دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد آمار بیمه

محاسبه حق‌بیمه باورمند تحت تابع زیان توان‌دوم خطای متعادل موزون

نگارنده

حسین نبی‌زاده

استاد راهنما

دکتر امیر تیمور پاینده نجف‌آبادی

استاد مشاور

دکترمحمد ذکایی

اردیبهشت ۱۳۸۸

تقدیم به

عالِم بی‌همتا،

مادر بزرگوارم

و همه کسانی که دوستشان دارم.

قدردانی و تشکر

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر امیر تیمور پاینده نجف‌آبادی که زحمت راهنمایی این رساله را پذیرفته و بدون شک انجام مراحل مختلف این رساله بدون راهنمایی‌های گرانبها و تلاش‌های ارزندهٔ ایشان ممکن نبود، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد ذکایی که مشاورهٔ این رساله را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر گنجعلی و جناب آقای دکتر پارسیان که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

و در انتها از کلیه عزیزان و دوستانی که بنده را در انجام این رساله همراهی نمودند صمیمانه کمال تشکر را دارم.

چکیده

روش معمول برای محاسبه حق بیمه باورمندی، استفاده از تابع زیان توان دوم خطا و محاسبه حق بیمه بیزی است. در این پایان‌نامه دو راهکار جدید برای محاسبه حق‌بیمه باورمندی ارائه شده است، به عبارت دیگر دو تابع زیان متفاوت با قابلیت‌های مختلف را در نظر گرفته و حق‌بیمه باورمندی را تحت آنها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

همچنین در این پایان‌نامهِ چگونگی تقریب حق‌بیمه باورمندی، بصورت خطی، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در انتها با ارائه یک مثال واقعی، چگونگی استفاده از نتایج بدست آمده را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: تابع زیان، حق‌بیمه باورمندی، حق‌بیمه خالص، حق‌بیمه اِشر، توزیع تقریب آزاد .

پیشگفتار

در حال حاضر در تمام دنیا یکی از مسائل مهم در مورد حق بیمه این است که حق بیمه بر اساس زیان‌ها و خسارت‌های گذشته محاسبه شود، تا بیمه‌گر و بیمه‌گذار هیچکدام متضرر نشوند. چون در شرکت‌های بیمه‌ای، تا قرارداد بیمه‌نامه به پایان نرسد معلوم نمی‌شود که شرکت بیمه چه روندی داشته است، در علم آمار بیمه، آمار و اطلاعات و تجربیات گذشته و زیان‌هایی که در گذشته اتفاق افتاده است نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در اوایل قرن بیستم توسط موبری (۱۹۱۴) نظریه ای تحت عنوان نظریه باورمندی وارد علم آمار بیمه شد. ابتدا باورمندی در جنگ جهانی اول برای تعدیل حق‌بیمه کارگران مورد بررسی قرار گرفت. بطور کلی باورمندی حاصل کار بیمه‌آمار شناس‌های آمریکای شمالی است که ریشه در نظریه مخاطره و برآوردهای آماری دارد.

اولین بار با ارائه دو مقاله توسط بولمن (۱۹٦۷) و بولمن و استراب (۱۹۷۰) روش بیزی وارد علم آمار بیمه شد که در آنجا به محاسبه حق‌بیمه باورمندی بیزی پرداخته شد. البته افراد دیگری مانند، مایرسون (۱۹٦۴) و هرزاگ (۱۹۹۴) و کلاگمن (۱۹۹۲) در رابطه با دیدگاه بیزی نظریه باورمندی مطالبی را ارائه داده‌اند و همچنین باورمندی را تحت حق‌بیمه اِشر بیان نمودند.

در ادامه هلمن (۱۹۸۹) بیشتر حق‌بیمه‌های باورمندی را تحت نظریه تصمیم آماری از نقطه نظر بیزی و با استفاده از تابع زیان توان‌دوم خطای موزون که بصورت $L_۱(\delta,\theta) = h(\theta)(\theta-\delta)^۲$ است، و جفت‌های درستنمایی و توزیع‌های پیشین (که در علم آمار بیمه به نام تابع ساختار شناخته شده است)، بدست آورده بود. در این فرمول با استفاده از شکل‌های تابعی مختلف $h(\theta)$، اصول حق‌بیمه مختلف خواهیم داشت. برای مثال با $h(\theta) = ۱$ اصل حق‌بیمه خالص را داریم، و با $h(\theta) = e^{c\theta}$ اصل حق‌بیمه اِشر را خواهیم داشت.

هرگاه حق‌بیمه محاسبه شده تحت خانواده توزیع‌های نمایی به عنوان درستنمایی و پیشین مزدوج آن، با حق‌بیمه محاسبه شده باورمندی برابر شود در این حالت حق‌بیمه باورمندی دقیق را داریم، که پرومیسلو (۲۰۰۰) به بیان این موضوع پرداخته بود.

موقعی که حق باورمندی دقیق داریم، حق‌بیمه بیزی را می توان به عنوان یک فرمول باورمندی بصورت زیر بیان نمود:

$$P_B^{L_۱} = Z(t)g(\bar{x}) + (۱ - Z(t))P_C^{L_۱}$$

که در آن $P_B^{L_۱}$ حق‌بیمه بیزی، و $P_C^{L_۱}$ حق‌بیمه تجمعی تحت تابع زیان توان دوم خطای موزون است، و $g(\bar{x})$ تابعی از داده‌های مشاهده شده است.

جعفری و همکاران (۲۰۰۶) بر روی برآورد تحت توابع زیان متعادل موزون بحث کردند. گومز (۲۰۰۷) به بررسی تعمیم قضیه باورمندی تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون پرداخت.

در این پایان‌نامه حق‌بیمه‌های باورمندی را تحت تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون تعمیم می‌دهیم، این تابع زیان را جعفری و همکاران (۲۰۰۶) بصورت زیر معرفی

کردند:

$$L_{۲}(\delta,\theta) = wh(\theta)(\delta_{۰}(x) - \delta)^{۲} + (۱ - w)h(\theta)(\theta - \delta)^{۲}$$

که در آن $۰ \leq w \leq ۱$ عامل وزن داده شده است و $h(\theta)$ تابع وزنی مثبت و $\delta_{۰}(x)$ یک تابع از داده‌های مشاهده‌شده است.

در ادامه این پایان‌نامه روابط فوق را تحت تابع زیان متعادل موزون آنتروپی بیان کرده و گزاره‌هایی را هم در این زمینه بیان می‌کنیم. همچنین یک کاربرد عملی برای یکی از گزاره‌های بیان شده را تحت داده‌های باربری بیان می‌کنیم (که موارد اخیر کار جدید نویسنده این پایان‌نامه است).

توابع زیان متعادل موزون حالت تعمیم‌یافته توابع زیان موزون است، بطوریکه وقتی w به سمت صفر میل می‌کند، توابع زیان متعادل موزون به حالت توابع زیان موزون تبدیل می‌شود، که باتوجه به رابطه اخیر کاملاً مشهود است. همچنین در این پایان‌نامه با استفاده از تابع زیان توان دوم خطای متعادل موزون، یک تعمیم از بیان باورمندی تحت تقریب خطی را بدست می‌آوریم.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

فصل ۱

پیش نیازهای لازم

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی از پیش‌نیازهای لازم را که در این پایان‌نامه به آنها نیاز است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدای این فصل به معرفی نظریه تصمیم و اجزای اصلی آن پرداخته و به چگونگی اندازه‌گیری میزان دقت یک برآوردگر از دید تابع مخاطره می‌پردازیم و در ادامه به معرفی برخی از توابع زیان و توابع زیان متعادل موزون پرداخته و در انتها در مورد برآوردگر بیزی و چگونگی محاسبه آن بحث خواهیم کرد. مطالب این فصل عمدتاً از مطالب کسلا و برگر (۲۰۰۲)، کسلا و همکاران (۲۰۰۷) و جعفری و همکاران (۲۰۰۶) است.

۲.۱ نظریه تصمیم

۱.۲.۱ مقدمه

در این بخش ابتدا اجزای اصلی یک نظریه تصمیم را معرفی کرده، سپس مولفه‌های اصلی تشکیل دهنده یک نظریه تصمیم را بیان می‌کنیم و سرانجام به معرفی قاعده تصمیم و تابع مخاطره می‌پردازیم.

۲.۲.۱ اجزای اصلی یک نظریه تصمیم

در طول روز ممکن است در مقابل مسائل متفاوتی قرار بگیریم که منجر به تصمیم‌گیری‌های متفاوتی می‌شود. در کل نظریه تصمیم حالتی از مسائل استنباطی از قبیل آزمون فرض، برآورد فاصله‌ای و برآورد نقطه‌ای است. به عنوان مثال آزمون تصادفی با تابع تصمیم زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ۱ & x \in C \\ \gamma & x \in C' \\ ۰ & x \in C'' \end{cases}$$

در اینصورت اگر $x \in C$ باشد فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم و اگر $x \in C'$ باشد با احتمال γ فرض $H_۰$ را رد می‌کنیم و اگر $x \in C''$ باشد فرض $H_۰$ را می‌پذیریم. در نتیجه هر کدام از گزینه‌ها یک نوع تصمیم می‌باشد که فرد اتخاذ می‌کند.

در نظریه تصمیم، با استفاده از نمونه آماری و لحاظ کردن جنبه‌های دیگری از قبیل سود، زیان و غیره، معیاری جهت اتخاذ تصمیم بهینه ارائه می‌کنیم. مولفه‌های اصلی تشکیل دهنده یک مسئله تصمیم عبارتند از:

- داده: داده‌ها بصورت یافته‌های یک بردار تصادفی X با فضای نمونه‌ای χ بیان می‌شود.

- فضای پارامتری: مجموعه تمام مقادیر θ را که با Θ نشان می‌دهند، فضای پارامتر گویند.

- مدل: مدل عبارت است از مجموعه توزیع‌های احتمالی ممکن برای $X = x$ که به پارامتر θ وابسته است. یعنی $\{f(\mathrm{x}|\theta); \theta \in \Theta\}$ که در آن $f(\mathrm{x}|\theta)$ تابع احتمال و یا تابع چگالی احتمال روی χ است.

- فضای عمل: بعد از مشاهده $\mathrm{X} = \mathrm{x}$ تصمیمی برای θ اتخاذ می‌شود، مجموعه تمام تصمیم‌های ممکن برای پارامتر θ را فضای عمل می‌گویند و اغلب با نماد A نشان داده می‌شود.

- قاعده تصمیم: از قاعده تصمیم به عنوان راهی برای بکار بردن داده‌ها به عنوان یک کمک در تصمیم‌گیری استفاده می‌شود. در واقع یک قاعده تصمیم نشان می‌دهد که چه عمل $a \in A$ باید با مشاهده $\mathrm{x} \in \chi$ انتخاب شود و آن را با $\delta(x)$ نشان می‌دهند و تابعی از χ به A است.

- تابع زیان: مطالعه ارزیابی بهینه بودن برآوردگرها بر اساس تابع مخاطره، یکی از بحث‌های نظریه تصمیم می‌باشد. اگر $\theta_\circ \in \Theta$ مقدار واقعی پارامتر θ در جامعه باشد، در اینصورت عمل $a \in A$ (که از قاعده تصمیم δ نتیجه شده است) ممکن است درست، نادرست و یا تا اندازه‌ای نادرست باشد. در اینصورت این مقدار درستی یا نادرستی را با تابع زیان، کمی می‌کنیم و میزان نادرستی را با کمیت $L(\theta_\circ, \delta)$ اندازه‌گیری می‌کنیم. و این مقدار زیان ناشی از انجام عمل a در موقعی که $\theta_\circ \in \Theta$ حالت واقعی جامعه باشد، را اندازه می‌گیرد.

مقدار بزرگ $L(\theta_0, \delta)$ نشان می‌دهد که عمل a تا اندازه زیادی نادرست است و مقدار کوچک $L(\theta_0, \delta)$ نشان می‌دهد که عمل a تا اندازه کمی نادرست است و مقدار $L(\theta_0, \delta) = 0$ نشان می‌دهد که اگر $\theta_0 \in \Theta$ مقدار واقعی پارامتر جامعه باشد، آنگاه عمل a کاملاً درست است.

در $L(\theta, \delta)$ اگر عمل نزدیک به θ باشد، آنگاه تصمیم a قابل قبول بوده و زیان کمی را متحمل می‌شویم. اگر تصمیم a از مقدار θ دور باشد، آنگاه زیان بزرگی را متحمل می‌شویم. تابع زیان یک تابع نامنفی است. این تابع عموماً افزایشی است وقتیکه فاصله بین تصمیم a و θ افزایش پیدا می‌کند.

• تابع مخاطره: هنگامی که قاعده تصمیم معلوم $\delta(x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیان حاصل نه تنها به حالت فضای پارامتر بستگی دارد، بلکه به مقدار $X = x$ نیز بستگی دارد. با توجه به اینکه X یک متغیر تصادفی است، $L(\theta, \delta(X))$ نیز متغیری تصادفی است. کمیتی که در تصمیم‌گیری‌های مربوط به زیان تصادفی در نظر گرفته می‌شود، متوسط مقدار این متغیر تصادفی است که تابع مخاطره نامیده می‌شود و بصورت $R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(X))]$ تعریف می‌شود. مجموعه تمام قواعد ممکن δ را که در آن برای هر $\theta \in \Theta$، $R(\theta, \delta) < \infty$ را با D نشان می‌دهیم.

۳.۲.۱ روشهای بهینه‌سازی

همانطور که گفتیم، در مسائل تصمیم‌گیری درباره پارامتر θ بر اساس قاعده تصمیم $\delta(x)$، میزان دقت قاعده تصمیم بر اساس تابع مخاطره متناظر با آن اندازه‌گیری می‌شود. در تحلیل‌های تصمیم، قواعد تصمیم به کمک توابع مخاطره آنها مقایسه می‌شود. و بدین علت که مقدار θ

نامعلوم است، اغلب مایلیم قاعده تصمیمی که $R(\theta,\delta)$ را برای تمام $\theta \in \Theta$ حداقل کند را به کار ببریم. اما همیشه این امر ممکن نیست، یعنی نمی‌توان δای را پیدا کرد که $R(\theta,\delta)$ را برای تمام $\theta \in \Theta$ حداقل کند. به عنوان مثال برای توابع مخاطره $R(\theta,\delta_1)$ و $R(\theta,\delta_2)$ ممکن است به ازای بعضی مقادیر θ، $R(\theta,\delta_2) < R(\theta,\delta_1)$ و برای سایر مقادیر θ، $R(\theta,\delta_2) > R(\theta,\delta_1)$ باشد، و لذا در حالت کلی پیدا کردن بهترین برآوردگر δ امکان پذیر نیست. بنابراین باید محدودیت‌هایی را بر روی فضای قواعد تصمیم برای دستیابی به تصمیم بهینه اعمال کنیم. برای یافتن تصمیم‌های بهینه به دو روش متداول، محدودکردن قواعد تصمیم و مرتب‌کردن توابع تصمیم می‌توان اشاره کرد.

در روش محدودکردن قواعد تصمیم، با محدودکردن کلاس قواعد تصمیم، می‌توان امیدوار بود که بهترین قاعده تصمیم را در این کلاس کوچکتر پیدا کرد. محدودیت‌های متداول عبارتند از نااریبی و پایایی که برای برآورد δ اعمال می‌شوند.

در مرتب‌کردن قواعد تصمیم، بجای محدودکردن کلاس توابع تصمیم ابتدا برآوردگرها را تحت یک قانون معین مرتب کرده، سپس برآوردگر مطلوب را انتخاب می‌کنیم.

دو روش مرتب‌کردن قواعد تصمیم، روش بیزی و روش مینیماکس است که در زیر به معرفی آنها می‌پردازیم.

تصمیم بیزی: در آمار کلاسیک، پارامتر θ عبارت است از یک مقدار ثابت و نامعلوم، که با استفاده از نمونه تصادفی X_1، ...، X_n از جامعه‌ای با توزیع $f(x|\theta)$ در مورد آن تصمیم‌گیری می‌کنیم. اما در آمار بیزی θ مقدار مشاهده شده یک متغیر تصادفی است، و برای آن توزیع احتمال تحت عنوان توزیع پیشین در نظر گرفته می‌شود که حاوی اطلاعات قبلی یا حدس آزمایشگر (قبل از هر گونه نمونه‌گیری) است. در اینصورت فرض می‌کنیم

$\pi(\theta)$ تابع توزیع احتمالی θ در فضای پارامتری Θ باشد. در اینصورت $R(\theta,\delta)$ یک متغیر تصادفی است، امید تابع مخاطره تحت توزیع پیشین $\pi(\theta)$ را مخاطره بیزی گویند و بصورت $r(\pi,\delta)=E\left(R\left(\Theta,\delta\right)\right)$ نشان می‌دهند. همچنین قاعده بیزی نسبت به توزیع پیشین π یک قاعده تصمیم $\delta_\pi(x)$ است که مخاطره بیزی را بین تمام قواعد تصمیم ممکن حداقل می‌کند. یعنی قاعده بیزی یک قاعده تصمیمی است که در رابطه زیر صدق کند:

$$r\left(\pi,\delta_\pi\right)=\inf_{\delta\in D} r\left(\pi,\delta\right) .$$

تصمیم مینیماکس: در قسمت قبل تصمیم‌های بیزی را از طریق مینیمم کردن مخاطره بیزی بدست آوردیم. در روش بیزی اطلاعات مخاطره را در یک عدد به نام مخاطره بیزی خلاصه کردیم و تصمیم‌ها بوسیله مقایسه مقادیر این اعداد حاصل می‌شود. روش دیگر برای پیدا کردن یک تصمیم بهینه این است که از روش مینیماکس استفاده کنیم.

تعریف: قاعده تصمیم $\delta_m\in D$ را قاعده تصمیم مینیماکس گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$\underset{\theta\in\Theta}{sup}\, R\left(\theta,\delta_m\right)=\inf_{\delta\in D}\underset{\theta\in\Theta}{sup}\, R\left(\theta,\delta\right) .$$

در واقع در روش مینیماکس به هر عمل بر اساس آنکه با انجام دادن آن عمل بدترین حالت اتفاق بیافتد، مقداری نسبت داده می‌شود. یعنی شخص برای هر عمل a، ماکزیمم مخاطره را روی حالت گوناگون جامعه معین می‌کند و این کار ترتیبی در میان عمل‌ها فراهم می‌کند. شخص عمل aای را که برای آن زیان ماکزیمم، کمترین باشد را انتخاب می‌کند. در واقع مینیماکس قاعده‌ای است که در بدترین حالت برای $R(\theta,\delta)$ نسبت به θ، بهترین تصمیم را اتخاذ می‌کند.

تصمیم‌های مینیماکس رابطه نزدیک با تصمیم‌های بیزی دارند؛ بدین ترتیب که تصمیم