بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش : آنالیز عددی

عنوان :

روش مرتبه سوم شبه چبیشف برای حل دستگاه های معادلات غیر خطی

استاد راهنما:

دکتر محمد علی فریبرزی عراقی

استاد مشاور:

دکتر جلیل رشیدی نیا

پژوهشگر:

مریم پازوکی

زمستان ۱۳۹۰

ISLAMIC AZAD UNIVERSITY

Centeral Tehran Branch

Faculty of Sciences -Dempartment of mathematics

"M.Sc" Thesis

On Applied Mathematics & Numerical Analysis

Subject:

The third order Chebyshev- like method for solving

systems of nonlinear equations

Advisor:

Dr. M. A. Fariborzi Araghi

Consulting-Advisor:

Dr. Jalil Rashidinia

By:

Maryam Pazoki

Winter 2011

ضمن سپاس بیکران از خداوند منان، شایسته می دانم کمال سپاسگزاری و تشکر خود را از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی ، که راهنمایی پروژه را برعهده داشتند و در پیشرفت پروژه از هیچ حمایتی دریغ ننمودند ، به جا آورم .

و به جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا ، استاد مشاور،و جناب آقای دکتر مجید امیرفخریان، استاد داور، نهایت قدر دانی و سپاس خود را ابراز می نمایم.

تقدیم به:

پدر عزیزم

خواهران مهربانم فرزانه ومینا

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

چکیده:

در این پایان نامه دو روش مرتبه سوم شبه چبیشف بدون استفاده از مشتق دوم معرفی شده است و کاربرد آن برای دستگاه‌های معادلات غیرخطی تحلیل گردیده است. این روش‌ها را با استفاده از تقریب‌های مختلف برای نمایش مشتق دوم در روش تکراری چبیشف بدست می آوریم. همچنین همگرایی موضعی و مرتبه سوم روش‌ها با استفاده از نظریه نقطه جذب مطالعه می کنیم. به علاوه ویژگی محاسباتی روش‌ها را با استفاده از مثال‌های عددی بررسی کرده‌ایم.

این پایان نامه بر اساس مرجع [۹] می باشد.

مقدمه

روش نیوتن مرتبه دوم [۱۷] یکی از معروف‌ترین روش‌های تکراری پذیرفته شده برای یافتن جواب‌های تقریبی دستگاه معادلات غیرخطی به شکل $F(x) = 0$ است [۲۱].روش‌های تکراری مرتبه سوم مانند روش‌های هالی[۱] و چبیشف[۲] [٤ و ۲۲]، با وجود همگرایی مرتبه سومشان، از نقطه نظر محاسباتی به دلیل مقرون به صرفه نبودن محاسبه مشتق دوم در عمل به ندرت استفاده می‌شوند.

در حقیقت برای یک دستگاه غیرخطی با n معادله و n مجهول، مشتق اول فرشه[۳] ماتریسی با n^2 مقدار است در حالی که مشتق دوم فرشه n^3 مقدار است. در نتیجه حجم عملیات محاسباتی در هر تکرار بسیار بالاتر خواهد شد. [٤].

هر چند در طول چند سال گذشته، بسیاری روش‌های تکراری مرتبه سوم دو نقطه ای بدون مشتق دوم بدست آمده است و برای دستگاه های غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۳۸و۲۵و۲۳و۲۱و۲۰و۱۹و۱۸و۱۵و۱٦و۱۳و۷و٦].این روش‌ها با استفاده از فرمول کوادراتور [۲۵ و ۲۰ و ۱۳] یا تقریب مشتق دوم [۳۸و۲۳و۱۹و۱۸و۷و٦] یا روش تجزیه آدومیان[٤] [۱٦] بدست آمده‌اند. این روش‌ها معمولاً با استفاده از روش نیوتن به عنوان گام اول، نیاز به محاسبه تابع یا مشتق اولشان در دو نقطه مختلف دارند.

تراب[٥] [۳۷ ص ۱۸۱] خانواده روش‌های مرتبه سوم دو نقطه ای شبه چبیشف را بر پایه تقریب مشتق دوم در روش چبیشف با استفاده از تفاضل متناهی بین دو مشتق اول را بدست آورده است.

این خانواده برای تابع تک متغیره به صورت زیر است:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}\left[\frac{(2\theta-1)f'(x^{(k)})+f'\left(x^{(k)}+\theta\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}\right)}{2\theta f'(x^{(k)})}\right] \quad ,\theta \neq 0 \qquad (۱)$$

هرناندز[٦] [۱۳] حالتی از این خانواده ($\theta = -\frac{1}{2}$ در معادله (۱))را در فضای باناخ توسعه داد.

[1] Hally
[2] Chebyshev
[3] Ferchet
[4] Adomian
[5] J. F. Traub
[6] M. A. Hernandez

در این پایان نامه، ما حالت دیگری را ($\theta = -1$ در معادله (۱)) برای دستگاه معـادلات غیرخـطی معرفی می‌کنیم. همچنین روش مرتبه سوم شبه چبیشف شناخته شده دیگری که توسط مؤلفان دیگر [۳۷و۳۵و۳۲] برای دستگاه و معـادلات بررسـی شده است را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اخـیراً این روش با روش تجزیه آدومیان بدست آمده است [۱۹].تفاوت آن با اعضای خانواده تراب در این است که در معادله (۱) نیاز به یک تابع و دو مشتق اول در هر تکرار است، اما این روش نیاز به محاسبه دو تابع و تنها یک مشتق اول دارد و چون در دستـگاه های بزرگ معادلات غیر خطی محاسبه ژاکوبین از تابع هزینه برتر اسـت این روش از اعضای خـانواده تراب مناسب‌تر اسـت. در فـصل۱ تعـریف ها و قضـیه های لازم بیان شده اسـت. در فصل۲ چند روش تکـراری از جمله روش‌های مرتبه سوم برای حل دستگـاه‌های معادلات غیر خـطی به همراه همگرایی، تعبیر هـندسی در حالت یک بعـدی و حل مثال‌های عـددی با استفاده از ایـن روش هـا بـیان شـده است. در فصـل۳ به معـرفی چند روش شبه چبیشـف بدون مشتق دوم پرداخـته ایم. در فصـل٤ دو روش شبه چبیشف جـدید معرفی شده است، همگـرایی موضعی دو روش با استفـاده از تئوری نقطه جذب تحلیل شده اسـت و همـگرایی مرتـبه سومشـان اثبات شده است. در فصـل۵ هزینه محـاسباتی این روش را شرح داده‌ایم. روش‌ها را برای حل برخی دستگاه های معادلات غیر خطی به کار برده‌ایم.

در پایان هزینه محـاسباتی و شاخـص کارایی روش‌ها را با روش نیـوتن توسط زمانCPU برای این مسائل مقایسه کرده‌ایم.

فصل ۱

مقدمات

فصل ۱

مقدمات

۱-۱ نرم برداری و ماتریسی

تعریف ۱- ۱ [۳۲] : یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعه تمام بردارهای n بعدی با مؤلفه‌های حقیقی $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$، تابع $\|.\|$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^1$ که در گزاره های زیر صدق کند:

۱) برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم : $\|x\| \geq 0$

۲) برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم: $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x= \mathbf{0}$.

۳) برای هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، داشته باشیم :

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

٤) برای هر بردار x ,y متعلق به $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

مثال معروف نرم‌ها در $\mathbb{R}^n$ نرم‌های L_p به صورت زیر است :

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad , p \geq 1$$

تعریف ۱-۲ [۳۲] : در $\mathbb{R}^n$ نگاشت $(.,.)$ از فضای ضربی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ که در گزاره های زیر صدق کند ضرب داخلی نام دارد.

۱) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $(x, x) \geq 0$

۲) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم $(x, x) = 0$ اگر و تنها اگر $x= \mathbf{0}$.

۳) به ازای هر x,y متعلق به $\mathbb{R}^n$، $(x, y) = (y, x)$

٤) به ازای هر x,y,z متعلق به $\mathbb{R}^n$، $(x + y) = (x, z) + (y, z)$

۵) به ازای هر x,y متعلق به $\mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $(\alpha x, y) = \alpha(y, x)$

برای هر ضرب داخلی نامساوی کوشی شوارتز $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ صدق می‌کند.

به ویژه برای نرم L_2 داریم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۱-۳ [۳۲] : نرم ماتریسی برای ماتریس $A_{n\times n}$ به صورت $\|A\|$ تابعی است که دامنه آن مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ می‌باشد و دارای خواص زیر است:

۱)برای هر ماتریس A، اگر $A \neq 0$ آنگاه $\|A\| > 0$

۲) برای هر ماتریس A، $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = \mathbf{0}$.

۳) برای هر ماتریس A و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$، داشته باشیم :

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

٤) برای هردو ماتریس B, A داشته باشیم:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

٥) برای هردو ماتریس A ,B داشته باشیم:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

تعریف ۱-٤ [۱] : برای هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ زوج اسکالر λ و بردار $x \neq \mathbf{0}$ را به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه می گوییم هر گاه $Ax = \lambda x$.

تعریف۱-٥ [۳۲] : برای هر ماتریس $A_{n\times n}$، شعاع طیفی را با $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i(A)|$ تعریف می کنیم که برای $i=1\dots n$ $\lambda_i(A)$ مقدار ویژه iام A می باشد.

تعریف ۱-٦ [۲] : مجموعه D را محدب گوییم هر گاه برای هر دو نقطه ی x,y متعلق به D و برای هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم : $\lambda x + (1-\lambda) y \in D$

تعریف ۱-۷ [۳۲] : اگر $S \subset \mathbb{R}^n$ در این صورت مجموعه نقاط درونی را با int(S) نمایش می‌دهیم و گوی‌های باز و بسته (با توجه به نرم $\|.\|$) به مرکز x^0 و شعاع r را به ترتیب به صورت زیر نشان می دهیم :

$$S(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| < r\}$$
$$\bar{S}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| \leq r\}$$

تعریف ۱– ۸ [۳۲] : $L(\mathbb{R}^n)$ را مجموعه عملگرهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ می نامیم. به همین ترتیب $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ را مجموعه عملگرهای خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ می نامیم.

توجه : در این جا A ماتریس حقیقـی و $m \times n$ اسـت که نگاشـت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را تعریف مـی کند و $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ هم به معـنای ماتریس و هم عملگر خطی است. بنابراین در این جا هیچ فرقـی بین عمـلگر و ماتریس مربوط به آن وجـود ندارد [۳۲]. منظـور از عمـلگر نامنفـی همان ماتریس نامنفی متناظر است که همه درایه های آن نامنفی است.

لم ۱– ۹ [۳۲] : فرض کنیم $A \in L(\mathbb{R}^n)$ آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ نرمی روی $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که :

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon \qquad (۱–۱)$$

لم ۱– ۱۰ : با توجـه به تعـریف (۱–۷) فرض کنیم نگاشت $A: D \subset \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^n)$ در نقطه $x^0 \in D$ پیوسته و $A(x^0)$ معکوس پذیر باشد. بنابراین $\delta > 0$ و $\gamma > 0$ وجود دارند بطوریکه $A(x)$ معکوس پذیر است و

$$\forall x \in D \cap \bar{S}(x^0, \delta) \qquad \|A(x)^{-1}\| \leq \gamma$$

اثبات :[۳۲]

لم ۱–۱۱: فرض کنیم $B \in L(\mathbb{R}^n)$ و $B \geq 0$ بنابراین $(I - B)^{-1}$ وجود دارد و نامنفی است اگر و تنها اگر $\rho(B) < 1$.

اثبات : [۳۲]

لم ۱–۱۲ (آشفتگی باناخ) : فرض کنیم $A \in L(\mathbb{R}^n)$ نامنفرد باشد، $E \in L(\mathbb{R}^n)$ و $\|A^{-1}\|\|E\| < 1$ بنابراین A+E نا منفرد است و

$$\|(A + E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|E\|}$$

اثبات : [۳۳و۳۲]

۱-۲ تابع و مشتق

تابع F با دامنه D در$\mathbb{R}^n$ و برد در$\mathbb{R}^m$ را با $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ نشان می دهیم. برای $m>1$ عناصر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با$f_1, \dots, f_m$ نشان داده می شوند. در این صورت $F(x) \in \mathbb{R}^m$ با بردار ستونی$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$ نمایش می دهیم.

کار ما یافتن جواب دستگاه معادلات $f_i(x_1, \dots, x_n) = y_i \;\; ;i=1,\dots,n$ یا به طور خلاصه $F(x) = y$ می باشد. به طوری که$F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع فرض شده و$y \in \mathbb{R}^n$ بردار ثابت باشد. می توان با حذف y از دو طرف، مسئله را به صورت $F(x) = \mathbf{0}$ در نظر گرفت. در واقع ما به دنبال یافتن بردار$x^* \in \mathbb{R}^n$ هستیم به گونه ای که $F(x^*) = \mathbf{0}$.[۳۲]

تعریف ۱-۱۳ [۳۲] : نگاشت $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در $x \in D$ نیمه پیوسته است اگر برای هر $h \in \mathbb{R}^n$ و $\varepsilon \geq 0$، $\delta = \delta(\varepsilon, h)$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر$|t| < \delta$ و $x + th \in D$ داشته باشیم :

$$\|F(x + th) - F(x)\| < \varepsilon$$

تعریف ۱-۱٤ [۳۲] : تابع $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در $x \in \mathrm{int}(D)$ دارای مشتق فرشه است اگر عملگر$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\|h\|}\right) \|F(x + h) - F(x) - Ah\| = 0$$

عملگر Aکه با $F'(x)$ نشان می دهیم مشتق فرشه F در xنام دارد.

نکته ۱-۱۵ : اگر$F'(x)$ در x مشتق فرشه داشته باشد بنابراین، $F''(x)$ مشتق فرشه دوم F در x نام دارد. به همین ترتیب اگر $F^{(p-1)}$ در x مشتق فرشه داشته باشد بنابراین، $F^{(p)}(x)$ مشتق فرشه pام F در x نام دارد.

تعریف ۱– ۱۶ [۳۲] : وقتی می‌گوییم F مشتق پذیر است بدین معنی است که مشتق‌های جزئی

آن $i,j=1,\dots,n \quad \partial_i f_i(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = a_{ij}$ وجود دارد . a_{ij} عناصر ماتریس $F'(x)$ است که

آن را به صورت زیر نشان می دهیم و آن را ژاکوبین[1] می نامیم:

$$J_F(x) = F'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \dots & \partial_n f_n(x) \end{bmatrix}$$

در این صورت $H_f(x)$ ماتریس $n\times n$ هسیان[2] را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1\,\partial_1 f(x) & \dots & \partial_n\,\partial_1 f(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1\,\partial_n f(x) & \dots & \partial_n\,\partial_n f(x) \end{bmatrix}$$

اگر مشتق دوم $F''(x)$ وجود داشته باشد، بنابراین، با تعریف $F''(x) \in L\big(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\big)$

یعنی برای هر $h \in \mathbb{R}^n$، $F''(x)h \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ و،با تعریف دوباره

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\|t\|}\right)\|F'(x+th) - F'(x) - tF''(x)h\| = 0 \qquad (۱–۲)$$

برای راحتی، عضو $[F''(x)h]k$ در $\mathbb{R}^m$ را با $F''(x)hk$ نشان می دهیم. بدین ترتیب نمایش مشتق دوم $F''(x)$ برحسب مشتقات جزئی عناصر $f_1,\dots,f_m$ از F بدست می آید، ابتدا تابع $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ را در نظر می گیریم.اگر، $f''(x)$ وجود داشته باشد، بنابراین با به کار بردن (۱–۲) برای بردارهای مختصات $e^1,\dots,e^n$ داریم:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\|t\|}\right)\left|f'\big(x+te^i\big) - f'(x)e^j - tf''(x)e^ie^j\right| = 0$$

بنابراین

$$f''(x)e^ie^j = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\|t\|}\right)\left|\partial_j f\big(x+te^i\big) - \partial_j f(x)\right| = \partial_i\,\partial_j\, f(x)$$

پس اگر $h = \sum_{i=1}^n h_i e^i$ و $k = \sum_{j=1}^n k_j e^j$ داریم:

$$f''(x)hk = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i k_j\, f''(x)e^ie^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i k_j\, \partial_i\,\partial_j\, f(x) = k^T H_f(x)h$$

[1] Jacobian
[2] Hessian

به طـور خلاصه این مهـم اسـت که بین نگاشـت خـطی $f''(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ و $H_f(x) \in L(\mathbb{R}^n)$ تمـایز قائل شـویم. توجه می کـنیم که اگر $Fx = f'(x)^T$، پـس $F'(x) = H_f(x)$ یعنی ماتریس هسیان f مشتق گرادیان f می باشد.

اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ، بنابراین با در نظر گرفتن عناصر $f_1, \dots, f_m$ به طور مجزا ، نمایش زیر را از $F''(x)hk \in \mathbb{R}^m$ داریم:

$$[F''(x)hk]^T = (k^T H_1(x)h, k^T H_2(x)h, \dots, k^T H_m(x)h)$$

به طوری که $H_1(x), H_2(x), \dots, H_m(x)$ ماتریس هسیان $f_1, \dots, f_m$ در x هستند[۳۲].

تعریف ۱- ۱۷ [۳۲] : نگاشت $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ پیوسته هولدر روی $D_0 \subset D$ است اگر ثابت $c \geq 0$ و $p \in (0, 1]$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x, y \in D$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|^p$$

اگر $p = 1$ آنگاه F پیوسته لیپ شیتس روی D_0 است.

تعریف ۱- ۱۸[۱]: هرگاه x یک بردار باشد، داریم : $x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|_2^2$

بسط تیلور برای توابع چند متغیره حول $x^{(k)}$ به صورت زیر می باشد :

$$F(x) = F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}(x - x^{(k)})^T H_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \cdots$$

برای راحتی آن را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$F(x) = F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!} H_F(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + \cdots$$

۱-۳ قضیه مقدار میانگین

قضیه ۱- ۱۹ [۳۲] : اگر $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ بر $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه $t \in (a, b)$ وجود دارد که : $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi'(t)(a - b)$

نتیجه ۱-۲۰ [۳۲] : فرض کنیم $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ مشتق پذیر در هر نقطه از مجموعه محدب $D_0 \subset D$ باشد، پس برای هر دو نقطه $x, y \in D_0$، $t \in (0,1)$ وجود دارد بطوریکه :

$$f(y) - f(x) = f'(x + t(y - x))(y - x)$$

لم ۱–۲۱ [۳۲] : اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ روی مجموعه محدب و باز $D_0 \subset D$ مشتق پذیر باشد و $x, y \in D_0$ آنگاه : $F(y) - F(x) = B(x,y)(y-x)$ که $B(x,y) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ از عناصر تشکیل دهنده F، $f_1, \dots, f_m$ ساخته شده است.

به ویژه $t_1, \dots, t_m \in (0,1)$ وجود دارند که :

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} f'_1\big(x + t_1(y-x)\big) \\ \vdots \\ f'_m\big(x + t_m(y-x)\big) \end{pmatrix}$$

لم ۱–۲۲ : فرض کنیم اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ روی مجموعه محدب $D_0 \subset D$ مشتق پذیر باشد پس برای هر $x, y \in D_0$ داریم :

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sup_{0 \le t \le 1} \big\|F'\big(x + t(y-x)\big)\big\| \|y - x\|$$

اثبات : [۳۲]

لم ۱–۲۳ [۳۲] : اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ روی مجموعه محدب $D_0 \subset D$ مشتق پذیر باشد و برای هر $x \in D_0$، $\|F'(x)\| \leq M \leq \infty$ بنابراین F پیوسته لیپ شیتس روی D_0 است.

لم ۱–۲٤ [۳۲] : اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در هر نقطه مجموعه محدب $D_0 \subset D$ مشتق دوم داشته باشد بنابراین برای هر $x, y \in D_0$ داریم :

$$\|F'(y) - F'(x)\| \leq \sup_{0 \le t \le 1} \big\|F''\big(x + t(y-x)\big)\big\| \|y - x\|$$

لم ۱–۲۵[۳۲] : اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در هر نقطه مجموعه محدب $D_0 \subset D$ مشتق دوم داشته باشد بنابراین برای هر $x, y \in D_0$ داریم:

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\| \leq \sup_{0 \le t \le 1} \big\|F''\big(x + t(y-x)\big)\big\| \|y - x\|^2$$

لم ۱–۲٦ [۳۲] : اگر $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ در هر نقطه مجموعه محدب $D_0 \subset D$ مشتق p ام داشته باشد بنابراین برای هر $x, y \in D_0$ داریم:

$$\left\| F(y) - F(x) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} F^{(j)}(x)(y-x)^j \right\| \leq \frac{1}{p!} \sup_{0 \le t \le 1} \big\|F^{(p)}\big(x + t(y-x)\big)\big\| \|y - x\|^p$$