الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی

عنوان

تسلط و شمول بردها و تجزیه برای عملگرهای خطی کراندار

استاد راهنما

دکتر نیکنام

اساتید مشاور

دکتر فشندی

نگارنده

حانیه عرفانیان

۱۳۹۱

بسمه تعالی
مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان
دانشگاه فردوسی

عنوان: تسلط و شمول بردها و تجزیه برای عملگرهای خطی کراندار

نام نویسنده: حانیه عرفانیان
استاد راهنما: دکترنیکنام
اساتید مشاور: دکتر فشندی

دانشکده: علوم ریاضی گروه: محض	رشته تحصیلی: ریاضی
تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۰۸/۲۷	تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۹/۲۷
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۶۲

چکیده پایان‌نامه : در این پایان نامه ابتدا به تعاریف تسلط و شمول بردها و تجزیه می پردازیم و سپس ارتباط میان این مفاهیم را بیان می کنیم ودر ادامه مفاهیم بیان شده را روی عملگرهای شبه پوچ توان و ریس بررسی می کنیم. همچنین قضیه داگلاس در فضای هیلبرت و تعمیم آن در فضای باناخ و مثال نقض هایی را برای قضیه داگلاس در فضای هیلبرت بیان می کنیم.

واژگان کلیدی: عملگر خطی ،تجزیه، شمول بردها، تسلط

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : تسلط و شمول بردها و تجزیه برای عملگرهای خطی کراندار

اینجانب حانیه عرفانیان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکترنیکنام متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی '' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

تقدیم به

مادر عزیزم و

همسر مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر نیکنام صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

از سرکار خانم دکتر فشندی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر جانفدا و سرکار خانم دکتر حجازیان که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از پدر و مادر همسرم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حانیه عرفانیان

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها

از آن‌جا که زمینه اصلی این مقاله عملگرهای خطی کراندار است پس در این فصل مطالب مقدماتی در مورد عملگرها و فضاهای نرم‌دار و فضاهای باناخ عمدتا از [۱۰] و [۱۳] ارایه شده است.

۱.۱ فضای نرم‌دار و باناخ

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متر روی X می‌نامیم هرگاه برای هر x، y و z از X داشته باشیم:*

۱. $d(x, y) \geq 0$،

۲. $d(x, y) = 0$ *اگر و تنها اگر* $x = y$،

۳. $d(x, y) = d(y, x)$،

۴. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$،

در این صورت (X, d) را یک فضای متریک می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. هرگاه اعمال*

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

$$. : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$$

موجود باشند به قسمی‌که $(X, +)$ یک گروه آبلی باشد و به ازای هر x و y از X و هر α و β از $\mathbb{F}$ داشته باشیم

۱. $1x = x$،

۲. $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$،

۳. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

آنگاه X را یک فضای برداری روی میدان F می‌نامیم.

عمل $+ : X \times X \longrightarrow X$ را جمع و عمل $. : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ را ضرب اسکالر می‌نامیم. ضمناً اعضای F را اسکالر و اعضای X را بردار می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ (فضای نرم‌دار). *فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد ($\mathbb{F}$ می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد). تابع $\|.\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک نرم روی X گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:*

۱. *برای هر x از X داشته باشیم $\|x\| \geq 0$،*

۲. $\|x\| = 0$ *اگر و تنها اگر* $x = 0$،

۳. *برای هر α از F داشته باشیم* $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

۴. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری که یک نرم روی آن تعریف شده باشد، فضای نرم‌دار[1] *نامیده می‌شود.*

[1] Normed space

مثال ۱.۱.۱. *فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم:*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فرض می‌شود. در این صورت $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ فضای نرم‌دار است.

وقتی $\|.\|$ یک نرم روی X باشد آن‌گاه، $d(x, y) = \|x - y\|$ یک نرم روی X است و توپولوژی حاصل از آن را توپولوژی نرم می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ (فضای باناخ). *فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ*[1] *گوییم هرگاه این فضا تحت متر القا شده به وسیله‌ی نرم، کامل باشد. (یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد)*

هر فضای باناخ، نرم‌دار است ولی عکس آن برقرار نیست. یعنی فضاهای نرم‌داری وجود دارند که فضای باناخ نیستند. به عنوان مثال $C([a, b])$ که مجموعه تمام توابع پیوسته از $[a, b]$ به $\mathbb{R}$ می‌باشد با

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

یک فضای نرم‌دار است ولی باناخ نیست. [۱۰]

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار X باشد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را در X همگرا به s $(s \in X)$ گوییم هرگاه دنباله‌ی $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$، به s همگرا باشد و می‌نویسیم*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم هرگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

[1] Banach space

گزاره ۲.۱.۱. *فضای نرم‌دار X کامل است اگر و فقط اگر هر سری مطلقاً همگرا همگرا در X همگرا باشد.*

مثال ۲.۱.۱. *فضای اقلیدسی $\mathbb{C}^n$ یک فضای باناخ می‌باشد.*

لم ۱.۱.۱. $L^p(\mathbb{R})$ *برای* $1 \leq p \leq \infty$ *با نرم* $\|.\|_p$ *فضای باناخ است. (که در آن*
$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \|f\|_P = (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$*)*

برهان. مراجعه شود به [۱۰]. $\square$

تعریف ۵.۱.۱ (فضای خارج قسمتی). *فرض کنید X فضای نرم‌دار و Y زیرفضایی از X باشد. تعریف می‌کنیم*

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \{x + Y \ : \ x \in X\} \\ x + Y &= \{x + y \ : \ y \in Y\} \end{aligned}$$

نگاشت $Q : X \longrightarrow \frac{X}{Y}$ *را به صورت زیر در نظر می‌گیریم*

$$Q(x) = x + Y$$

از این رو

$$\frac{X}{Y} = \{Q(x) : \ x \in X\}$$

$\frac{X}{Y}$ *تحت اعمال زیر فضای برداری است:*

$$\begin{aligned} Q(x_1) + Q(x_2) &= Q(x_1 + x_2) \\ \alpha Q(x) &= Q(\alpha x) \end{aligned}$$

که در آن $x_1, x_2 \in X$ *و* α *اسکالر می‌باشند.*
روی $\frac{X}{Y}$ *نرم به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\|Q(x)\| = \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in Y\}.$$

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید Y زیرفضای X باشد. $\frac{X}{Y}$ تحت نرم فوق فضای نرم‌دار است اگر و تنها اگر Y بسته باشد.*

برهان. مراجعه شود به [۷]. □

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید Y زیرفضای بسته‌ی X باشد. شرط لازم و کافی برای آن‌که X فضای باناخ باشد، آن است که Y و $\frac{X}{Y}$ فضای باناخ باشند.*

مراجعه شود به [۷].

تعریف ۶.۱.۱. *اگر X و Y فضاهای برداری باشند، نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ خطی نامیده می‌شود هرگاه برای هر x و y از X و هر α و β از $\mathbb{F}$ داشته باشیم:*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی و کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

هرگاه $X = Y$، آن را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم. اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند در این صورت $B(X,Y)$ نسبت به نرم زیر، فضای نرم‌دار است

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ \|x\| \leq ۱\}.$$

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ نگاشت خطی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱. *T پیوسته است.*

۲. *T کراندار است.*

۳. *T در یک نقطه پیوسته است.*

۴. T به طور یکنواخت پیوسته است.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و T نگاشت خطی از X به روی Y باشد. در این صورت T یکریختی[۱] است اگر و تنها اگر اعداد مثبت متمایز α و β موجود باشند به طوری که برای هر $x \in X$،*

$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|.$$

قضیه ۵.۱.۱. *اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند، در این صورت $B(X,Y)$ فضای باناخ است اگر و تنها اگر Y باناخ باشد.*

تعریف ۷.۱.۱. *F را به‌صورت نقطه‌ای کراندار گویند اگر $\{f(x) : f \in F\}$ یک مجموعه کراندار از $\mathbb{C}$ در هر $x \in X$ باشد.*

تعریف ۸.۱.۱. *S را کلا کراندار می‌گویند اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، تعداد متناهی از گوی‌ها با مرکزی در S و شعاع ε موجود باشد به‌طوری که اجتماع آن‌ها S را بپوشاند.*

۲.۱ عملگر خطی و فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. *در حالت فضاهای برداری و به ویژه فضاهای نرم‌دار یک نگاشت خطی و کراندار عملگر[۲] نامیده می‌شود.*

نمادگذاری ۱.۲.۱. *دامنه عملگر T را با نماد $D(T)$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای برداری و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگرخطی باشد. هسته‌ی عملگر که با نماد $\mathbf{ker}(T)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از*

$$N(T) = \{x \in X : \ Tx = ۰\}$$

[۱] Isomorphism [۲] operator

و برد T با $\mathbf{R}(T)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از

$$\mathbf{R}(T) = \{y \in Y : \ y = Tx, x \in \mathbf{D}(T)\ \}$$

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید T عملگری خطی باشد. در اینصورت*

۱. *$\mathbf{R}(T)$ یک فضای برداری است.*

۲. *اگر $\dim \mathbf{D}(T) = n < \infty$، آن‌گاه $\dim \mathbf{R}(T) \leq n$.*

۳. *$\mathbf{N}(T)$ یک فضای برداری است.*

ملاحظه ۲.۲.۱. *اگر $T_1 : Y \longrightarrow Z$ و $T_2 : X \longrightarrow Y$ و $T : X \longrightarrow X$ عملگر خطی‌کراندار روی فضاهای نرم‌دار X، Y و Z باشند، آن‌گاه داریم:*

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|, \quad \|T^n\| \leq \|T\|^n$$

تعریف ۳.۲.۱. *دو عملگر T_1 و T_2 را مساوی‌گویند، یعنی $T_1 = T_2$ هرگاه*

۱. *$\mathbf{D}(T_1) = \mathbf{D}(T_2)$.*

۲. *$T_1x = T_2x$ برای هر $x \in \mathbf{D}(T)$.*

تعریف ۴.۲.۱. *تحدید یک عملگر $T : \mathbf{D}(T) \longrightarrow Y$ به زیرمجموعه‌ی $B \subset \mathbf{D}(T)$ با $T|_B$ نمایش داده می‌شود و برای هر $x \in B$*

$$T|_B : B \longrightarrow Y, \quad T|_Bx = Tx$$

و توسیع یک عملگر T به یک مجموعه‌ی $M \supset \mathbf{D}(T)$، یک عملگر $\tilde{T} : M \longrightarrow Y$ است به طوری‌که $\tilde{T}|_{\mathbf{D}(T)} = T$ و $\tilde{T}x = Tx$ برای $x \in \mathbf{D}(T)$.

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید $T : \mathbf{D}(T) \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد به طوری که $\mathbf{D}(T) \subset X$ و Y یک فضای باناخ باشد. در این صورت T دارای یک توسیع $\tilde{T} : \overline{\mathbf{D}(T)} \longrightarrow Y$ است به طوری که $\tilde{T}$ یک عملگر خطی کراندار است و $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

لم ۱.۲.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ کراندار است اگر و تنها اگر T مجموعه‌های کراندار در X را به مجموعه‌های کراندار در Y بنگارد.*

تعریف ۵.۲.۱. *زیرفضای خطی بسته‌ی Y از فضای باناخ X را متمم‌دار[1] (متمم شده) نامیم اگر زیرفضای خطی بسته‌ی Z از X وجود داشته باشد به طوری که $X = Y \oplus Z$.*

تعریف ۶.۲.۱ (ضرب داخلی). *فرض کنید H یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. نگاشت $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی نامیم هرگاه برای هر x و y و z از X و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ویژگی‌های زیر برقرار باشد:*

۱. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$،

۲. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$،

۳. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$،

۴. $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

در عبارت فوق $\overline{\langle y, x \rangle}$ مزدوج مختلط $\langle y, x \rangle$ را نشان می‌دهد.

ملاحظه ۳.۲.۱. *برای هر x، y و z از X و هر α و β از $\mathbb{C}$ داریم:*

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

[1] Complemented

تعریف ۷.۲.۱ (فضای حاصلضرب داخلی[۱]). *هر فضای برداری H با یک ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ را فضای حاصلضرب داخلی می‌نامیم و آن را با $(H, \langle .,. \rangle)$ نمایش می‌دهیم.*

به عنوان مثال $H = \mathbb{C}^n$ و ضرب داخلی به صورت زیر تعریف شود

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=۱}^{n} x_i \overline{y}_i$$

که در آن $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$. در این صورت H یک فضای حاصلضرب داخلی است.

تعریف ۸.۲.۱ (نامساوی کوشی شوارتز). *اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد آن‌گاه*

$$| \langle x, y \rangle |^۲ \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle .$$

قضیه ۳.۲.۱. *ضرب داخلی از $H \times H$ به $\mathbb{C}$ پیوسته است.*

برهان. مراجعه شود به [۱۰] □

تعریف ۹.۲.۱ (فضای هیلبرت). *فرض کنید $(H, \langle .,. \rangle)$ یک فضای حاصلضرب داخلی باشد. روی این فضا نرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{۱}{۲}} \qquad (x \in H)$$

اگر $(H, \|.\|)$ فضای باناخ باشد آن‌گاه H را یک فضای هیلبرت[۲] می‌نامیم.

نکته ۴.۲.۱. *فضای حاصلضرب داخلی، یک فضای نرم‌دار است و فضای هیلبرت، فضای باناخ است. نرم روی فضای ضرب داخلی در شرط*

$$\|x + y\|^۲ + \|x - y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲$$

[۱] inner product space [۲] Hilbert space

صدق می‌کند، شرط فوق را قانون متوازی‌الاضلاع می‌نامند. هر فضای نرم‌دار، فضای حاصلضرب داخلی نیست. نرمی که در قانون متوازی‌الاضلاع صدق نکند، از یک ضرب داخلی به دست نیامده است.

مثال‌ها

۱. فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$. همچنین نرم حاصل شده از این ضرب عبارت است از:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی تعریف شده به صورت فوق، فضای هیلبرت است.

۲. فضای $L^2[a,b]$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی روی این فضا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\bar{y(t)}dt$$

و در این صورت نرم $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ از ضرب داخلی فوق به دست می‌آید. $L^2[a,b]$ فضای هیلبرت است.

۳. فضای ℓ^2 با ضرب داخلی $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$ فضای هیلبرت است و نرم روی آن با $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.

توجه کنید که سری فوق همگراست و همگرایی آن از نامساوی کوشی-شوارتز برقرار است.

۴. l^p برای $p \neq ۲$ فضای باناخ است. برای $p \neq ۲$ فضای l^p فضای ضرب داخلی نیست. از این رو فضای هیلبرت نخواهد بود.

زیرا نرم l^p $(p \neq ۲)$ از یک ضرب داخلی به دست نمی‌آید. برای این منظور کافی است نشان دهیم که این نرم در شرط متوازی‌الاضلاع صدق نمی‌کند.

فرض کنید x و y در l^p به صورت زیر باشند.

$$x = (۱, ۱, ۰, ۰, \cdots), \quad y = (۱, -۱, ۰, ۰, \cdots)$$

بنابراین

$$\|x\| = \|y\| = \sqrt[p]{۲}, \quad \|x - y\| = \|x + y\| = ۲$$

۵. فضای $C[a, b]$ با نرم $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ فضای حاصلضرب داخلی نیست. از این رو فضای هیلبرت نیست.

زیرا نرم آن از یک ضرب داخلی به دست نمی‌آید. چون در شرط متوازی‌الاضلاع صدق نمی‌کند
زیرا اگر بگیریم $x(t) = ۱$ و $y(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$ $(a \neq b)$ آن‌گاه

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| = ۱$$

و داریم:

$$x(t) + y(t) = ۱ + \frac{t-a}{b-a} = \frac{b-a+t-a}{b-a} = \frac{b+t-۲a}{b-a}$$
$$x(t) + y(t) = ۱ - \frac{t-a}{b-a}$$
$$\|x + y\| = ۲, \quad \|x - y\| = ۱$$
$$۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲) = ۴$$

تعریف ۱۰.۲.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle ., . \rangle$ و نرم $\|.\|$ باشد و فرض کنید*

$\{x_n\}$ دنباله‌ای از عناصر در H باشد.

۱. $\{x_n\}$ را همگرا به x می‌گوییم و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x - x_n\| = 0$.

۲. می‌نویسیم $\sum_n x_n = x$ و گوییم که سری $\sum_n x_n$ به x همگراست اگر $s_N \longrightarrow x$، که در آن $s_N = \sum_{n=-N}^{N} x_n$. یک سری همگرای غیرمشروط نامیده می‌شود اگر هر تجدید آرایش آن همگرا باشد.

۳. $\operatorname{span}\{x_n\}$ در H عبارت است از مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی متناهی x_n ها، یعنی

$$\operatorname{span}\{x_n\} = \left\{\sum_{n=1}^{N} c_n x_n \ : \ n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{C}\right\}$$

۴. $\{x_n\}$ کامل است اگر $\operatorname{span}\{x_n\}$ در H چگال باشد یا به طور معادل، اگر تنها عنصر H که متعامد بر هر x_n ای است، عنصر صفر باشد.

۱.۳ عملگرهای الحاقی

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید $T : H_1 \longrightarrow H_2$ یک عملگر خطی کراندار باشد، که در آن H_1 و H_2 فضاهای هیلبرت هستند. در این صورت T^* یک عملگر الحاقی[1] T است به طوری که $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ و برای هر $x \in H_1$ و $y \in H_2$،*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

قضیه ۱.۳.۱. *(وجودی) عملگر الحاقی T^* از T تعریف شده در ۱.۳.۱ همواره وجود دارد و منحصر به*

[1] adjoint operator