بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

آنتروپی‌های اطلاع کوانتومی و چندجمله‌ای‌های متعامد

استاد راهنما: دکتر محمدرضا هوشمنداصل

استاد مشاور: دکتر محمدکاظم توسلی

پژوهش و نگارش: اعظم قاسمی فلاورجانی

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به تمام ستارگان آسمان زندگی‌ام

به ویژه آن دو خورشید درخشان

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

به نام آن که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام منزلی دیگر از منازل تحصیل را سپری کنم و خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی استادان گرانقدر، از آنان قدردانی کنم.

به پاس ادب و احترام از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که مرا در پیمودن جاده‌های بیداری یاری کردند و دریچه‌ای جدید از معرفت به رویم گشادند، تشکر می‌کنم و سلامت و بهروزی و موفقیت را برای ایشان از درگاه احدیت خواستارم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمدکاظم توسلی که به عنوان استاد مشاور راهنمایی‌های سازنده‌ای به اینجانب نمودند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر رسول رکنی‌زاده عضو هیأت علمی گروه فیزیک دانشگاه اصفهان به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان نامه از سوی ایشان و از جناب آقای دکتر محمد مهدی حسینی به عنوان داور داخلی صمیمانه تشکر می‌کنم.

همچنین ضمن تشکر از زحمات بی‌شائبه استادان بخش ریاضی به خصوص جناب آقای دکتر کرباسی، دکتر فرید مالک قائینی، دکتر قاسم برید لقمانی، دکتر ابوالفضل شاهزاده فاضلی و مدیر گروه ریاضی جناب آقای دکتر اکبر دهقان‌نژاد، توفیق تمامی آن بزرگواران را از آستان حضرت دوست خواستارم.

همچنین از خانم عباسی‌زاده کارشناس دانشکده و خانم عابدینی منشی دانشکده بسیار متشکرم.

در پایان وظیفه خود می‌دانم که از خانواده‌ام که با ایجاد فرصت‌های مناسب در موفقیت اینجانب سهیم گشتند و همچنین از تمامی دوستانم صمیمانه تشکر کنم.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	**صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی** **دوره کارشناسی ارشد**	**شناسه: ب/ک/۳**

جلسه دفاعیه پایان نامـه تحصیلی خانم **اعظم قاسمی** **دانشجوی کارشناسی ارشد**

رشتـه/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: **آنتروپی های اطلاع کوانتومی و چندجمله ای های متعامد**

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ **۸۶/۶/۹** باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۷۵ به حروف نوزده و هفتاد و پنج صدم و

درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	محمد رضا هوشمند اصل	
استاد/ استادان مشاور:	محمد کاظم توسلی	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	~~سید محمد مهدی حسینی~~	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	رسول رکنی زاده	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمد رضا نوربالا

امضاء:

چکیده

در این پایان نامه سعی بر آن است که آنتروپی‌های اطلاع شانون را برای سیستم‌های کوانتومی ساده مانند پتانسیل نوسانگر هماهنگ و اتم هیدروژن در دو فضای مکان و تکانه که به ترتیب با $S(\rho)$ و $S(\gamma)$ نشان داده می‌شوند محاسبه کنیم. به طوری که محاسبه این آنتروپی‌ها منجر به محاسبه آنتروپی چندجمله‌ای‌های متعامد از جمله چندجمله‌ای‌های هرمیت، چندجمله‌ای‌های لاگر و چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر می‌شوند. این آنتروپی‌ها برای چندجمله‌ای‌های چبیشف دارای جوابی دقیق، اما برای چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر دارای جواب تقریبی هستند. این نتایج به ما اجازه می‌دهند آنتروپی‌های مکان و تکانه را برای حالت‌های اولیه و برانگیخته از سیستم‌های فیزیکی که در بالا به آن اشاره شد، محاسبه کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه ۱

۱ تعاریف و پیش نیازها ۳

۱.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد ۴

۱.۱.۱ توابع متعامد ۴

۲.۱.۱ چندجمله‌ای‌های هرمیت ۵

۳.۱.۱ چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه k ۶

۴.۱.۱ چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر ۷

۵.۱.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول ۸

۶.۱.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم ۸

۲.۱ تابع گاما ۹

۳.۱ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با سری‌ها ۱۰

۱.۳.۱ سری توانی ۱۰

۲.۳.۱ سری جواب حول یک نقطه عادی ۱۰

۳.۳.۱ سری جواب حول یک نقطه تکین ۱۱

۴.۱ توابع فوق‌هندسی ۱۴

۱.۴.۱ توابع حدی فوق هندسی هم‌جریان ۱۵

۲.۴.۱ توابع فوق هندسی هم‌جریان ۱۵

۳.۴.۱ توابع فوق‌هندسی گاوسی ۱۶

۵.۱ تبدیل‌های فوریه ۱۸

۶.۱ مکانیک کوانتومی ۲۰
۱.۶.۱ اصل عدم قطعیت ۲۱
۲.۶.۱ عدم قطعیت در مکان و تکانه ۲۱
۷.۱ معادله شرودینگر ۲۵
۸.۱ آنتروپی ۲۷
۱.۸.۱ اطلاع موضعی ۲۷
۲.۸.۱ امید ریاضی یا میانگین f ۲۸
۳.۸.۱ اندازه اطلاع پیوسته ۲۹
۴.۸.۱ آنتروپی اطلاعات ۳۰
۵.۸.۱ آنتروپی‌های اطلاع در فضاهای مکان و تکانه ۳۰

۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های متعامد ۳۲
۱.۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های هرمیت ۳۳
۱.۱.۲ محاسبه آنتروپی چندجمله‌ای‌های هرمیت ۳۸
۲.۱.۲ بسط تابع پتانسیل لگاریتمی بر حسب توابع فوق‌هندسی گاوسی ۴۱
۲.۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های لاگر ۴۲
۳.۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر ۴۶
۱.۳.۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول ۴۶
۲.۳.۲ آنتروپی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم ۴۷
۳.۳.۲ محاسبه آنتروپی چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر ۴۹
۴.۲ آنتروپی‌ها و پتانسیل‌های لگاریتمی از چندجمله‌ای‌های متعامد ۶۱

۳ آنتروپی‌های اطلاع سیستم‌های کوانتومی ساده شامل چندجمله‌ای‌های متعامد ۶۳
۱.۳ آنتروپی اطلاع کوانتومی سیستم‌های یک بعدی ـ تک ذره‌ای ۶۴
۱.۱.۳ نوسانگر هماهنگ ۶۴
۲.۱.۳ اتم هیدروژن ۷۰
۲.۳ آنتروپی‌های اطلاع سیستم‌های کوانتومی D ـ بعدی، تک ذره‌ای ۷۳

۱.۲.۳ سیستم‌های شامل تابع موج $\Psi_{n,l,\{\mu\}}(\mathbf{r})$ ۷۳
۲.۲.۳ آنتروپی‌های سیستم‌های شامل تابع موج $\Psi_{n,l,\{\mu\}}(\mathbf{r})$ ۷۷
۳.۲.۳ نوسانگر هماهنگ D ـ بعدی ۷۹
۴.۲.۳ اتم هیدروژن D ـ بعدی ۸۳
۳.۳ آنتروپی‌های اطلاع برای پتانسیل مورس ۸۷
۴.۳ آنتروپی‌های اطلاع برای پتانسیل هذلولوی پوشل ـ تلر ۹۳
۵.۳ آنتروپی‌های اطلاع برای نوسانگر آیزوتنیک ۹۹
۱.۵.۳ تابع موج نوسانگر آیزوتنیک ۹۹
۲.۵.۳ آنتروپی‌های اطلاع در دو فضای مکان و تکانه ۹۹

پیوست ۱۰۴
واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۰۴
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۱۰۷

مراجع ۱۱۰

مقدمه

رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ از بنیادی‌ترین روابط مکانیک کوانتومی در فیزیک به حساب می‌آید. اگر Δx و Δp به ترتیب عدم قطعیت در مکان و تکانه باشند، رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{۲}$$

که در آن $\hbar = h/۲\pi$ و h ثابت پلانک می‌باشد.

مفهوم آنتروپی توسط کلاسیوس[۱] در سال ۱۸۵۴ معرفی شد و در سال ۱۹۲۸ هارتلی آنتروپی اطلاع را برای اولین بار تعریف کرد. در اطلاع هارتلی رخداد نمادها یا پیشامدها با احتمال‌های برابر در نظر گرفته نشده بود شانون[۲] برای اولین بار اطلاع را با مفهوم احتمال پیوند داد و نظریه اطلاع هارتلی را توسعه داد و در سال ۱۹۴۸ آنتروپی اطلاع را با مرتبط ساختن مفهوم اطلاع با عدم قطعیت پایه‌گذاری کرد.

پژوهش‌های متنوعی برای یافتن نوع دیگری از آنتروپی اطلاع شانون از جمله یافتن آنتروپی اطلاع برای نوسانگر هماهنگ در سیستم‌های فیزیکی انجام شده است. در این زمینه سعی شده است با توجه به آنتروپی چندجمله‌ای‌های متعامد آنتروپی اطلاع سیستم‌های فیزیکی معینی را به دست آورند. در سال ۱۹۹۴ یانز و دهسا[۳] آنتروپی اطلاع را برای اتم هیدروژن توسط چندجمله‌ای‌های چبیشف و در سال ۱۹۹۶ با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر مورد بررسی قرار دادند . در سال ۱۹۹۷ رایز آنتروپی اطلاع را با استفاده از چندجمله‌ای‌های هرمیت به دست آورد.

در این پایان نامه برای سیستم‌های کوانتومی D ـ بعدی، تابع موج حاصل از معادله شرودینگر

[۱] Clausius

[۲] Shannon

[۳] R.J. Yáñez and J.S. Dehesa

در فضای مکان را به دست آورده و آنتروپی اطلاع در فضای مکان، $S(\rho)$ را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب با محاسبه تبدیل فوریه تابع موج آنتروپی اطلاع در فضای تکانه، $S(\gamma)$ محاسبه می‌شود و از مجموع دو آنتروپی اطلاع برای سیستم‌های مکانیک کوانتومی D ـ بعدی، رابطه عدم قطعیت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S(\rho)+S(\gamma) \;\geqslant\; D(۱+\ln\pi) \qquad (۱.۰.۰)$$

نامساوی (۱.۰.۰) که به رابطه BBM معروف است در سال ۱۹۷۵ توسط بکنر[۱]، بیالینکی ـ بیرولا[۲] و میسیلسکی[۳] اثبات شد.

مطالبی که در این پایان نامه آورده‌ایم، به این شرح است:

در فصل اول، تعاریف و پیش نیازهای مورد استفاده برای فصل‌های بعدی بیان شده است. در فصل دوم، آنتروپی چندجمله‌ای‌های متعامد را محاسبه می‌کنیم و در فصل سوم آنتروپی‌های اطلاع سیستم‌های کوانتومی ساده شامل چندجمله‌ای‌های متعامد آورده شده است.

[۱] Beckner

[۲] Bialynicki-Birula

[۳] Mycielski

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل تعاریف و پیش نیازهای لازم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، گنجانده شده است. فصل حاضر مشتمل بر هشت بخش است. در بخش (۱.۱) تعاریف و خواص توابع متعامد آورده شده است و سپس انواع چندجمله‌ای‌های متعامد و خصوصیات آنها مورد بررسی قرار گرفته است. بخش (۲.۱) شامل تعریف تابع گاما و خواص آن می‌باشد. در بخش (۳.۱) روش‌های به دست آوردن سری‌های جواب معادلات مرتبه دوم آورده شده است. بخش (۴.۱) شامل توابع فوق‌هندسی می‌باشد که مکرراً در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش (۵.۱) تبدیل‌های فوریه مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش (۶.۱) به معرفی مکانیک کوانتومی و اصل عدم قطعیت پرداخته می‌شود و در بخش (۷.۱) معادله شرودینگر و در بخش آخر تعریف کلی‌ای از آنتروپی و آنتروپی اطلاعات آورده شده است.

۱.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

۱.۱.۱ توابع متعامد

توابع پیوسته حقیقی f، g و ω $(\omega > 0)$ در بازه $[a,b]$ مفروض‌اند. ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن ω به صورت زیر تعریف شود:

$$< f,g >_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx$$

⋆ تابع f را نسبت به تابع وزن ω یکه نامند هرگاه $< f,f >_\omega = 1$.

⋆ دو تابع f و g نسبت به تابع وزن ω متعامدند هرگاه $< f,g >_\omega = 0$.

⋆ مجموعه توابع ناصفر و پیوسته $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ در بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن ω، مجموعه توابع متعامد یکه خوانده می‌شوند هر گاه:

$$\forall i,j : \qquad < f_i, f_j >_\omega = \delta_{ij}$$

در ادامه به بررسی دسته‌ای از توابع متعامد که در فصل‌های بعدی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند پرداخته می‌شود.

۲.۱.۱ چندجمله‌ای‌های هرمیت

چندجمله‌ای‌های هرمیت در بازه $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌شوند و در بازه داده شده نسبت به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x^{2}}$ متعامدند و از روابط بازگشتی زیر به ازای $H_{0}(x) = 1$ و $H_{1}(x) = 2x$ به دست می‌آیند.

$$H_{n+1}(x) = 2xH_{n}(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت دارای خواص متعددی می‌باشند که در اینجا به چند مورد از آنها اشاره می‌کنیم:

$$1) \quad \frac{d^{r}}{dx^{r}}(e^{-x^{2}}H_{n}(x)) = (-1)^{r}e^{-x^{2}}H_{n+r}(x)$$

$$2) \quad H_{n}(x) = (-1)^{n}e^{x^{2}}\frac{d^{n}}{dx^{n}}(e^{-x^{2}})$$

$$3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2}}H_{n}(x)H_{m}(x)dx = \delta_{n,m}2^{n}n!\sqrt{\pi}$$

$$4) \quad H_{n}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k}n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

$$5) \quad H_{n}(x)H_{m}(x) = \sum_{k=0}^{min(n,m)} \frac{n!m!2^{k}}{(n-k)!(m-k)!k!}H_{n+m-2k}(x)$$

$$6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p}e^{-x^{2}}H_{n}^{2}(x)\,dx = \frac{2^{n-p}n!(2p)!\sqrt{\pi}}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}\frac{1}{2^{k}}$$

$$7) \quad H_{n}(x) = 2^{n}\prod_{j=1}^{n}(x - x_{n,j})$$

که در این رابطه $x_{n,j}$ها ریشه‌های چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند.

۳.۱.۱ چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه k

چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه صفر، $L_n(x)$ نسبت به تابع وزنی $\omega(x) = e^{-x}$ در بازه $(0,\infty)$ متعامدند و به ازای $L_0(x) = 1$ و $L_1(x) = 1 - x$ در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$(n+1)L_{n+1}(x) \;=\; (2n - x + 1)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad n \geqslant 2$$

به راحتی دیده می‌شود که:

$$xL'_n(x) \;=\; nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

با توجه به تعریف چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه صفر، چندجمله‌ای‌های لاگر مرتبه k که با $L_n^k(x)$ نشان داده می‌شوند، به دست می‌آید که این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x}x^k$ بر بازه $(0,\infty)$ متعامدند و دارای ویژگی‌های متعددی می‌باشند که در زیر به برخی از آنها اشاره می‌شود:

۱) $L_n^0(x) = L_n(x)$

۲) $(L_n^k(x))' = -L_{n-1}^{k+1}(x)$

۳) $L_n^k(x) = L_n^{k+1}(x) - L_{n-1}^{k+1}(x)$

۴) $x(L_n^k(x))' = nL_n^k(x) - (n-k)L_{n-1}^k(x)$

۵) $L_n^k(x) = \dfrac{e^x x^{-k}}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k})$

۶) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)L_m^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{n,m}$

۷) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}(L_n^k(x))^2 dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1)$

۸) $\displaystyle L_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m$

۹) $L_n^{-1/2}(x^2) = \dfrac{1}{(-4)^n n!}H_{2n}(x)$

۱۰) $L_n^{1/2}(x^2) = \dfrac{1}{2(-4)^n n! x}H_{2n+1}(x)$

۴.۱.۱ چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر

چندجمله‌ای‌هایی که در بازه $(-1,1)$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$، $(\alpha,\beta > -1)$ متعامد باشند، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی نامیده می‌شوند. دسته خاصی از این چندجمله‌ای‌ها، که در آنها $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ باشند چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر نامیده می‌شوند. بنابراین چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر نسبت به تابع وزن $\omega(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$ در بازه $(-1,1)$ متعامدند و با $C_n^{(\lambda)}(x)$ نشان داده می‌شوند.

هر گاه $C_n^{(\lambda)}(x)$ چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر باشند آنگاه دارای خواص متعددی هستند که به چند مورد از آنها اشاره می‌شود:

$$1)\quad \int_{-1}^{1} C_n^{(\lambda)}(x)C_m^{(\lambda)}(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}\,dx = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)(n+\lambda)n!}\delta_{n,m}$$

$$2)\quad (1-x^2)^{\lambda-1/2}C_n^{(\lambda)}(x) = -\frac{2\lambda}{(2\lambda+n)n}\left((1-x^2)^{\lambda+1/2}C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)\right)'$$

$$3)\quad (1-x^2)(C_n^{(\lambda)}(x))' = (2\lambda+n)xC_n^{(\lambda)}(x) - (n+1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x)$$

$$4)\quad (C_n^{(\lambda)}(x))' = 2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)$$

$$5)\quad C_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\Gamma(\lambda+n-k)}{k!(n-2k)!\Gamma(\lambda)}(2x)^{n-2k}$$

$$6)\quad \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}$$

$$7)\quad C_n^{(0)}(x) = T_n(x)$$

$$8)\quad C_n^{(1)}(x) = U_n(x)$$

۹) هر گاه $\omega_\lambda(x)$ به صورت زیر باشد،

$$\omega_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}(1-x^2)^{\lambda-1/2}$$

در این صورت چندجمله‌ای‌های گگن‌بائر نسبت به این تابع وزن متعامدند. عبارت $\omega_\lambda(x)$ را تابع وزن نرمال شده یا بهنجار می‌نامند.

۵.۱.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول $T_n(x)$ در بازه $[-۱,۱]$ به صورت $T_n(x)=\cos(n\cos^{-۱}(x))$ تعریف می‌شوند و نسبت به تابع وزن $\omega(x)=(۱-x^۲)^{-۱/۲}$ متعامدند و در رابطه بازگشتی زیر به ازای $T_۰(x)=۱$ و $T_۱(x)=x$ صدق می‌کنند:

$$T_{n+۱}(x) \;=\; ۲xT_n(x)-T_{n-۱}(x), \qquad n\geqslant ۱$$

خاصیت تعامد در این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{-۱}^{۱} T_n(x)T_m(x)\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx \;=\; \begin{cases} \pi\delta_{n,m} & n=m=۰ \\ \frac{\pi}{۲}\delta_{n,m} & n,m\geqslant ۱ \end{cases}$$

۶.۱.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم $U_n(x)$ در بازه $[-۱,۱]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+۱)\theta}{\sin\theta}, \qquad \theta=\cos^{-۱}x$$

این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $\omega(x)=(۱-x^۲)^{۱/۲}$ متعامدند و در روابط زیر صدق می‌کنند:

۱) $$\int_{-۱}^{۱} U_n(x)U_m(x)\sqrt{۱-x^۲}\,dx=\frac{\pi}{۲}\delta_{n,m}$$

۲) $$U_n(x)=\sum_{m=۰}^{[n/۲]}\frac{(-۱)^m m!(۱-x^۲)^m}{(۲m+۱)!(n-۲m)!}x^{n-۲m}$$

۳) $$U_n(x)=\frac{۱}{n+۱}T'_{n+۱}(x)$$

۴) $$۲xU_n(x)=U_{n+۱}(x)+U_{n-۱}(x), \qquad n\geq ۱$$

۲.۱ تابع گاما

تابع گاما که آن را با $\Gamma(x)$ نشان می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad x>0$$

این تابع به ازای $x>0$ همگرا می‌باشد. چند خاصیت مهم این تابع عبارت است از:

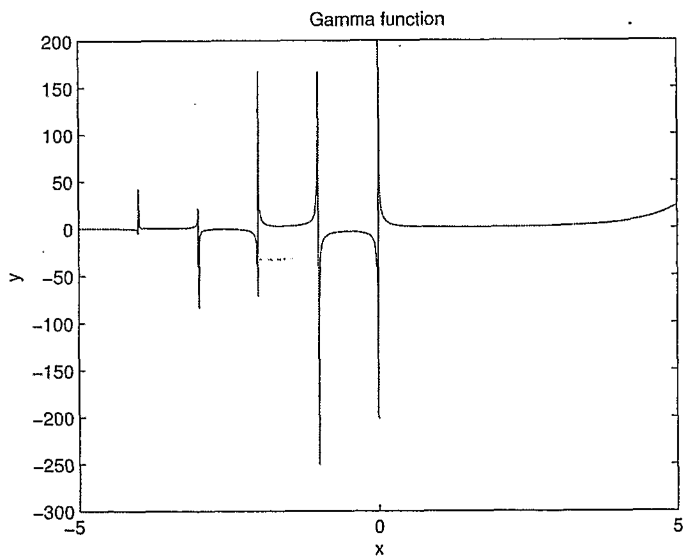
$$1)\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

$$2)\quad \Gamma(x+k+1)=\Gamma(x+1)\,[(x+1)(x+2)\cdots(x+k)]$$

$$3)\quad \Gamma(rx)=r^{rx-1/2}(2\pi)^{(1-r)/2}\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma(x+\frac{j}{r}),\quad r\in\mathbb{N}$$

$$4)\quad \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$$

در شکل (۱.۲.۱)، تابع گاما در بازه $[-5,5]$ نشان داده شده است.



شکل ۱.۲.۱ : نمودار تابع گاما، $y=\Gamma(x)$ به ازای $x\in[-5,5]$

۳.۱ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با سری‌ها

۱.۳.۱ سری توانی

هر سری به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \qquad (۱.۳.۱)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (۲.۳.۱)$$

که در آن $x_0, a_n \in \mathbb{R}$ هستند را یک سری توانی نامند که به ترتیب سری توانی حول عدد ثابت x_0 و سری توانی حول صفر می‌باشند. سری اول را می‌توان با انتقال $t = x - x_0$ به سری دوم تبدیل کرد .

سری توانی (۲.۳.۱) را در x_0 همگرا نامند هر گاه دنباله مجموعه جزئی $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x_0^n$ همگرا باشد. به عبارت دیگر

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = L$$

بدیهی است که سری توانی (۱.۳.۱) در x_0 و سری توانی (۲.۳.۱) در صفر همگرا هستند. سری (۲.۳.۱) را همگرای مطلق نامند هر گاه $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ همگرا باشد. همگرایی مطلق یک سری توانی همگرایی آن سری را نتیجه می دهد ولی عکس این موضوع لزوماً صحیح نیست. اگر سری توانی در x_0 همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد گوئیم سری در x_0 دارای همگرایی مشروط است.

۲.۳.۱ سری جواب حول یک نقطه عادی

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (۳.۳.۱)$$

را هر گاه ضرایب $P(x), Q(x), R(x)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x باشند، در نظر بگیرید. $x_\circ$ را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۳.۳.۱) نامند هر گاه $P(x_\circ) \neq \circ$ باشد. در غیر این صورت $x_\circ$ را یک نقطه تکین معادله (۳.۳.۱) نامند. اگر $x_\circ$ یک نقطه عادی معادله (۳.۳.۱) باشد با تقسیم دو طرف این معادله بر $P(x)$ داریم،

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \;=\; \circ \qquad (۴.۳.۱)$$

که $p(x) = Q(x)/P(x)$ و $q(x) = R(x)/P(x)$. در این حالت تابع جواب معادله دیفرانسیل (۴.۳.۱) دارای یک سری تیلور حول نقطه $x_\circ$ است، یعنی

$$y(x) \;=\; \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x - x_\circ)^n \qquad (۵.۳.۱)$$

با جانشینی تابع جواب (۵.۳.۱) در معادله دیفرانسیل (۴.۳.۱)، سری تیلور دو جواب مستقل خطی معادله (۴.۳.۱) به دست می‌آید. می‌توان نحوه تعیین جواب سری معادله (۳.۳.۱) را حول نقطه عادی $x_\circ$ به طور خلاصه به صورت زیر بیان کرد:

الف) قرار دادن $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x - x_\circ)^n$ و مشتقات مرتبه اول و دوم آن در معادله (۳.۳.۱).

ب) یکسان‌سازی توان‌های $(x - x_\circ)$ در کلیه سری ها.

ج) یکسان‌سازی کران پایین سری‌های حاصل از مرحله (ب) با حفظ یکسان بودن توان‌های $(x - x_\circ)$.

د) با مساوی صفر قرار دادن ضرایب کلیه توان‌های $(x - x_\circ)$ و به دست آوردن یک رابطه بازگشتی برای ضرایب a_n ها، تمام این ضرایب را بر حسب دو ضریب $a_\circ$ و a_1 می‌نویسیم.

و) با جایگذاری ضرایب به دست آمده در $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x - x_\circ)^n$ جواب عمومی و متعاقباً دو جواب مستقل خطی معادله (۳.۳.۱) به دست می‌آید.

۳.۳.۱ سری جواب حول یک نقطه تکین

معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم (۳.۳.۱) را در نظر بگیرید وقتی که ضرایب $P(x), Q(x), R(x)$ توابع پیوسته و $P(x_\circ) = \circ$ باشد. در این حالت $x_\circ$ را یک نقطه تکین معادله (۳.۳.۱) نامند. اگر $x_\circ$ نقطه تکین معادله (۳.۳.۱) باشد برای تعیین سری جواب حول نقطه $x_\circ$ نمی‌توان از سری (۵.۳.۱) استفاده کرد و نمی‌توان دو جواب مستقل خطی معادله