را به من آموخت و مادر مهربانم که نگاهش همواره سایه ساری از مهر بر سرم گردانیده و امید به موفقیت را از او آموختم، تشکر می کنم.

برای تشکر از همسر صبور، مهربان و فداکارم که در دوران تحصیل زحمت فراوان به ایشان دادم وبهترین یاور من در این دوران بودند زبانم قاصر است. از خداوند متعال سلامتی و توفیق روز افزون ایشان را خواستارم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معمار و همه ی دوستانی که در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند سپاسگزارم.

تقدیم به مهربانان زندگی ام

پدر و مادر

و همسرم

چکیده

فرض کنید G یک p-گروه متناهی غیر آبلی است و p یک عدد اول باشد. یک حدس قدیمی بیان می کند که G دارای خودریختی غیرداخلی از مرتبه ی p است. هدف اصلی این پایان نامه این است که نشان دهیم، اگر G یک p-گروه متناهی غیرآبلی باشد که $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$، آنگاه G دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه ی p است که هر عضو از زیرگروه فراتینی را ثابت نگه می دارد. همچنین نشان می دهیم که اگر G یک p-گروه متناهی غیر آبلی از رده ی پوچ توانی ۲ باشد، آنگاه G دارای خودریختی غیرداخلی از مرتبه ی p است که یا عناصر $\Phi(G)$ یا عناصر $\Omega_1(Z(G))$ و در نهایت عناصر $Z(G)$ را ثابت نگه می دارد .

واژه های کلیدی

خودریختی غیرداخلی ، p-گروه فراتینی ،p-گروه غیرآبلی کمین، p-گروه ویژه ، p-گروه فوق ویژه.

فهرست مندرجات

مقدمه

فرض کنید p عدد اول و G یک p—گروه متناهی باشد. درفصل اول تعاریف و قضایایی که در ادامه مورد نیاز است بیان می کنیم.

درفصل دوم نشان می دهیم که هر p—گروه غیر آبلی کمین مانند G، از رده‌ی پوچ توانی ۲ است و $Z(G) = \Phi(G)$. که $\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی G است. نهایتاً نشان می‌دهیم که هر p—گروه غیر آبلی کمین دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه‌ی p است که هرعنصر از زیرگروه فراتینی را ثابت نگه می‌دارد.

در فصل سوم با p—گروه ویژه و p—گروه فوق ویژه آشنا می شویم وسپس p—گروه فراتینی و p—گروه فراتینی قوی را معرفی می کنیم. همچنین نشان می دهیم که اگر G یک p—گروه‌غیرآبلی فراتینی باشد، آن‌گاه یکی از شرایط زیر برقرار است.

۱) G حاصل ضرب مرکزی p—گروه های غیر آبلی از مرتبه‌ی $p^2|Z(G)|$ می‌باشد، که مرکز های آنها با هم برابر و برابر با مرکز G هستند.

۲) $G = E.F$، حاصل ضرب مرکزی گروه‌های فراتینی E و F است که $C_F(Z(\Phi(F)) = \Phi(F)$ و $E = C_G(F)$ به طوری که $\Phi(E) \leqq Z(G)$.

به‌علاوه در (۲)، $E = Z(G)$ یا E یک حاصل ضرب مرکزی به صورت (۱) است .

در فصل چهارم شرایط کافی برای وجود خودریختی غیر داخلی از مرتبه‌ی p برای p—گروه‌های متناهی رابه دست می آوریم. در بخش ۲.۴ نشان می‌دهیم که اگر X حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های A و B باشد و A دارای خودریختی غیر داخلی از مرتبه‌ی p باشد که $Z(A)$ را ثابت نگه می دارد، آن‌گاه X نیز دارای یک خودریختی غیر داخلی از مرتبه‌ی p است که هر عنصر $Z(A)$ و B و لذا $Z(X)$ را ثابت نگه می دارد و بااستفاده از این موضوع و قضیه‌ای که در فصل سوم مطرح شد، نشان می‌دهیم که‌اگر G یک p—گروه غیرآبلی متناهی باشد به‌طوری که $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$، آن‌گاه G دارای خودریختی غیرداخلی از مرتبه‌ی p است که هر عنصر از $\Phi(G)$ را ثابت نگه می‌دارد.

در بخش ۳.۴ نشان می‌دهیم که اگر G یک p—گروه متناهی غیر آبلی از رده‌ی پوچ توانی ۲ باشد، آن‌گاه G دارای یک خودریختی غیر داخلی از مرتبه‌ی p است که یا عناصر $\Phi(G)$ یا عناصر $\Omega_1(Z(G))$ را ثابت نگه می دارد.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی در زمینه‌ی جبر و گروه که در اثبات قضایای فصل‌های بعد به‌کار می‌روند بیان شده است. خواننده می‌تواند اثبات اکثر این قضایا را در کتاب های نظریه ی گروه ها پیدا کند. بنابراین از آوردن اثبات برخی از آن‌ها خودداری می‌کنیم و به اثبات قضایایی که عمومیت کمتری دارند، می‌پردازیم.

۱—۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی گروه

تذکر ۱—۱.۱ درسراسر پایان نامه، p همواره یک عدد اول است.

تعریف ۱—۲.۱ فرض کنید G یک گروه باشد و S زیرمجموعه‌ای از G باشد، دراین صورت $\bigcap_{S\subseteq H\leqslant G} H$، یعنی اشتراک تمام زیرگروه‌های G که شامل S هستند را زیر گروه تولید شده توسط S گویند وآن را با $< S >$ نشان می دهند. S را مجموعه مولدهای این زیرگروه گویند و اگر $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ متناهی باشد، می نویسیم $< S >=< s_1, \ldots, s_n >$ وآن را متناهی المولد گوییم. همچنین اگر $a \in G$ وجود داشته باشد به طوری که $G = \{a^m | m \in \mathbb{Z}\}$، آنگاه G رایک گروه دوری گویند. دراین‌صورت a را مولد G گفته و می نویسیم $G =< a >$.

قضیه ۱—۳.۱ فرض کنیم $G =< a >$ گروهی دوری باشد. هرگاه G نامتناهی باشد، آنگاهa وa^{-1} تنها مولدهای G اند. هرگاه G متناهی از مرتبه‌ی m باشد، آنگاه a^k یک مولد G است اگروفقط اگر $(k, m) = 1$.

اثبات. رجوع کنید به [[۹]، صفحه‌ی ۵۵]. □

تعریف ۱—۴.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. به ازای هر $a \in G$ قرار می دهیم
$$C_G(a) = \{g \in G | ga = ag\}$$
$C_G(a)$ را مرکز ساز a در G می نامیم و زیرگروهی از G است.

به طور کلی تر اگر X زیرمجموعه ی دلخواه ونا تهی از G باشد مرکزساز X در G عبارت است از$C_G(X) = \{g \in G | \forall x \in X, gx = xg\}$. چون اشتراک هر دسته از زیرگروه‌های

G مجدداًزیر گروه است $C_G(X)=\bigcap_{x\in X} C_G(x)$ نیز زیر گروه G است.

تعریف ۱ــ۵.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. قرار دهیم
$Z(G)=\{z\in G|zx=xz, x\in G$ برای هر$\}$ و $Z(G)$ را مرکز گروه G گویند.

نکته ۱ــ۶.۱ برای هر گروه دلخواهG، اولاً $Z(G)=\bigcap_{a\in G} C_G(a)$. ثانیاً $Z(G)$ زیرگروهی از G است.

واضح است که $C_G(a)=G$ اگر و تنها اگر $a\in Z(G)$. همچنین G آبلی است اگر و تنها اگر $Z(G)=G$.

تعریف ۱ــ۷.۱ فرض کنید G یک گروه و X زیرمجموعه‌ی غیر تهی از G باشد. نرمال ساز X در G را که با $N_G(X)$ نشان می دهند عبارت است از $N_G(X)=\{g\in G|gX=Xg\}$ که درآن

$$Xg=\{xg|x\in X\} \qquad , \qquad gX=\{gx|x\in X\}$$

اگر قرار دهیم $g^{-1}Xg=\{g^{-1}xg|x\in X\}$، می توان نوشت
$N_G(X)=\{g\in G|g^{-1}Xg=X\}$.

قضیه ۱ــ۸.۱ فرض کنیدG یک گروه و H و K زیرگروه‌های G باشند. دراین صورت

(۱) $C_G(H)\leqslant N_G(H)$.

(۲) اگر $H\leqslant G$ آن گاه $C_K(H)=C_G(H)\cap K$.

(۳) $H\leqslant Z(G)$ اگر و تنها اگر $G=C_G(H)$.

(۴) H آبلی است اگر و تنها اگر $H \leqslant C_G(H)$.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۸]، صفحه‌ی ۳۷]. □

تعریف ۱—۹.۱ اگر G و H دو گروه باشند، گوییم تابع $f : G \longrightarrow H$ همریختی است، هر گاه برای هر $x, y \in G$ داشته باشیم $f(xy) = f(x)f(y)$.

هر گاه همریختی f یک به یک باشد آن را تکریختی و اگر پوشا باشد آن را بروریختی گوییم. اگر f یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی گوییم. اگر $f : G \longrightarrow H$ یکریختی باشد گوییم، G با H یکریخت است و می‌نویسیم $G \cong H$.

تعریف ۱—۱۰.۱ اگر G یک گروه باشد، یک همریختی از G به G را یک درونریختی G گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی درونریختی های G رابا $End(G)$ نشان می‌دهیم.

یکریختی از G به G را خودریختی گوییم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی های G را با $Aut(G)$ نشان می دهیم و با عمل ترکیب توابع گروه است.

تعریف ۱—۱۱.۱ گروه‌خودریختی های $Aut(G)$ یک زیرگروه مهم دارد و آن $Inn(G)$ متشکل از خودریختی های داخلی G است. خودریختی‌های داخلی G به‌صورت زیر تعریف می شود.

اگر $g \in G$ تابع $\tau_g : G \longrightarrow G$ را با ضابطه‌ی $\tau_g(x) = g^{-1}xg$ خودریختی داخلی G القا شده با g گوییم.

لم ۱—۱۲.۱ فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. در این صورت $\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$.

اثبات. رجوع کنید به [[۲۱]، صفحه‌ی ۱۹٦]. □

لم ۱—۱۳.۱ فرض G یک گروه باشد. $Inn(G) = \{I_G\}$ اگر وتنها اگر G آبلی باشد.

اثبات. رجوع کنید به [[۲۱]، صفحه‌ی ۱۴۸]. □

تعریف ۱—۱۴.۱ هر خودریختی G را که داخلی نباشد، خودریختی غیرداخلی (خارجی) G گوییم و تعریف می کنیم $Out(G) = \frac{Aut(G)}{Inn(G)}$.

تعریف ۱—۱۵.۱ فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leqslant G$. گوییم H در G کاملاً پایا است، هر گاه تحت درونریختی های G پایا باشد. یعنی برای هر $\alpha(H) \subseteq H, \alpha \in End(G)$.

گوییم H در G مشخصه است و می‌نویسیم $H \ \ char \ \ G$ هر گاه تحت خودریختی های G پایا باشد. یعنی برای هر $\alpha(H) \subseteq H, \alpha \in Aut(G)$.

همچنین H در G نرمال گوییم و می نویسیم $H \trianglelefteq G$ هر گاه تحت خودریختی های داخلی G پایا باشد. یعنی برای هر $g^{-1}Hg \subseteq H, \tau_g(H) \subseteq H$.

واضح است که اگر H کاملاً پایا باشد آنگاه مشخصه نیز هست و اگر H مشخصه باشد، آنگاه نرمال نیز هست.

لم ۱—۱٦.۱ فرض کنید H زیرگروهی از یک گروه G باشد. در این صورت $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ و $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۳]، صفحه‌ی ۳۸]. □

لم ۱—۱.۱۷ چنانچه H زیرگروه نرمالی از گروه G و K زیرگروه مشخصه‌ای از H باشد، آنگاه K یک زیرگروه نرمال از G خواهد بود. علاوه بر این اگر H زیرگروه مشخصه‌ی G باشد، آنگاه K نیز یک زیرگروه مشخصه‌ی G خواهد بود.

اثبات. رجوع کنید به[[۲۱]، صفحه‌ی ۱۶۴]. □

لم ۱—۱.۱۸ اگر G یک گروه باشد، آنگاه $Z(G) \ \ char \ \ G$.

اثبات. رجوع کنید به [[۲۱]، صفحه‌ی ۱۶۳]. □

تعریف ۱—۱.۱۹ فرض کنید $\alpha : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد. تعریف می‌کنیم

$$ker\alpha := \{x|x \in G, \alpha(x) = 1_H\} \ \ , \ \ Im\alpha := \alpha(G) = \{\alpha(x)|x \in G\}$$

لم ۱—۱.۲۰ فرض کنید $\alpha : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد. در این صورت

(i) $\alpha(x^n) = (\alpha(x))^n$ برای هر عدد صحیح n، به‌طوری که $\alpha(1_G) = 1_H$.

(ii) $Im\alpha \leqslant H$ و $ker\alpha \trianglelefteq G$

اثبات. رجوع کنید به [[۱۳]، صفحه‌ی ۱۸]. □

تعریف ۱—۱.۲۱ (اصل خوش ترتیبی) هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ کوچکترین عضو دارد. یعنی اگر $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{N}$، آنگاه $x \in S$ وجود دارد که به ازای هر $y \in S$، $x \leq y$.

لم ۱—۱.۲۲ فرض کنید $\alpha : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد. دراین صورت

(i) α تکریختی است اگرو تنها اگر $ker\alpha = 1_G$.

α (ii) بروریختی است اگرو تنها اگر $Im\alpha = H$.

α (iii) یکریختی است اگرو تنها اگر $ker\alpha = 1_G$ و $Im\alpha = H$.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۳] ، صفحه‌ی ۱۸]. □

تعریف ۱ــ۱.۲۳ اگر G یک گروه باشد و $x_1, x_2 \in G$، آنگاه $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ را جابجاگرهای x_2, x_1 گویند.

توجه داریم که‌برای $x, y \in G$، $xy = yx$ اگر و تنها اگر $[x, y] = 1$.

به طور کلی، برای $n \geq 2$ به طوری که $x_n \in G$، ...، x_1،

$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ تعریف می شود.

زیر گروه تولید شده توسط همه‌ی جابجاگرهای $[x, y]$ که $x, y \in G$ رازیرگروه مشتق G گوییم و آن را با G' نشان می دهیم. $G' = \langle [x, y] | x, y \in G \rangle$.

به علاوه اگر H و K زیرگروه‌هایی از G باشند، جابجاگرهای H و K عبارت است از

$$[H, K] = \langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle$$

بنابراین $G' = [G, G]$. می توان روند مشتق گیری را تعمیم داد و $(G')' = G''$ و $(G'')' = G'''$،....رامی توان تعریف کرد. قرار می‌دهیم $G^{(0)} = G$ و اگر $G^{(i)}$ تعریف شده باشد، $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$.

همچنین فرض کنید G_1، ...،G_n $n \geq 2$ زیرگروه‌های غیرتهی G باشد. دراین صورت $[G_1, \ldots, G_n] = [[G_1, \ldots, G_{n-1}], G_n]$ تعریف می شود.

لم ۱ــ۱.۲۴ فرض کنید G یک گروه باشد و N یک زیرگروه نرمال از G باشد. در این صورت

(i) $\frac{G}{N}$ آبلی است اگرو تنها اگر $G' \leqslant N$.

(ii) G آبلی است اگرو تنها اگر $G' = \{e\}$.

(iii) $\frac{G}{G'}$ آبلی است.

اثبات. رجوع کنید به [[۲۲] صفحه‌ی ۲۳۶]. □

لم ۱—۱.۲۵ فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که $G/Z(G)$ دوری است. در این صورت G آبلی است.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۹] ، صفحه‌ی ۱۶۶]. □

۱—۲ حاصل ضرب مستقیم و حاصل ضرب مرکزی

فرض کنید G_1 ،...، G_n گروه باشند. درمجموعه‌ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را چنین تعریف می کنیم

$(g_1, \ldots, g_n)(g'_1, \ldots, g'_n) = (g_1g'_1, \ldots, g_ng'_n)$ که در آن g_i وg'_i متعلق به G_i هستند، که $i \in \{1, \ldots, n\}$. به آسانی ملاحظه می شود که مجموعه ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ با عمل فوق گروه است. این گروه را حاصل ضرب مستقیم (خارجی)گروه هایG_1،...،G_n نامند وآن را با علامت $G_1 \times \ldots \times G_n$ نشان می دهند.

قضیه ۱—۱.۲ فرض کنید G_1، ...، G_n، گروه باشند و $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. دراین‌صورت G زیرگروه‌هایی مانند H_1، ...،H_n دارد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cong H_i$ و

(i) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \trianglelefteq G$.

(ii) $G = H_1 ... H_n$.

(iii)به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n = 1$.

واضح است که G آبلی است اگر وتنها اگر هرG_i، که $1 \leq i \leq n$ آبلی باشد.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۸]، صفحه‌ی ۱۰۱]. □

قضیه ۱ — ۲.۲ فرض کنید G یک گروه باشد و G_1، ...،G_n زیرگروه‌هایی از آن باشد به طوری که

(i)به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$.

(ii) $G = G_1 ... G_n$.

(iii) به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \ldots G_{i-1}G_{i+1} \ldots G_n = 1$.

در این صورت $G \cong G_1 \times \ldots \times G_n$.

اثبات. رجوع کنید به [[۱۸]، صفحه‌ی ۱۰۲]. □

تعریف ۱ — ۳.۲ گروه G حاصل ضرب مرکزی[1] زیرگروه‌های G_1، ...، G_n نامیده می شود، هر گاه شرایط زیر برقرار باشد.

(i) $G = G_1 ... G_n$.

(ii) به ازای هر i و j که $1 \leq i \neq j \leq n$، $[G_i, G_j] = 1$.

---

[1] central product