دانشگاه ارومیه

موضوع:

خمهای بیضوی از رتبه ۴ با نقاط گویای ۳- بخشی

رضا حیدرشناس

استاد راهنما:

دکتر علی سرباز جانفدا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

دی ماه ۱۳۸۷

پایان نامه براي دريافت درجه کارشناسي ارشد

۱۵-۷۵۰۳ ۲-۹۱۶ آقای رضا حیدرشاهی

پایان نامه به تاریخ ۱۳۸۲/۱۰/۲۴ شماره مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ قرار گرفت.

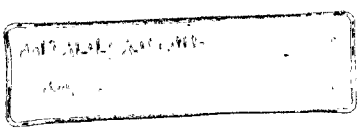
۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر جانفدا

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر بهروش

٤- داور داخلی: دکتر سرمد

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر ابراهیمی



تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

پشتوانه های زندگیم

برادرانم

که همواره یار و همراه من هستند

تقدیر و تشکّر

سپاس خداوندی را که حق ستایشش بالاتر از حد ستایشگران است. خدا را ستایش می‌کنم که توفیق رسیدن به این موفقیت را به من ارزانی داشت. جا دارد از کلیه‌ی کسانی که در به پایان رساندن این پایان‌نامه مرا یاری دادن تشکّر نمایم.

- از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر علی سرباز جانفدا که همواره با راهنمایی‌های خود مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری رساندند.
- از اساتید گرامی آقایان دکتر هوشنگ بهروش و دکتر رضا سزیده که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند.
- از پدر و مادر عزیزم که از ایشان گذشت و فداکاری و مهربانی را آموخته‌ام.
- از برادران عزیزم که در تمام مراحل زندگیم همواره همراه و یاور من بودند.
- از سرکار خانم مرضیه حسینی به‌خاطر دلداری و امیدی که همواره به من دادند.
- از دوستان گرامیم به‌ویژه حسن خیاط، پیام ابراهیم نژاد، بابک صمصامی، سید موسی موسوی.

چکیده

یک خانواده‌ی جهانی از خم‌های بیضوی از رتبه‌ی ۴ با نقاط گویای ۳–بخشی ساخته می‌شود. در ادامه نشان داده می‌شود که فضای پایه یک رویه‌ی $K3$ بیضوی است که گروه قطعه‌های آن از مرتبه‌ی نامتناهی می‌باشد. بنابراین ما تعداد نامتناهی خم بیضوی با j–پایاهای دوبه‌دو مجزا را بدست می آوریم.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

پیشگفتار

خم‌های بیضوی از لحاظ هندسی بسیار قابل توجه‌اند. این خم‌ها نظریه‌ی اعداد، هندسه‌ی جبری و آنالیز مختلط را به‌هم ربط می‌دهند و مهمترین کاربردهای آنها در تجزیه‌ی اعداد صحیح بسیار بزرگ، رمزنگاری و نظریه‌ی کدگذاری است. همچنین اندرو وایلز [1] با استفاده از این‌گونه خم‌ها سرانجام موفق شد آخرین قضیه‌ی فرما را به‌اثبات رساند.

این پایان‌نامه براساس مرجع [۲۶] تنظیم شده که هدف آن ساختن یک خانواده‌ی جهانی از خم‌های بیضوی از رتبه‌ی ۴ با نقاط گویای ۳–بخشی می‌باشد.

در تهیه‌ی این نوشتار تلاش کرده‌ایم تا مطالب به ساده‌ترین صورت بیان شود تا حدی که برای یک دانشجوی دوره‌ی کارشناسی که زمینه‌ی چندانی در هندسه‌ی جبری و نظریه‌ی اعداد ندارد قابل فهم باشد. این پایان‌نامه مشتمل بر ۴ بخش است.

در بخش I مفاهیم مقدماتی از جبر جابجایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش II مفاهیم اساسی از هندسه‌ی جبری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش III مختصری درباره‌ی تعریف خم‌های بیضوی و قضایای مربوط به‌آن را آورده‌ایم و در نهایت در بخش IV که بخش اصلی پایان‌نامه می‌باشد، ابتدا مختصری درباره‌ی رویه‌های بیضوی و رویه‌های $K3$ توضیح داده می‌شود و در نهایت یک خانواده‌ی جهانی از خم‌های بیضوی از مرتبه‌ی ۴ با نقاط گویای ۳–بخشی را ساختارسازی می‌کنیم. این ساختار ما را آگاه می‌سازد که هر خم‌بیضوی از رتبه‌ی ۴ با یک نقطه‌ی گویای ۳–بخشی به این خانواده تعلق دارد.

در بیشتر مواقع در انتخاب معادل فارسی لغات تخصصی، سعی بر آن بوده که حتی‌الامکان از واژه‌سازی پرهیز و از لغات مورد تأیید استفاده شود. لذا در مواردی مانند $variety$ و $affine$ و ... تلفظ لاتین لغات(واریته، آفین،...) بکار رفته است.

---

[1] andrew Wiles

بخش I

مفاهیم مقدماتی از جبر

۱ توسیع‌های میدان

تعریف ۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. زیر مجموعه‌ی $S \subset R$ را یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی[۱] می‌گوییم هرگاه $1 \in S$ و S تحت عمل ضرب بسته باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی مجموعه‌ی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(a,s) \sim (b,t) \iff \exists u \in S \ : \ (at-bs)u = 0.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی (a,s) را به صورت $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی تمامی کلاس‌ها را با $S^{-1}R$ نشان می‌دهیم. با تعریف دو عمل جمع و ضرب زیر، مجموعه‌ی $S^{-1}R$ به یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار تبدیل می‌شود که اعمال جمع و ضرب در این حلقه بصورت زیر می باشند:

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at-bs}{st}, \qquad \frac{a}{s}.\frac{b}{t}=\frac{ab}{st} \qquad (a,b \in R\ , s,t \in S)$$

هرگاه I ایده‌ال اولی از R باشد آنگاه به راحتی می‌توان دید که $S = R - I$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است که در این صورت مجموعه‌ی $S^{-1}R$ را به صورت R_I نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان نشان داد که حلقه‌ی R_I تنها یک ایده‌ال بیشین دارد یعنی R_I یک حلقه‌ی موضعی[۲] است. روند رسیدن از R به R_I را موضعی سازی[۳] R در I می‌گوییم.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکداری باشد که شامل هیچ مقسوم علیه‌ی از صفر نیست. در این صورت با فرض $S = R - \{0\}$، حلقه‌ی $S^{-1}R$ را میدان کسرهای حلقه‌ی R می‌گوییم.

---

[۱] multiplicative closed subset

[۲] local ring

[۳] localization

قضیه ۳.۱ (پایه‌ی هیلبرت)[۱] فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار بوده و تمامی ایده‌ال‌های آن متناهی مولد باشند. در این صورت حلقه‌ی $R[x_1,\ldots,x_n]$ جابجایی و یکدار بوده و تمامی ایده‌ال‌های آن متناهی مولد هستند.

اثبات : [بخش 7.9 از مرجع [۱۰]]. □

تعریف ۴.۱ فرض کنیم K یک میدان باشد. منظور از یک توسیع K، میدانی مثل L است که $K \subseteq L$. به راحتی می‌توان دید که L یک $K-$فضای برداری است. بعد این فضای برداری را درجه‌ی توسیع L روی K گفته و به صورت $[L:K]$ نشان می‌دهیم. هرگاه $[L:K] < \infty$، می‌گوییم L یک توسیع متناهی روی K است.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم L یک توسیع از K بوده و $A = \{a_1,\cdots,a_n\} \subseteq L$. کوچکترین میدان شامل K و A را توسیع تولید شده توسط A گفته و به صورت $K(A) = K(a_1,\ldots,a_n)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱ فرض کنیم L یک توسیع از K بوده و $K[X]$ حلقه‌ی چندجمله‌ایهای با ضرایب در K باشد. عنصر $a \in L$ را یک عنصر جبری روی K می‌گوییم هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفری در $K[X]$ باشد. در غیر این صورت عنصر a را یک عنصر متعالی روی K می‌گوییم.

تعریف ۷.۱ توسیع L از میدان K را یک توسیع جبری می‌گوییم هرگاه تمامی عناصر $a \in L-K$ روی K عناصر جبری باشند. همچنین هرگاه $a_1,\ldots,a_n \in L$ عناصری جبری روی K باشند در این صورت $K(a_1,\ldots,a_n)$ را توسیع جبری متناهی تولید شده توسط عناصر a_1، ...، a_n می‌گوییم.

تعریف ۸.۱ توسیع جبری N از میدان K را یک توسیع نرمال[۲] می‌گوییم هرگاه به ازای هر چندجمله‌ای $p(x) \in K[x]$ با ریشه‌ای در N، تمامی ریشه‌های $p(x)$ در N باشند.

[۱] Hilbert Basis Theorem

[۲] normal extention

تعریف ۹.۱ فرض کنیم L یک توسیع از K باشد. مجموعه‌ی تمامی یکریختی‌های حلقه‌ای $\sigma : L \longrightarrow L$ که عناصر K را ثابت نگه می‌دارند، گروه گالوای[۱] توسیع L روی K گفته و به صورت $G_{L/K}$ نشان می‌دهیم. به ازای هر زیرگروه H از $G_{L/K}$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Fix}(H) = \{x \in K | \forall \sigma \in H : \sigma(x) = x\},$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Fix}(H)$ زیرمیدانی از K است.

تعریف ۱۰.۱ میدان K را بسته‌ی جبری می‌گوییم هرگاه تمام ریشه‌های هر چندجمله‌ای غیر ثابت در $K[X]$، در K باشند. کوچکترین (نسبت به رابطه‌ی شمول) توسیع جبری میدان K را بستار جبری[۲] K می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنیم L یک توسیع جبری از میدان K باشد. می‌گوییم عنصر $a \in L$ روی K تفکیک پذیر[۳] است هرگاه ریشه‌ی ساده‌ای از چندجمله‌ای مینیمال خود باشد. توسیع L را یک توسیع تفکیک پذیر[۴] K گوییم اگر هر عنصر آن تفکیک پذیر باشند.

فرض کنیم K میدانی با مشخصه‌ی $\mathrm{char}(K) = p$ باشد. همریختی فروبنیوس $F : K \longrightarrow K$ به صورت $F(x) = x^p$ تعریف می‌شود. هرگاه این همریختی یک‌به‌یک باشد به راحتی می‌توان دید که $F(K) = K^p$ یک زیر میدان از K است.

تعریف ۱۲.۱ میدان K را یک میدان کامل[۵] می‌گوییم هرگاه $\mathrm{char}(K) = 0$ و یا در صورتی که $\mathrm{char}(K) = p$، داشته باشیم $K = K^p$. به عنوان مثال میدان $\mathbb{Q}$ و تمامی میدان‌های متناهی کامل هستند.

گزاره ۱۳.۱ میدان K کامل است اگر و تنها اگر هر توسیع جبری آن تفکیک‌پذیر باشد.

---

[۱] Galois Group
[۲] algebraic closure
[۳] separable
[۴] separable extention
[۵] perfect field

اثبات : [[۵]، گزاره‌ی 15.5]. □

تعریف ۱۴.۱ توسیع جبری (متناهی و یا نامتناهی) L از میدان K را یک توسیع گالوا گوییم هرگاه $K = \mathrm{Fix}(G_{L/K})$.

گزاره ۱۵.۱ توسیع جبری L از میدان K یک توسیع گالواست اگر و تنها اگر L یک توسیع نرمال و تفکیک‌پذیر از K باشد.

اثبات : [[۵]، گزاره‌ی 15.6.2]. □

تعریف ۱۶.۱ بزرگترین توسیع گالوای میدان K را بستار تفکیک‌پذیر[۱] K گفته و با K_s نشان می‌دهیم. در واقع، K_s زیر میدانی از بستار جبری $\bar{K}$ می‌باشد که شامل تمامی عناصر تفکیک‌پذیر روی K است. از تعریف میدان کامل و گزاره‌ی‌های ۱۳.۱ و ۱۵.۱ نتیجه می‌شود که $K_s = \bar{K}$ هرگاه $\mathrm{char}(K) = ۰$.

[۱] separable closure

۲ میدان‌های عددی

تعریف ۱.۲ عدد مختلط α یک عدد جبری[۱] نامیده می‌شود هرگاه روی $\mathbb{Q}$ جبری باشد. به‌عبارت دیگر α یک عدد جبری است هرگاه ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب در $\mathbb{Q}$ باشد. مجموعه‌ی همه‌ی اعداد جبری را با $\mathbb{A}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۲ مجموعه‌ی $\mathbb{A}$ که برابر مجموعه‌ی اعداد جبری است، زیرمیدانی از میدان اعداد مختلط می‌باشد.

اثبات : [[۲۲]، قضیه‌ی 2.1] □

تعریف ۳.۲ میدان K را یک میدان عددی[۲] می‌نامیم هرگاه K زیر میدانی از $\mathbb{C}$ باشد به‌طوریکه $[K : \mathbb{Q}]$ متناهی باشد. لذا هر عضو K یک عدد جبری است و در نتیجه داریم $K \subset \mathbb{A}$. در نتیجه اگر K یک میدان عددی باشد، اعداد جبری α_1 ، ...، α_n، موجودند به‌طوریکه داریم $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

قضیه ۴.۲ اگر K یک میدان عددی باشد، آنگاه عددی جبری مانند θ موجود است بطوریکه داریم $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

اثبات : [[۲۲]، قضیه‌ی 2.2] □

مثال ۵.۲ میدان عددی $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم α_1، α_2، ریشه‌های چندجمله‌ای مینیمال α روی $\mathbb{Q}$ و β_1، β_2 و β_3، ریشه‌های چندجمله‌ای مینیمال β روی $\mathbb{Q}$ باشند. در نتیجه داریم:

$$\alpha_1 = \sqrt{2}, \alpha_2 = \sqrt{-2},$$

$$\beta_1 = \sqrt[3]{5}, \beta_2 = \omega\sqrt[3]{5}, \beta_3 = \omega^2\sqrt[3]{5},$$

[۱] algebric number

[۲] number field

که در آن $\omega = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$، ریشه‌ی سوم واحد است. به‌کمک روشی که در اثبات قضیه‌ی ۴.۲ وجود دارد، می‌توان گفت که $\theta = \alpha + c\beta$، که در آن c عددی است که برای آن نامساوی

$$\alpha_i + c\beta_k \neq \alpha + c\beta$$

برای هر $i = 1, 2$ و $k = 1, 2, 3$، برقرار است. در اینجا با قرار دادن $c = 1$ این مطلب برقرار است. در نتیجه داریم $K = \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})$.

قضیه ۶.۲ فرض کنیم $K = \mathbb{Q}(\theta)$ یک میدان عددی از درجه‌ی n روی $\mathbb{Q}$ باشد، آنگاه دقیقاً n تکریختی مجزای $\sigma_i : K \to C$، که $i = 1, \ldots, n$، وجود دارد بطوریکه اعضای $\sigma_i(\theta) = \theta_i$، ریشه‌های مجزای چندجمله‌ای مینیمال θ روی $\mathbb{Q}$ می‌باشند.

اثبات : [[۲۲]، قضیه‌ی 2.4] □

تعریف ۷.۲ با نمادهای بالا، برای هر $\alpha \in K = \mathbb{Q}(\theta)$، چندجمله‌ای میدان[۱] α روی K را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_\alpha(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \sigma_i(\alpha)).$$

قضیه ۸.۲ ضرایب چندجمله‌ای میدان α روی K، اعداد گویا هستند. بنابراین داریم $f_\alpha(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

اثبات : [[۲۲]، قضیه‌ی 2.5] □

تعریف ۹.۲ فرض کنیم $K = \mathbb{Q}(\theta)$ یک میدان عددی از درجه‌ی n روی $\mathbb{Q}$ باشد و $\alpha \in K$. برای $i = 1, \ldots, n$، اعضای $\sigma_i(\alpha)$ را $K-$مزدوج‌های[۲] α می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۲ با نمادهای بالا، موارد زیر برقرارند:

(۱) چندجمله‌ای میدان f_α توانی از چندجمله‌ای مینیمال p_α (چندجمله‌ای مینیمال α روی $\mathbb{Q}$) می‌باشد؛

[۱] field polynomial

[۲] K-conjugates

(۲) $K-$مزدوج‌های α، صفرهای p_α در $\mathbb{C}$ هستند که n/m مرتبه تکرار می‌شوند که در آن $m=\partial p_\alpha$ یک مقسوم‌علیه از n می‌باشد؛

(۳) عنصر $\alpha\in\mathbb{Q}$ اگر و تنها اگر همه‌ی $K-$مزدوج‌های α مساوی باشند؛

(۴) $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\theta)$ اگر و تنها اگر $K-$مزدوج‌های α مجزا باشند؛

اثبات : [[۲۲]، قضیه‌ی 2.6] □

تعریف ۱۱.۲ فرض کنیم $K=\mathbb{Q}(\theta)$ یک میدان عددی از درجه‌ی n باشد. فرض کنیم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای K روی $\mathbb{Q}$ (بعنوان فضای برداری روی $\mathbb{Q}$) باشد. مبین[۱] این پایه را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta[\alpha_1,\dots,\alpha_n]=\{\det[\sigma_i(\alpha_j)]^2\}.$$

تبصره ۱۲.۲ فرض کنیم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ و $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$، دو پایه برای فضای برداری K روی $\mathbb{Q}$ باشند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\beta_k=\sum_{i=1}^{n}(c_{ik}\alpha_i)\qquad\qquad (c_{ik}\in\mathbb{Q})$$

که در آن $k=1,\dots,n$ و $\det(c_{ik})\neq 0$. آنگاه از خاصیت ضربی دترمینان‌ها و از این حقیقت که هر σ_i تکریختی می‌باشد (روی $\mathbb{Q}$ همانی عمل می‌کند)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\Delta[\beta_1,\dots,\beta_n]=[\det(c_{ik})]^2\Delta[\alpha_1,\dots,\alpha_n].$$

[۱] discriminant

بخش II

مفاهیمی از هندسه‌ی جبری

۳ واریته‌های آفینی

تعریف ۱.۳ فرض کنیم K یک میدان و $\bar{K}$ یک بستار جبری ثابت از آن باشد. $n-$فضای آفین (روی K)[۱] مجموعه $n-$تاییهای زیر است:

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\bar{K}) = \{P = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \bar{K}\}.$$

نقاط $K-$گویای[۲] $\mathbb{A}^n$ عبارت است از مجموعه

$$\mathbb{A}^n(K) = \{P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n : x_i \in K\}.$$

فرض کنیم $\bar{K}[X] = \bar{K}[X_1, \ldots, X_n]$ یک حلقه چندجمله ای با n متغیر بوده و $I \subset \bar{K}[X]$ یک ایده‌آل باشد. زیرمجموعه زیر از $\mathbb{A}^n$ را به I نسبت می دهیم:

$$V_I = \{P \in \mathbb{A}^n : \ f(P) = 0 \ ، \ f \in I \text{ هر}ازای\}$$

تعریف ۲.۳ یک مجموعه جبری (آفین)[۳] مجموعه ای به فرم V_I است. اگر V یک مجموعه جبری باشد، ایده‌آل V بصورت زیر تعریف می شود:

$$I(V) = \{f \in \bar{K}[X] : f(P) = 0, P \in V \text{ هر}ازای\}$$

گوییم یک مجموعه جبری V بر K تعریف شده است هرگاه ایده‌آل $I(V)$ توسط چندجمله ایهایی در $K[X]$ تولید شود. این مطلب را با V/K نشان می دهیم. اگر V روی K تعریف شود، مجموعه‌ی نقاط $K-$گویای V برابر با مجموعه‌ی زیر می‌باشد:

$$V(K) = V \cap \mathbb{A}^n(K).$$

---

[۱] affine n-space

[۲] K-rational points

[۳] affin algebraic set

تبصره ۳.۳ با توجه به قضیه پایه هیلبرت (۳.۱) همه ایده‌آل در $\bar{K}[X]$ و $K[X]$ متناهی مولد هستند.

تبصره ۴.۳ فرض می‌کنیم V یک مجموعه جبری باشد. ایده‌آل زیر از $K[X]$ را در نظر می‌گیریم:

$$I(V/K) = \{f \in K[X] : f(P) = 0,\ P \in V \text{ بازای هر }\} = I(V) \bigcap K[X].$$

V روی K تعریف شده است اگر و فقط اگر $I(V) = I(V/K)\bar{K}[X]$.

تذکر ۵.۳ فرض می‌کنیم که V روی K تعریف شده باشد و $f_1, \ldots, f_m \in K[X]$ مولدهایی برای $I(V/K)$ باشند. در اینصورت $V(K)$ دقیقا مجموعه جوابهای $(x_1, \ldots, x_n)$ از معادلات چندجمله‌ای $f_1(X) = \cdots = f_m(X) = 0$ است که در آن $x_1, \ldots, x_n \in K$.

یعنی

$$V(K) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K) : f_1(X) = \cdots = f_m(X) = 0\}$$

توجه کنید که اگر $f(x) \in K[X]$ و $P \in \mathbb{A}^n$ آنگاه بازای هر $\sigma \in G_{\bar{K}/K}$، داریم

$$f(P^\sigma) = f(P)^\sigma.$$

بنابراین اگر V روی K تعریف شود، آنگاه عمل $G_{\bar{K}/K}$ روی $\mathbb{A}^n$ عملی روی V القا می کند و

$$V(K) = \{P \in V : P^\sigma = P\ ,\ \sigma \in G_{\bar{K}/K} \text{ بازای هر}\}$$

تعریف ۶.۳ یک مجموعه جبری آفین V را یک واریته (آفین)[1] می‌نامیم هرگاه $I(V)$ یک ایده‌آل اول $\bar{K}[X]$ باشد. هر گاه V/K یک واریته باشد (یعنی V یک واریته تعریف شده روی K باشد)، در این‌صورت حلقه مختصاتی[2] آفین V/K بصورت

$$K[V] = K[X]/I(V/K)$$

[1] affine variety

[2] coordinate ring