بسم اللّه الرّ حمن الرّ حيم

علم تو را راهنمایی می‌کند و عمل تو را به هدف می‌رساند.

(امام علی (ع))

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاس و تشکر...

بار خدایا، کسی در مقام شکرگذاری به حد و مرتبه‌ای نمی‌رسد جز آنکه احسان تو شکری دیگر بر عهدهٔ او می‌نهد، خدایا تو را سپاس می‌گوییم بر احسان نیکویت به من و بسیاری نعمت‌هایت بر من و عطای فراوانت در حق من و بر رحمتت که مرا برتری دادی. جان و زبان و عقلم تو را سپاس می‌گویند آن سان سپاسی که به پایگاه کمال و حقیقت شکر برسد، سپاسی که مایهٔ خشنودی تو از من گردد. ای پناه من در آن زمان که راههای متعدد خسته‌ام می‌کند.ای که با یاریت تأییدام نمودی که اگر یاری تو نبود شکست می‌خوردم.

از پدر و مادر عزیزم که با مهربانی‌هایشان مشوق راهم هستند و با گرمای وجودشان سختی‌های این راه را بر من هموار نموده و با حمایت‌هایشان باعث استواری من در این راه بوده و هستند تشکر می‌کنم و با تمام وجود بر دست‌های پر مهرشان بوسه می‌زنم.

پایانامه‌ای که پیش رو دارید حاصل راهنمایی‌های بی‌دریغ و زحمات بی‌پایان استاد بزگوارم جناب آقای دکتر اسماعیل عابدی می‌باشد. ساده ولی با تمام وجود از زحمات بی‌دریغ و بی‌منت استاد بزگوارم جناب آقای دکتر اسماعیل عابدی که اولین استادم در دوران تحصیل‌ام می‌باشند، کمال تشکر را دارم.این پایانامه را به پدر و مادر عزیزم به خاطر عشقی که به آنها دارم و به استادم به خاطر زحمات بی‌منت‌شان تقدیم می‌کنم.

از جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست که مشاورهٔ این پایانامه را برعهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر رضا چاوش خاتمی نیز سپاسگذارم که قبول زحمت فرموده و داوری این پایانامه را برعهده گرفتند.

و همچنین از تمام دوستان و عزیزانی که مرا در این پایانامه یاری نمودند تشکر می‌کنم.

چکیده:

در این پایان‌نامه برای هر یک از حالت‌های آفین، ریمانی، تقریباً هرمیتی، تقریباً پاراهرمیتی، تقریباً کواترنیونی، تقریباً پاراکواترنیونی، هرمیتی و پاراهرمیتی یک مدل جبری محض معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که هر یک از این مدل‌های جبری یک مدل خمیدگی برای خمینه‌های فوق می‌باشند. همچنین مسائلی را در حالت ایوانف — پتروا برحسب تحقق هندسی خمیدگی بیان می‌کنیم.

در فصل اول تعاریف مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد آورده شده است.

در فصل دوم خمینهٔ آفین را در نظر می‌گیریم و یک مدل جبری برای آن معرفی می‌کنیم سپس تحقق هندسی را برای حالت‌های مختلف خمینهٔ آفین بررسی می‌کنیم. همچنین خمینهٔ شبه‌ریمانی و مدل جبری مربوطه و تحقق هندسی خمینهٔ شبه‌ریمانی را در نظر می‌گیریم. در نهایت حالت مختلط آفین و شبه‌ریمانی را مطالعه می‌کنیم.

در فصل سوم مدل جبری هرمیتی (پاراهرمیتی) $\zeta := (V, \langle .,. \rangle, J, A)$ را در نظر می‌گیریم. حال یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) برای مدل جبری فوق معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم (M, g) خمینهٔ ریمانی (شبه‌ریمانی) و J یک ساختار تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) روی (M, g) باشد. دراین صورت خمینهٔ (M, g, J) یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) می‌باشد. نشان می‌دهیم که مدل جبری $\zeta := (V, \langle .,. \rangle, J, A)$ یک مدل خمیدگی برای یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) می‌باشد، به عبارتی فضای مماس T_pM همان مدل جبری می‌باشد. سپس با اعمال شرط اضافی انتگرال‌پذیری از نظر هندسی روی خمینه و تبدیل آن به خمینهٔ هرمیتی (پاراهرمیتی) یک شرط اضافی از نظر جبری روی تانسور خمیدگی اعمال می‌شود وآن اتحاد گری (پاراگری) می‌باشد. نشان می‌دهیم مدل جبری $\zeta := (V, \langle .,. \rangle, J, A)$ یک مدل خمیدگی برای یک خمینهٔ هرمیتی (پاراهرمیتی) است اگر و تنها اگر تانسور خمیدگی جبری A در اتحاد گری (پاراگری) صدق کند. همچنین تحقق هندسی مدل خمیدگی تقریباً کواترنیونی (تقریباً پاراکواترنیونی) را مطالعه می‌کنیم بدون اینکه شرط اضافی انتگرال‌پذیری را اعمال کنیم.

در فصل چهارم ابتدا مدل جبری ایوانف — پتروا را معرفی می‌کنیم سپس خمینهٔ ایوانف — پتروا را با اعمال یک شرط روی خمینهٔ ریمانی می‌سازیم و شرط عبارتست از اینکه مقادیر ویژهٔ عملگر پادمتقارن $\mathcal{R}(\pi)$ روی گراسمان ۲ — صفحهٔ جهت‌دار شدهٔ π $(\pi = span\{X, Y\})$ ثابت می‌باشد. همچنین مثال‌هایی از خمینهٔ ایوانف — پتروا و مدل جبری مربوط به آن مطرح کرده و به تحقق هندسی خمینهٔ ایوانف — پتروا می‌پردازیم.

کلید واژه: خمینهٔ آفین، خمینهٔ هم‌آفین، اتحاد گری و پاراگری، خمینهٔ هرمیتی و پاراهرمیتی، تانسور ریچی، خمیدگی اسکالر، تانسور $\star$ — ریچی، خمیدگی $\star$ — اسکالر، خمینهٔ کواترنیونی و پاراکواترنیونی، خمینهٔ ایوانف — پتروا، تجزیهٔ خمیدگی Tricerri - Vanheke، عملگر خمیدگی تصویری وایل، عملگر خمیدگی همدیس وایل.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

یکی از مباحث اصلی در زمینهٔ هندسه دیفرانسیل ایجاد ارتباط بین ویژگی‌های جبری محض از تانسور خمیدگی ریمانی و ویژگی‌های هندسی معادل از خمینه می‌باشد. در سالهای اخیر بسیاری از هندسه‌دانان دراین زمینه کار کرده‌اند ولی هنوز بسیاری از مسائل اساسی حل نشده باقی مانده است. ابتدا برای راحتی در حالت جبری محض کار می‌کنیم سپس به حالت هندسی می‌پردازیم. بسیاری از مسایل هندسهٔ دیفرانسیل به صورت مسائلی شامل تحقق هندسی خمیدگی بیان شده است.

در سال ۱۹۹۰ $N.Bokan$ تجزیهٔ کاملی از تانسور خمیدگی‌های خمینه‌های ریمانی با التصاق متقارن را مطرح می‌کند ([۱]). در حالت آفین در سال ۲۰۰۸ $P.Gilkey$ و $S.Nikcevic$، نمایش هندسی عملگرهای خمیدگی هم‌آفین را مورد مطالعه قرار می‌دهند ([۵]). $P.Gilkey$ و $S.Nikcevic$ و $D.Westerman$ و $H.Kang$ و $M.Brozos-Vazquez$ در سال ۲۰۰۸، تحقق هندسی مدل‌های خمیدگی خمینه‌های با خمیدگی اسکالر ثابت در حالت ریمانی و شبه‌ریمانی را مورد بررسی قرار می‌دهند ([۲]). سپس در سال ۲۰۰۹ $P.Gilkey$ و $S.Nikcevic$ و $D.Westerman$، تحقق هندسی عملگرهای خمیدگی جبری تعمیم یافته را مطالعه کرده‌اند ([۶]).

فرض کنید (M,g) خمینهٔ ریمانی (شبه‌ریمانی) باشد. یک ساختار تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) J روی یک خمینهٔ ریمانی (شبه‌ریمانی) (M,g) در نظر می‌گیریم. در

این صورت خمینهٔ (M,g,J) یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) می‌باشد به طوریکه هر تانسور خمیدگی از خمینهٔ تقریباً هرمیتی (تقریباً پاراهرمیتی) در تقارن‌های تانسور خمیدگی و اتحاد اول بیانچی صدق می‌کند. حال برای هر یک از این خمینه‌ها یک مدل جبری معرفی می‌کنیم به طوریکه تانسور خمیدگی جبری هر یک از مدل‌های جبری نیز در تقارن‌های تانسور خمیدگی و اتحاد اول بیانچی مربوط به خمیدگی ریمانی صدق می‌کند. حال با اعمال شرط اضافی انتگرال‌پذیری از نظر هندسی روی خمینه و تبدیل آن به خمینهٔ هرمیتی (پاراهرمیتی) یک شرط اضافی از نظر جبری روی تانسور خمیدگی اعمال می‌شود و آن اتحاد گری (پاراگری) می‌باشد که $Gray$ در سال ۱۹۷۶ اتحاد گری (پاراگری) را برای خمینهٔ هرمیتی (پاراهرمیتی) مطرح کرد([۱۰]).

مطالعهٔ خمینه‌های ایوانف — پتروا اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط $Ivanov, petrova$ شروع شد ([۱۲]). در مقالهٔ مذکور خمینه‌های ریمانی که عملگر خمیدگی پادمتقارن دارای مقایر ویژهٔ ثابت نقطه‌ای می‌باشد مطالعه شده بود. بعد ۴ که یک حالت استثنائی است توسط $Ivanov, petrova$ بررسی شده بود ([۱۲]). در سال ۱۹۹۹ حالت‌های $n \geq ۵$ و $n \neq ۷$ توسط $P.Gilkey$ و $J.V.Leahy$ و $H.Sadofsky$ کار شده‌است ([۸]). در سال ۱۹۹۹ حالت $n = ۸$ توسط $P.Gilkey$ در [۹] و در سال ۲۰۰۴ حالت $n = ۷$ توسط $Nikolayevsky$ ([۱۹]) بحث شده است. در این مقاله‌ها به مطالعهٔ خمینه‌های ریمانی که عملگر خمیدگی پادمتقارن دارای مقادیر ویژهٔ ثابت می‌باشد، در ابعاد مختلف پرداخته‌اند.

در این پایانامه M را یک خمینهٔ هموار از بعد $n \geq ۴$ فرض کرده‌ایم، و نشان داده شده که در حالت‌های $n = ۲,۳$ نیز نتایج مشابهی وجود دارد.

در فصل اول تاریخچه‌ی مسئلهٔ تحقق هندسی مدل خمیدگی و تعاریف مقدماتی آورده شده است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم خمینه‌های آفین، ریمانی و حالت مختلط آفین و شبه‌ریمانی را مطرح

می‌کنیم.

در فصل سوم تقریباً هرمیتی و تقریباً پاراهرمیتی و تقریباً کواترنیونی، تقریباً پاراکواترنیونی و هرمیتی و پاراهرمیتی و مدل‌های جبری آنها و قضایای مربوط به مدل‌های خمیدگی هر یک از حالت‌های فوق بیان شده است.

در فصل چهارم خمینهٔ ایوانف — پتروا مطالعه شده‌است.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱—۱ تعاریف هندسهٔ آفین و شبه‌ریمانی

تعریف ۱. فرض کنید $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری روی یک خمینهٔ هموار M باشد و فرض کنید $\Gamma(E)$ فضای برش‌های هموار E باشد. یک التصاق در E عبارتست از نگاشت

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

به طوریکه در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

(۱) نسبت به X، $C^\infty(M)$ خطی می‌باشد:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \qquad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

(۲) نسبت به Y، $\mathbb{R}$ خطی می‌باشد:

$$\nabla_X aY_1 + bY_2 = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(۳) در قاعدهٔ ضربی صدق می‌کند:

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

تعریف ۲. یک التصاق آفین روی M عبارتست از یک التصاق روی کلاف مماس TM؛ یعنی نگاشت

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

که در ویژگی‌های (۱) و (۲) و (۳) صدق می‌کند.

تعریف ۳. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار از بعد n باشد. التصاق ∇ روی کلاف مماس TM را یک التصاق تاب آزاد گوییم هرگاه تانسور تاب، $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ متحد با صفر باشد؛ یعنی $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. بنابراین یک التصاق تاب آزاد یک التصاق متقارن نیز می‌باشد.

تعریف ۴. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار از بعد n و ∇ یک التصاق تاب آزاد روی کلاف مماس TM باشد. خمینهٔ هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد ∇ را یک خمینهٔ آفین گوییم.

تعریف ۵. فرض کنید M یک خمینهٔ آفین و $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ باشد. در این صورت عملگر خمیدگی $\mathcal{R}(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

نگاشت $\mathcal{R}$ به وضوح یک $(۱,۳)$ تانسور می‌باشد که آن را اندومرفیسم خمیدگی می‌نامیم و در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = -\mathcal{R}(Y,X)Z \qquad (۱.۱)$$

$$\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = ۰.$$

۱—۲ مدل جبری تانسور خمیدگی

تعریف ٦. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی n باشد. تانسور $\mathcal{A} \in \otimes^۲ V^\star \otimes End(V)$ که در تقارن $\mathcal{A}(X,Y)Z = -\mathcal{A}(Y,X)Z$ و اتحاد اول بیانچی $\mathcal{A}(X,Y)Z + \mathcal{A}(Y,Z)X + \mathcal{A}(Z,X)Y = ۰$ صدق می‌کند را تانسور خمیدگی جبری آفین می‌نامیم. فضای چنین تانسورهایی را با $\mathcal{U}(V) \subset \otimes^۲ V^\star \otimes End(V)$ نشان می‌دهیم. همچنین $\mathcal{A}(X,Y)$ را یک عملگر خمیدگی وابسته گوییم.

تعریف ۷. فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ باشد. فرض کنید $S^۲(V^\star)$ و $\Lambda^۲(V^\star)$ به ترتیب فضای $(۰,۲)$ — تانسورهای متقارن و پادمتقارن و $\rho = \rho_s \oplus \rho_a$ به طوریکه ρ_s و ρ_a به ترتیب مولفهٔ $S^۲(V^\star)$ و $\Lambda^۲(V^\star)$ باشد. تانسور ریچی وابسته به $\mathcal{A}$ را با ضابطه $\rho(X,Y) := Tr\{Z \to \mathcal{A}(Z,X)Y\}$ در نظر می‌گیریم. $\mathcal{A}$ را تانسور خمیدگی ریچی متقارن گوییم اگر و تنها اگر $\rho(\mathcal{A}) \in S^۲(V^\star)$ ، یعنی $\rho_a = ۰$. مشابهاً التصاق تاب آزاد ∇ را ریچی متقارن گوییم هرگاه $\mathcal{R}_p$ به ازاء هر $p \in M$ ریچی متقارن باشد ($\rho_a(\mathcal{R}_p) = ۰$). خمینهٔ هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد ریچی متقارن ∇ را خمینهٔ ریچی متقارن می‌نامیم. همچنین خمینهٔ ریچی متقارن را خمینهٔ هم آفین و عملگر خمیدگی مربوط به خمینهٔ هم آفین را تانسور خمیدگی هم آفین نیز می‌نامیم.

تعریف ۸. فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ باشد. $\mathcal{A}$ را تانسور خمیدگی ریچی پادمتقارن گوییم اگر و تنها اگر $\rho(\mathcal{A}) \in \Lambda^{۲}(V^{\star})$ ، یعنی $\rho_s = ۰$. مشابهاً التصاق تاب آزاد ∇ را ریچی پادمتقارن گوییم هرگاه $\mathcal{R}_p$ به ازاء هر $p \in M$ ریچی پادمتقارن باشد ($\rho_s(\mathcal{R}_p) = ۰$). خمینهٔ هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد ریچی پادمتقارن ∇ را خمینهٔ ریچی پادمتقارن می‌نامیم.

تعریف ۹. فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ باشد. $\mathcal{A}$ را تانسور خمیدگی جبری آفین ریچی تخت گوییم اگر و تنها اگر $\rho = ۰$. یک چنین تانسوری لزوماً هم آفین نیز می‌باشد. مشابهاً التصاق تاب آزاد ∇ را ریچی تخت گوییم هرگاه $\mathcal{R}_p$ به ازاء هر $p \in M$ ریچی تخت باشد. خمینهٔ هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد ریچی تخت ∇ را خمینهٔ ریچی تخت می‌نامیم.

تعریف ۱۰. فرض کنید $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ باشد و ρ تانسور ریچی وابسته به $\mathcal{A}$ باشد. $\sigma(\rho)(X, Y)Z \in \mathcal{U}(V)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sigma(\rho)(X, Y)Z := \rho(X, Y)Z - \rho(Y, X)Z + \rho(X, Z)Y - \rho(Y, Z)X.$$

در این صورت تصویر تانسور خمیدگی جبری آفین $\mathcal{A}$ در $ker\rho$ را تانسور خمیدگی تصویری وایل گوییم و آن را با $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم به طوریکه $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \sigma\rho \in ker\rho$. تانسور خمیدگی جبری آفین $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ را به طور تصویری تخت گوییم اگر و تنها اگر $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = ۰$؛ یعنی $\mathcal{A} = \sigma\rho$. مشابهاً التصاق تاب آزاد ∇ روی یک خمینهٔ M را به طور تصویری تخت گوییم هرگاه $\mathcal{R}_p$ به ازاء هر $p \in M$ به طور تصویری تخت باشد. خمینهٔ

هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد به طور تصویری تخت ∇ را خمینهٔ آفین به طور تصویری تخت می‌نامیم.

تعریف ۱۱. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی n باشد. در این صورت $A \in \otimes^{۴}(V^{\star})$ را یک تانسور خمیدگی جبری روی V گوییم هرگاه A در تقارن‌های تانسور خمیدگی و اتحاد اول بیانچی

$$A(X,Y,Z,W) = -A(Y,X,Z,W) = A(Z,W,X,Y) \qquad (۲.۱)$$

$$A(X,Y,Z,W) + A(Y,Z,X,W) + A(Z,X,Y,W) = ۰$$

صدق می‌کند. $\Re(V) \subset \otimes^{۴}(V^{\star})$ فضای تمام چنین ۴ − تانسورهایی می‌باشد.

تعریف ۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد. فرض کنید $A \in \Re(V)$ و ρ تانسور ریچی وابسته به A باشد. $\sigma(\rho)(X,Y)Z \in \Re(V)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\sigma(\rho)(X,Y,Z,W) \quad &:= \quad \frac{۱}{n-۲}\{\rho(X,W)\langle Y,Z\rangle + \langle X,W\rangle\rho(Y,Z)\}\\ &- \quad \frac{۱}{n-۲}\{\rho(X,Z)\langle Y,W\rangle + \langle X,Z\rangle\rho(Y,W)\}\\ &- \quad \frac{\tau}{(n-۱)(n-۲)}\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}.\end{aligned}$$

در این صورت تانسور خمیدگی همدیس وایل عبارتست از تصویر A در $ker\rho$، که آن را با W نشان می‌دهیم و به صورت $W := A - \sigma\rho \in ker\rho$ تعریف می‌شود. مدل خمیدگی $m = (V, \langle.,.\rangle, A)$ یا خمینهٔ شبه‌ریمانی $\mathcal{M} := (M,g)$ را به طور همدیس تخت گوییم اگر و تنها اگر $W = ۰$ باشد.

تعریف ۱۳ . تانسور خمیدگی جبری آفین $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(V)$ را تخت گوییم اگر و تنها اگر $\mathcal{A} = \circ$؛ یعنی هم به طور تصویری تخت باشد و هم ریچی تخت باشد. مشابهاً التصاق تاب آزاد ∇ روی خمینهٔ M را تخت گوییم هرگاه به ازاء هر $p \in M$ $\mathcal{R}_p = \circ$. خمینهٔ هموار M مجهز به التصاق تاب آزاد تخت ∇ را خمینهٔ تخت می‌نامیم.

تعریف ۱۴ . فرض کنید $(V, \langle.,.\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی مثبت معین با بعد متناهی $\mathsf{2}n$ باشد. فرض کنید $J : V \to V$ به طوریکه $J^{\mathsf{2}} = -id$ و $J^\star\langle.,.\rangle = \langle.,.\rangle$، که آن را یک ساختار هرمیتی روی V گوییم. اگر $A \in \Re(V) \subset \otimes^{\mathsf{4}} V^\star$ یک تانسور خمیدگی جبری باشد، آنگاه $\zeta := (V, \langle.,.\rangle, J, A)$ را یک مدل خمیدگی هرمیتی گوییم.

تعریف ۱۵ . فرض کنید $(\tilde{V}, \widetilde{\langle.,.\rangle})$ یک فضای ضرب داخلی (نه لزوماً مثبت معین) با بعد متناهی $\mathsf{2}n$ باشد. فرض کنید $\tilde{J} : \tilde{V} \to \tilde{V}$ به طوریکه $\tilde{J}^{\mathsf{2}} = id$ و $\tilde{J}^\star\widetilde{\langle.,.\rangle} = -\widetilde{\langle.,.\rangle}$، که آن را یک ساختار پاراهرمیتی روی $\tilde{V}$ گوییم. اگر $\tilde{A} \in \Re(\tilde{V}) \subset \otimes^{\mathsf{4}} \tilde{V}^\star$ یک تانسور خمیدگی جبری باشد، آنگاه $\tilde{\zeta} := (\tilde{V}, \widetilde{\langle.,.\rangle}, \tilde{J}, \tilde{A})$ را یک مدل خمیدگی پاراهرمیتی گوییم.

۱—۳ مدل هندسی تانسور خمیدگی

تعریف ۱۶ . یک متریک ریمانی روی یک خمینهٔ هموار M عبارتست از یک میدان $(\circ, \mathsf{2})$ — تانسور $g \in \mathcal{X}^{\mathsf{2}}(M)$ که اولاً متقارن است $(g(X,Y) = g(Y,X))$ دوماً مثبت معین می‌باشد $(g(X,X) > \circ \quad if \quad X \neq \circ)$. بنابراین یک متریک ریمانی یک ضرب داخلی روی هر فضای T_pM مشخص می‌کند. یک خمینهٔ هموار همراه با متریک ریمانی را یک خمینهٔ ریمانی گوییم.

تعریف ۱۷. فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی و $p \in M$ باشد. فرض کنید $\{e_i\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $T_p(M)$ نسبت به متر g و $\varepsilon_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ و (ε^{ij}) ماتریس وارون آن باشد. در این صورت تانسور ریچی یا خمیدگی ریچی عبارتست از میدان $(۰,۲)$ — تانسور کواریان ρ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(X,Y) := Tr\{Z \to R(Z,X)Y\} \qquad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$$

نمایش ρ در پایهٔ $\{e_i\}$ به صورت زیر بدست می آید

$$\rho(X,Y) := \varepsilon^{ij} R(e_i, X, Y, e_j)$$

تعریف ۱۸. فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی و $p \in M$ و $\{e_i\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $T_p(M)$ نسبت به متر g باشد. فرض کنید $\varepsilon_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ و (ε^{ij}) ماتریس وارون آن باشد. خمیدگی اسکالر τ برای M در نقطهٔ p به صورت

$$\tau(e_i, e_j) := \varepsilon^{ij} \rho(e_i, e_j)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۹. یک متریک شبه‌ریمانی روی یک خمینهٔ هموار M عبارتست از یک میدان (۰.۲) — تانسور متقارن $g \in \mathcal{X}^{۲}(M)$ که ناتبهگون می‌باشد $(g(X,Y) = ۰ \quad \forall Y \in T_pM \Leftrightarrow X = ۰)$. بنابراین یک خمینهٔ هموار همراه با متریک شبه‌ریمانی را یک خمینهٔ شبه‌ریمانی گوییم. فرض کنید $(E_۱, \ldots, E_n)$ یک کنج موضعی برای TM و $(\phi^۱, \ldots, \phi^n)$ هم‌کنج دوگان آن باشد. فرض کنید $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ باشد.

متریک شبه‌ریمانی $g = g_{ij}\phi^i\phi^j$ به طور موضعی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$g = -(\phi^1)^2 - \ldots - (\phi^r)^2 + (\phi^{r+1})^2 + \ldots + (\phi^n)^2$$

به طوریکه عدد صحیح $0 \leq r \leq n$ را اندیس g گوییم.

تعریف ۲۰. فرض کنید (M, g, J) یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی باشد. میدان تانسوری نایژن هاوس وابسته به ساختار هرمیتی J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

$$N(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

فرض کنید $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{J})$ یک خمینهٔ تقریباً پاراهرمیتی باشد. میدان تانسوری نایژن هاوس برای حالت پاراهرمیتی $\tilde{J}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{\tilde{J}}(X, Y) := [X, Y] - \tilde{J}[\tilde{J}X, Y] - \tilde{J}[X, \tilde{J}Y] + [\tilde{J}X, \tilde{J}Y]$$

قضیه ۱. [۱۸] ساختار تقریباً هرمیتی J روی خمینهٔ M، انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $N(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

تعریف ۲۱. فرض کنید (M, g) یک خمینهٔ ریمانی با بعد $2n$ و J یک تانسور از نوع $(1, 1)$ روی M چنان باشد که $J^\star g = g$ و در هر نقطهٔ $p \in M$ داشته باشیم $J_p^2 = -id$. در این صورت خمینهٔ $\mathcal{M} := (M, g, J)$ یک خمینهٔ تقریباً هرمیتی نامیده می‌شود. خمینهٔ تقریباً هرمیتی $\mathcal{M} := (M, g, J)$ را خمینهٔ هرمیتی گفته می‌شود هرگاه J انتگرال‌پذیر باشد؛ یعنی اگر تانسور نایژن هاوس متحد با صفر باشد. معادلاً مختصات موضعی $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ حول هر نقطه از خمینه موجود باشد به طوریکه

$$J\partial x_i = \partial y_i \qquad , \qquad J\partial y_i = -\partial x_i.$$

فرض کنید $(\tilde{M},\tilde{g})$ یک خمینه شبه‌ریمانی با بعد $۲n$ و $\tilde{J}$ یک تانسور از نوع $(۱,۱)$ روی M چنان باشد که $\tilde{J}^{*}\tilde{g}=-\tilde{g}$ و در هر نقطهٔ $p\in\tilde{M}$ داشته باشیم $\tilde{J}_p^{۲}=id$. در این حالت لزوماً $\tilde{J}$ دارای اندیس طبیعی (n,n) می‌باشد. خمینهٔ $\tilde{\mathcal{M}}:=(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{J})$ یک خمینهٔ تقریباً پاراهرمیتی نامیده می‌شود. خمینه تقریباً پاراهرمیتی $\tilde{\mathcal{M}}:=(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{J})$ را خمینهٔ پاراهرمیتی گفته می‌شود هرگاه $\tilde{J}$ انتگرال‌پذیر باشد؛ یعنی اگر تانسور نایژن هاوس وابسته به ساختار پاراهرمیتی $\tilde{J}$، $N_{\tilde{J}}$ متحد با صفر باشد. معادلاً مختصات موضعی $(x_۱,\ldots,x_n,y_۱,\ldots,y_n)$ حول هر نقطه از $\tilde{M}$ موجود باشد به طوریکه

$$\tilde{J}\partial x_i=\partial y_i \quad , \quad \tilde{J}\partial y_i=\partial x_i$$

تعریف ۲۲. یک عنصر حجم روی یک فضای ضرب اسکالر n — بعدی عبارتست از یک تابع ω که حجم متوازی السطوح مشخص شده با n بردار $(x_۱,\ldots,x_n)$ —به عنوان اضلاع متوازی السطوح— می‌باشد.
یک عنصر حجم روی یک خمینه ریمانی (شبه‌ریمانی) M عبارتست از n — فرم هموار ω که به ازای هر $p\in M$ داشته باشیم، $\omega(e_۱,\ldots,e_n)=\pm ۱$ که در آن $\{e_۱,\ldots,e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای T_pM می‌باشد.

لم ۱. [۲۰] روی دامنهٔ $\mathcal{U}$ از یک دستگاه مختصاتی ξ (نقشهٔ $(\mathcal{U},\xi)$ روی M)، یک عنصر حجم ω_ξ وجود دارد به طوریکه

$$\omega_\xi(\partial_۱\ldots\partial_n)=\sqrt{det(g_{ij})}dx^۱\wedge\ldots\wedge dx^n$$

مثال ۱.

۱ — فرم $adx+bdy+cdz$ در $\mathbb{R}^۳$ به یک بردار $V=(v_۱,v_۲,v_۳)$ اثر می‌کنند و