دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

موضوع:
مباحثی در عدد رنگی رأسی گرافها

استاد راهنما:

دکتر سید عبادا... محمودیان

نگارش:

الهام شریفی یزدی

شهریور ۱۳۷۷

دانشگاه شهید بهشتی

بسمه تعالی

تاریخ ....
۲۰ /۲/ ۱۳۷۸ شماره ....
پیوست ....

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه

جلسه هیئت داوران ارزیابی پایان‌نامه خانم الهام شریفی یزدی به شناسنامه شماره ۵۷۲۱۳ صادره از یزد متولد ۱۳۵۱ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته ریاضی با عنوان مباحثی در عدد رنگی راسی گرافها به راهنمائی آقای دکتر عباد الله محمودیان طبق دعوت قبلی در تاریخ ۷۷/۶/۲۹ تشکیل گردید و بر اساس رای هیات داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین‌نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۳/۱۰/۲۵ پایان‌نامه مزبور با نمره نوزده (۱۹/-) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

آقای دکتر سید عباد الله محمودیان (استاد راهنما)

آقای دکتر مهدی بهزاد (استاد مشاور)

آقای دکتر امیر دانشگر (داور)

۲۴۲۷۳

تقدیم به
پدر و مادر عزیزم
و خواهر مهربانم

تشکر

از استاد گرامی جناب آقای دکتر سید عبادا... محمودیان به خاطر راهنماییهای ارزندهٔشان سپاسگزارم. همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر مهدی بهزاد که مشوق اصلی من در این راه بوده‌اند کمال تشکر را دارم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر امیر دانشگر که قبول زحمت فرموده و داوری این رساله را پذیرفتند و از راهنماییهایشان بهره برده‌ام تشکر می‌کنم. از خانم بهناز عمومی که در تهیه این رساله مرا یاری نموده‌اند و همچنین از خانم آناهیتا سمیع که مراحل تایپ آن‌را انجام داده‌اند متشکرم.

الهام شریفی یزدی

شهریور ۱۳۷۷

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم رنگ‌آمیزی در گرافها از اهمیت خاصی برخوردار است. گرافهای بحرانی نیز نخستین بار توسط دیراک مطرح شده و پس از آن توسط دیگران مورد توجه قرار گرفته‌اند. از آن زمان تاکنون ویژگی‌های ساختاری جالبی برای این نوع گرافها به دست آمده است. هدف این رساله بررسی بعضی از ویژگی‌های ساختاری این نوع گرافها و بحث در کرانهای مختلف برای عدد رنگی رأسی در گرافها است.

در فصل اول حداقل تعداد رأسها در گرافهای Δـرنگی، بدون زیرگراف K_Δ بحث می‌شود که تعیین آنها منجر به بررسی گرافهای Δـبحرانی می‌گردد. همچنین گرافهایی که در آنها حالت تساوی برای این کران برقرار است ارائه می‌شوند و نیز کران بالاتری برای حداقل تعداد رأسها به‌دست می‌آید. برای گرافهای Δـمنتظم و Δـرنگی نیز حداقل تعداد رأس و حالت تساوی کران بررسی می‌شود. در ادامه برای $۴ \le \Delta \le ۶$ وجود تعداد نامتناهی گراف Δـبحرانی ثابت شده است و مینیمم مازاد این‌گونه گرافها تعیین می‌شود.

در فصل دوم به بحث پیرامون وجود گرافهای kـبحرانی با n رأس پرداخته و کرانهای به‌دست آمده برای حداقل تعداد یال این نوع گرافها بیان می‌شود. همچنین تعدادی از گرافها که حالت تساوی بعضی از این کرانها برایشان اتفاق می‌افتد، معرفی می‌شوند و بالاخره مقدار دقیق مینیمم تعداد یال درگرافهای kـبحرانی با n رأس که $k+۲ \leq n \leq ۲k$ و $n = ۳k - ۲$ تعیین می‌شود.

نهایتاً در فصل سوم به‌ذکر بعضی ازکرانهای بالا و پایین برای عدد رنگی رأسی گرافها می‌پردازیم. لازم به‌توضیح است که در این رساله برای تعاریف و اصطلاحات مورد نیاز ازکتابهای [۱] و [۵] و [۲۸] استفاده شده است.

فصل اول

حداقل تعداد رأس درگرافهای kـرنگی باماکسیمم درجهٔ k

قضیه بروکس گرافهائی که دارای ویژگی $\chi(G) = \Delta + ۱$ هستند را رده‌بندی کرده است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که برای چه گرافهائی $\chi(G) = \Delta$ است؟ در این فصل حداقل تعداد رأسها برای گرافهای kـرنگی با ماکسیمم درجهٔ k که دارای زیرگراف K_k نیستند مورد بررسی قرار می‌گیرد وکرانهایی که برای تعداد رأسهای این‌گونه گرافها پیدا شده است، بیان می‌شود.

اولین کرانی که معرفی می‌شود (بخشهای ۱.۱ الی ۶.۱) مربوط به سال ۱۹۸۴ است که توسط بویتلزپاخر و هرینگ [۳] مطرح شده است و نشان می‌دهد این‌گونه گرافها حداقل $۲k - ۱$ رأس دارند و حالت تساوی برای مقادیر $۴ \leq k \leq ۸$ اتفاق می‌افتد. همچنین آنها نشان می‌دهند که در این حالت دقیقاً ۱۳ گراف kـبحرانی با ماکسیمم درجهٔ k و $۲k - ۱$ رأس وجود دارد.

در بخش ۷.۱ کران معرفی شده توسط محمودیان و بقیه [۱۹] که حداقل تعداد رأسها برای این گرافها را

۹ $- 3k$ بیان می‌کند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین یک کران برای تعداد رأسهای گرافهای kـمنتظم و kـرنگی که توسط محمودیان و بقیه [۱۹] ارائه شده و وجود حداقل $2k - 1$ رأس را اثبات می‌کند، مورد بحث قرار می‌گیرد. همچنین بیان می‌شود که حالت تساوی فقط برای $k = 4, 6, 8$ اتفاق می‌افتد.

نهایتاً در بخش ۸.۱ روش دانشگر [۸] برای ساختن یک تعداد نامتناهی ازگرافهای kـبحرانی با ماکسیمم درجهٔ k به ازای $4 \leq k \leq 6$ ارائه می‌گردد و کرانهایی را که ایشان برای مازاد این‌گونه گرافها بررسی کرده‌اند، بحث می‌گردد.

۱-۱ مطالبی پیرامون گرافهای kـرنگی با ماکسیمم درجهٔ k

سؤال اصلی مطرح شده این است که آیا برای هر عدد داده شده k یک گراف kـرنگی با ماکسیمم درجهٔ k وجود دارد یا خیر؟ این مسأله را می‌توان در دو حالت بررسی کرد.

حالت اول) G دارای زیرگراف K_k باشد.

در این حالت برای هر k، گراف G وجود دارد و می‌توان آن را به صورت زیر ساخت. واضح است که برای $k = 1$ چنین گرافی وجود ندارد ولی برای $k = 2$ هر مسیر با حداقل ۳ رأس دارای این شرایط است. برای $k \geq 3$ یک گراف K_k و همچنین یک گراف ۲ـهمبند غیر تهی H با $\chi(H) \leq k$ و $\Delta(H) \leq k - 1$ در نظر گرفته و یکی از رأسهای K_k را به یکی از رأسهای H مانند v وصل می‌کنیم. حال با توجه به این‌که در گراف جدید v یک رأس برشی محسوب می‌شود و می‌دانیم که عدد رنگی این گراف برابر ماکسیمم عدد رنگی بلوکهایش است و بلوکهای این گراف K_k و K_2 و H هستند، در نتیجه گراف به‌دست آمده kـرنگی است و دارای ماکسیمم درجهٔ k است. پس به این ترتیب می‌توان تعداد زیادی گراف kـرنگی با ماکسیمم درجهٔ k و دارای زیرگراف K_k ساخت.

حالت دوم) G دارای زیرگراف K_k نباشد.

در سال ۱۹۷۷ برودین و کاستاچکا [۶] حدس زیر را بیان کردند:

حدس. اگر گراف G با ماکسیمم درجهٔ k و بدون K_k باشد، به طوری که $k \geq ۹$ آنگاه $\chi(G) \leq k - ۱$.

اگر این حدس درست باشد آنگاه گرافهای kـرنگی $(k \geq ۹)$ با ماکسیمم درجهٔ k و بدون زیرگراف K_k وجود ندارند. بروس رید [۲۲] در سال ۱۹۹۷ ثابت کرد که حدس فوق برای kهای به اندازه کافی بزرگ درست است.

در سال ۱۹۸۴ بویتلز پاخر و هرینگ [۳] در قضیه‌ای که به شرح زیر است یک کران برای حداقل تعداد رأس این نوع گرافها بیان کرده‌اند.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گراف kـرنگی با $\Delta(G) = k$ باشد به طوری که G هیچ زیرگراف یکریخت با K_k ندارد آنگاه

الف) G حداقل $۲k - ۱$ رأس دارد.

ب) اگر G دقیقاً $۲k - ۱$ رأس داشته باشد آنگاه $۴ \leq k \leq ۸$ و در این حالت نیز دقیقاً ۱۳ گراف بحرانی با $۲k - ۱$ رأس وجود دارد.

ما در بخش‌های ۲.۱ الی ۶.۱ به بحث و اثبات این قضیه می‌پردازیم.

برای $k \leq ۳$ بررسی این گونه گرافها کار آسانی است. فرض کنید $k = ۱$ آنگاه واضح است که گراف ۱ـرنگی با ماکسیمم درجهٔ ۱ و بدون زیرگراف $K_۱$ وجود ندارد. همچنین برای $k = ۲$ چون گراف ۲ـرنگی است در نتیجه حداقل شامل یک یال است، پس G زیرگراف $K_۲$ دارد. بنابراین گراف ۲ـرنگی با ماکسیمم درجهٔ ۲ و بدون زیرگراف $K_۲$ وجود ندارد. اما برای $k = ۳$ گراف ۳ـرنگی با ماکسیمم درجهٔ ۳ و بدون زیرگراف $K_۳$ وجود دارد. کافی است یک دور فرد با بیش از ۳ رأس را در نظر بگیرید و گراف $K_۱$ را با یک یال به یکی از رأسهای این دور وصل کنید. گراف حاصل ۳ـرنگی است و شامل زیرگراف $K_۳$ نیست، در ضمن دارای ماکسیمم درجهٔ ۳ است. البته دقت کنید که در این گراف تعداد رأسها حداقل $۲k$ است.

در نتیجه بویتلز پاخر و هرینگ نشان دادند که برای $k \geq ۹$ گرافهای kـرنگی با ماکسیمم درجهٔ k و بدون زیرگراف K_k حداقل $۲k$ رأس دارند.

۱-۲ نتایج اولیه مورد نیاز

گزاره ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر رابطهٔ «مجاور بودن» یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $V(G)$ باشد آنگاه G یک گراف کامل است.

گزاره ۲.۲.۱. فرض کنید G یک گراف kـبحرانی و V یک مجموعهٔ مستقل از رأسهای G باشد آنگاه

الف) $G-V$، $(k-۱)$ـرنگی است. در نتیجه یک kـرنگ‌آمیزی از G وجود دارد به طوری که V تک رنگ است.

ب) گراف به‌دست آمده از G به وسیلهٔ انقباض رأسهای مجموعهٔ V به یک رأس به نام v را با G' نمایش می‌دهیم. G' یک گراف kـرنگی است. بعلاوه v در هر زیرگراف kـبحرانی از G' قرار دارد.

اثبات. الف) $G-V$ را در نظر بگیرید. چون G، kـبحرانی است پس $\chi(G-V)\leq k-۱$. حال ثابت می‌کنیم که $\chi(G-V)$ نمی‌تواند کمتر از $k-۱$ باشد. زیرا اگر چنین باشد آنگاه می‌توان $G-V$ را با حداکثر $k-۲$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و با توجه به این که V مجموعهٔ مستقل است، پس یک رنگ برای رنگ‌آمیزی آن کافی است و در نتیجه می‌توان G را با حداکثر $k-۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد و این با $\chi(G)=k$ تناقض دارد. بنابراین $\chi(G-V)=k-۱$.

حال $G-V$ را با رنگهای $۱,\ldots,k-۱$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم و به اعضای مجموعهٔ V نیز رنگ k را نسبت می‌دهیم. به این ترتیب یک kـرنگ‌آمیزی از G به‌دست می‌آید که در آن V تک رنگ است.

ب) رأس v به جای مجموعهٔ V قرار می‌گیرد و به کلیهٔ رأسهای مجاور با اعضای V وصل می‌شود. چون $G'-v$ همان $G-V$ است پس طبق قسمت (الف) $\chi(G'-v)=k-۱$. حال $G'-v$ را با رنگهای $۱,\ldots,k-۱$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم و به رأس v نیز رنگ k می‌دهیم. به این ترتیب یک kـرنگ‌آمیزی از G' به‌دست می‌آید.

حال ثابت می‌کنیم با کمتر از k رنگ نمی‌توان G' را رنگ کرد. فرض کنید G' را بتوانیم با حداکثر

$k-۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. سپس به جای رأس v مجموعهٔ V را قرار داده و رنگ رأس v را به اعضای مجموعهٔ V می‌دهیم. چنین کاری امکان‌پذیر است چون در این حالت هر رأس از V را در نظر بگیرید رنگ آن با رنگ رأسهای مجاورش متفاوت می‌باشد. پس یک رنگ‌آمیزی از G با حداکثر $k-۱$ رنگ به‌دست می‌آید و این با $\chi(G) = k$ تناقض دارد، در نتیجه $\chi(G') = k$. چون $G' - v$ بنابه قسمت (الف)، $(k-۱)$ـرنگی است، v در هر زیرگراف kـبحرانی از G' قرار دارد. □

نتیجه ۳.۲.۱. فرض کنید G یک گراف kـبحرانی باشد. یال e از G را که انتهای آن رأسهای v و w است، با $e = vw$ نمایش می‌دهیم. آنگاه یک kـرنگ‌آمیزی از G با رنگهای $۱,\dots,k$ وجود دارد به طوری که v تنها رأس با رنگ ۱ و w رأس مجاور با v با رنگ ۲ است.

اثبات. قرار دهید $V = \{v\}$، V یک مجموعهٔ مستقل است و بنابه گزاره ۲.۲.۱ یک kـرنگ‌آمیزی از G وجود دارد به طوری که V تک رنگ است. پس فرض کنید V رنگ ۱ را دارد. اینک با جایگشت روی رنگها، $G - V$ را می‌توان طوری رنگ‌آمیزی کرد که رأس w رنگ ۲ را بگیرد. □

تعریف ۴.۲.۱. دنبالهٔ $(v_۱,\dots,v_s)$ از رأسهای G یک $(k-۱)$**ـدنباله از رأسها** نامیده می‌شود هرگاه درجهٔ $v_۱$ در G حداکثر $k-۱$ بوده و درجهٔ رأس $v_{i+۱}$ در $G_i = G - \{v_۱,\dots,v_i\}$، $۱ \le i \le s-۱$ نیز حداکثر $k-۱$ باشد.

گزاره ۵.۲.۱. الف) فرض کنید $(v_۱,\dots,v_s)$ یک $(k-۱)$ـدنباله از رأسها در G باشد. آنگاه G، kـرنگ پذیر است اگر و فقط اگر $G - \{v_۱,\dots,v_s\}$، kـرنگ‌پذیر باشد.

ب) فرض کنید $(v_۱,\dots,v_s)$ یک $(k-۲)$ـدنباله از رأسها در G باشد. آنگاه G، kـرنگی است اگر و فقط اگر $G - \{v_۱,\dots,v_s\}$، kـرنگی باشد.

اثبات. الف) فرض کنید G، kـرنگ پذیر باشد، چون $G-\{v_1,\ldots,v_s\}$ زیرگراف G است، kـرنگ‌پذیر می‌باشد.

برعکس فرض کنید $G-\{v_1,\ldots,v_s\}$، kـرنگ‌پذیر باشد. بنا به تعریف، درجه v_s در $G-\{v_1,\ldots,v_{s-1}\}$ حداکثر $k-1$ است. پس حداکثر $k-1$ رنگ در همسایگی v_s به کار می‌رود و در نتیجه حداقل یک رنگ مصرف نشده باقی می‌ماند که می‌توان آن را به v_s اختصاص داد و یک kـرنگ‌آمیزی از $G-\{v_1,\ldots,v_{s-1}\}$ به‌دست می‌آید. اگر این روند را ادامه دهیم یک kـرنگ‌آمیزی برای G حاصل می‌شود. بنابراین G، kـرنگ‌پذیر است.

ب) فرض کنید G، kـرنگی باشد. چون $G-\{v_1,\ldots,v_s\}$ زیرگراف G است در نتیجه

$$\chi(G-\{v_1,\ldots,v_s\})\leq\chi(G)=k.$$

حال ثابت می‌کنیم $\chi(G-\{v_1,\ldots,v_s\})<k$ امکان ندارد. فرض‌کنید $\chi(G-\{v_1,\ldots,v_s\})\leq k-1$ از این که $(v_1,\ldots,v_s)$، $(k-2)$ـدنباله از رأسها است و $\chi(G-\{v_1,\ldots,v_s\})\leq k-1$ مانند قسمت (الف) G، $(k-1)$ـرنگ‌پذیر است و این با فرض $\chi(G)=k$ تناقض دارد.

حال برعکس فرض‌کنید $G-\{v_1,\ldots,v_s\}$، kـرنگی باشد. چون $(v_1,\ldots,v_s)$، $(k-2)$ـدنباله از رأسها است پس $(k-1)$ـدنباله از رأسها نیز می‌باشد و در نتیجه طبق قسمت (الف) G، kـرنگ‌پذیر است. فرض‌کنید G را بتوان با $k-1$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. چون $(v_1,\ldots,v_s)$ یک $(k-2)$ـدنباله از رأسها است طبق قسمت (الف) $G-\{v_1,\ldots,v_s\}$، $(k-1)$ـرنگ‌پذیر می‌شود که با $\chi(G-\{v_1,\ldots,v_s\})=k$ تناقض دارد. □

قضیه زیر منسوب به دیراک[1] است که برای اثبات آن می‌توان به کتاب [۲۸] رجوع کرد.

قضیه ۶.۲.۱. هر گراف ۴ـرنگی شامل یک گراف مشتق از K_4 است.

گزاره ۷.۲.۱. گرافهای ۱ـبحرانی، K_1، ۲ـبحرانی، K_2 و گرافهای ۳ـبحرانی دور فرد هستند.

1) Dirac

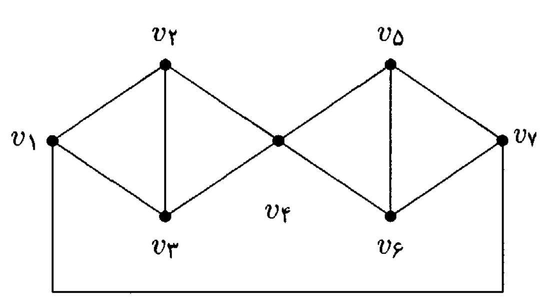
اثبات. گراف ۱ـبحرانی G را در نظر بگیرید. چون $\chi(G) = ۱$ پس حداقل یک رأس دارد یعنی شامل $K_۱$ است. از آن‌جا که G، ۱ـبحرانی است و $\chi(G) = \chi(K_۱) = ۱$، G نمی‌تواند شامل $K_۱$ به عنوان یک زیرگراف سره باشد پس $G = K_۱$.

اینک فرض کنید G یک گراف ۲ـ بحرانی باشد. از این که عدد رنگی G، ۲ است نتیجه می‌گیریم زیرگراف یکریخت با $K_۲$ دارد. با توجه به این‌که G، ۲ـبحرانی است و $\chi(G) = \chi(K_۲) = ۲$، G نمی‌تواند شامل $K_۲$ به عنوان یک زیرگراف سره باشد، پس $G = K_۲$. واضح است که گراف $K_۲$، ۲ـبحرانی است.

حال فرض کنید G یک گراف ۳ـ بحرانی باشد. از این‌که $\chi(G) \neq ۲$ گراف G دو بخشی نیست. در نتیجه G شامل یک دور فرد مانند H است. چون G، ۳ـبحرانی است و $\chi(G) = \chi(H) = ۳$، G نمی‌تواند شامل H به عنوان زیرگراف سره باشد، پس G یک دور فرد است. واضح است که دور فرد ۳ـبحرانی است، زیرا عدد رنگی آن ۳ است و هر زیرگراف سره از آن دارای عدد رنگی حداکثر ۲ است. □

۱-۳ قضیه بروکس و گرافهای Δـبحرانی

همان‌طور که گزاره ۱.۲.۷ نشان می‌دهد برای $k \geq ۳$ هیچ گراف kـبحرانی با ماکسیمم درجهٔ k وجود ندارد. اما برای $۴ \leq k \leq ۸$ چنین گرافهایی را ارائه خواهیم داد. به عنوان مثال گراف H را به صورت زیر در نظر بگیرید.



شکل ۱ـ۱