بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به عباس (ع)

این یادگار علی (ع)

برای روزهای تنهایی حسین (ع)

تقدیر و سپاس

سپاس خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت

براینجانب فرض است کـه از کلیـه‌ی اسـاتید بزرگـوار در طـول دوره‌ی تحصـیل خـود، خاصـه اسـاتید دوره کارشناسی ارشد که در طی این سال‌ها مرا درتحصیل علم، معرفت و فضائل اخلاقـی یـاری نمودنـد تقـدیر و سپاسگزاری نمایم.

به‌ویژه لازم می دانم مراتب امتنان و سپاسگزاری خویش را نسبت به استاد گرامی و مبرّز جناب آقـای دکتـر رضا جهانی‌نژاد که هدایت اینجانب را در روند تحقیق، تتبّع و تدوین این پایان‌نامه پذیرفتـه و مـرا راهنمـایی نمودند ابراز دارم. همچنین از جناب آقای دکتر حسن دقیق به عنوان داور داخلی و جناب آقای دکتـر فرهـاد رحمتی به عنوان داور خارجی که زحمت مطالعه‌ی این پایان‌نامه را تقبّل و در جلسه‌ی دفاع شرکت نموده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مهدی کولیوند

بهمن ماه 1388

دانشگاه کاشان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی (گرایش جبر)

عنوان:

مطالعه ایده‌آل‌های مدرج در حلقه‌های مدرج

استاد راهنما:

دکتر رضا جهانی نژاد

به‌وسیله:

مهدی کولیوند

بهمن ماه 88

University of Kashan

Faculty of Science

Department of Mathematics

Thesis:

For Deqree of Master of Science (MSc)

In Mathematics (Algebra)

Title:

On Graded Ideals in Graded Rings

Svpervisor:

Dr. Reza Jahaninezhad

By:

Mahdi Koulivand

January 2010

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعه حلقه‌های G-مدرج و مدول‌های مدرج پرداخته شده و ویژگی‌های ایده‌آل‌های مدرج در یک حلقه G-مدرج بررسی شده است. سپس ایده‌آل‌های G-ابتدایی از یک حلقه G-مدرج مطالعه شده و ویژگی‌های G-تجزیه ابتدایی از یک ایده‌آل مدرج بررسی می‌شود. با معرفی ایده‌آل‌های G-ضربی، بعضی ویژگی‌های این ایده‌آل‌ها در یک حلقه G-مدرج مطالعه شده و در ادامه هنگامی که P یک ایده‌آل G-اول G-ضربی از حلقه G-مدرج R است، مجموعه ایده‌آل‌های P-ابتدایی مدرج از R مشخص می‌شود. سپس ویژگی‌های QGR-حلقه‌ها بررسی شده و مشخصه‌ای برای QGR-حلقه‌های G-نوتری به‌دست می‌آید. در آخر زیرمدول‌های G-اول و G-ابتدایی از یک R-مدول مدرج مطالعه شده و برخی ویژگی‌های مرتبط با این رده از زیرمدول‌ها بررسی شده است.

کلمات کلیدی: حلقه مدرج، ایده‌آل مدرج، مدول مدرج، ایده‌آل G-ضربی، QGR-حلقه

مقدمه

حلقه‌های مدرج نقش بسیار مهمی در جبر جابجایی ایفا می‌کنند. در این بین حلقه‌های ضربی مدرج از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پایان‌نامه به بررسی رده‌های مهمی از حلقه‌ها چون حلقه‌های مدرج، حلقه‌های ضربی مدرج و $Q-$حلقه‌های مدرج می‌پردازیم.

با توجه به این که ایده‌آل مهمترین زیرساختار از حلقه‌های جابجایی است، لذا انواع خاصی از ایده‌آل‌ها مانند ایده‌آل‌های مدرج و ایده‌آل‌های ضربی مدرج را معرفی می‌کنیم. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه حلقه ضربی مدرج، $Q-$حلقه مدرج و ایده‌آل ضربی مدرج را به ترتیب با نماد حلقه $G-$ضربی، $QGR-$حلقه و ایده‌آل $G-$ضربی به کار می‌بریم.

افرادی چون **ناستاسسکو**[۱] و **وان اویاستاین**[۲] در [۹] به بررسی و مطالعه حلقه‌های مدرج پرداخته‌اند. در سال ۱۹۲۵، **کرول**[۳] مفهوم حلقه ضربی را به عنوان توسیعی از دامنه‌های ددکیند معرفی کرد. سپس در سال ۱۹۸۱، **برنارد**[۴] در [۵] نماد جدیدی از مدول‌های ضربی را تعریف کرد. **اندرسون**[۵] برای نخستین بار در [۱] حلقه‌های نوتری که هر ایده‌آل آن حاصل ضربی از ایده‌آل‌های ابتدایی می‌باشد (تحت عنوان $Q-$حلقه‌های نوتری) را مورد بررسی و مطالعه قرار داد. اندرسون نشان داد که هر ایده‌آل در یک حلقه نوتری حاصل ضرب ایده‌آل‌های ابتدایی می‌باشد اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول غیر ماکسیمال آن یک ایده‌آل ضربی باشد. سپس

[۱] C. Nastasescu

[۲] F. Van Oyastaeyen

[۳] W. Krull

[۴] A. Barnard

[۵] D. D. Anderson

اندرسون و **ماهانی**[۶] در [۲]، Q–حلقه‌ها را در حالت کلی بررسی کردند. در این پایان‌نامه این مفاهیم را در حالت مدرج مطالعه و بررسی می‌کنیم.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول که مقدمه‌ای بر فصل‌های بعدی است مفهوم حلقه G–مدرج را بیان کرده و ضمن تعریف ایده‌آل مدرج از یک حلقه G–مدرج به بررسی این رده از ایده‌آل‌ها در حلقه‌های G–مدرج می‌پردازیم. سپس R–مدول مدرج را تعریف کرده و با بیان مفهوم زیرمدول مدرج از یک R–مدول مدرج برخی از ویژگی‌های این رده از R–مدول‌ها را به دست می‌آوریم.

فصل دوم مشتمل بر دو بخش است. بخش اول را به معرفی ایده‌آل‌های G–ابتدایی در یک حلقه G–مدرج اختصاص داده و نشان می‌دهیم که ایده‌آل مدرج I از حلقه G–مدرج R یک ایده‌آل G–ابتدایی است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ حلقه صفر نباشد و هر مفسوم علیه صفر همگن از حلقه $\frac{R}{I}$ پوچتوان باشد. همچنین ثابت می‌کنیم که اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های G–ابتدایی باز هم یک ایده‌آل G–ابتدایی است. در بخش دوم حلقه G–نوتری را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که R یک حلقه G–نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل مدرج آن G–متناهی تولید شده باشد. در ادامه مفهوم G–تجزیه ابتدایی از یک ایده‌آل مدرج را مطالعه و بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر ایده‌آل مدرج سره از یک حلقه G–نوتری یک G–تجزیه ابتدایی مینیمال دارد.

فصل سوم مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول مفهوم ایده‌آل G–ضربی از یک حلقه G–مدرج را تعریف می‌کنیم و با استفاده از خاصیت G–موضعی بودن R مشخصه‌ای برای ایده‌آل‌های G–ضربی به دست می‌آوریم. ثابت می‌کنیم که اگر I یک ایده‌آل G–متناهی تولید شده از حلقه G–مدرج R باشد آنگاه I یک ایده‌آل G–ضربی است اگر و تنها اگر I موضعاً G–اصلی باشد. همچنین نشان می‌دهیم که حاصل ضرب ایده‌آل‌های G–ضربی نیز یک ایده‌آل G–ضربی است. در بخش دوم مفاهیمی چون ارتفاع مدرج یک ایده‌آل مدرج و بعد مدرج یک حلقه G–مدرج را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر رادیکال مدرج یک ایده‌آل

[۶] L. A. Mahaney

مدرج $G-$متناهی تولید شده باشد آنگاه آن ایده‌آل شامل توانی از رادیکالش است. در ادامه مجموعه ایده‌آل‌های $P-$ابتدایی مدرج یک حلقه $G-$مدرج R را هنگامی که P یک ایده‌آل $G-$اول $G-$ضربی در R است را به دست می‌آوریم. بخش سوم به معرفی $QGR-$حلقه‌ها اختصاص دارد. مفهوم $QGR-$حلقه را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه $G-$نوتری با $dim^{gr}(R) = ۱$ باشد آنگاه R یک $QGR-$حلقه است. در آخر مهمترین قضیه این فصل را ثابت می‌کنیم، نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه $G-$نوتری باشد آنگاه R یک $QGR-$حلقه است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل $G-$اول در R که $G-$ماکسیمال نیست یک ایده‌آل $G-$ضربی باشد.

نهایتاً فصل چهارم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول مفاهیمی چون $R-$مدول $G-$بدون تاب، زیرمدول $G-$محض و زیرمدول $G-$اول از یک $R-$مدول مدرج را تعریف می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آن‌ها در $R-$مدول‌های مدرج می‌پردازیم. در بخش دوم مفهوم زیرمدول $G-$ابتدایی از یک $R-$مدول مدرج را مطالعه می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های این رده از زیرمدول‌ها را به دست می‌آوریم.

فصل ۱

حلقه‌ها و مدول‌های مدرج

در این فصل رده‌ای خاص از حلقه‌ها را تحت عنوان حلقه‌های G−مدرج معرفی کرده و با تعریف ایده‌آل مدرج از یک حلقه G−مدرج بعضی از ویژگی‌های این رده از حلقه‌ها را ثابت می‌کنیم. سپس با معرفی مدول‌های مدرج برخی ویژگی‌های آن‌ها را بدست می‌آوریم. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار هستند و $1 \neq 0$.

تعریف ۱.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و G یک گروه آبلی با عضو همانی e باشد. در این صورت R یک حلقه G−مدرج نامیده می‌شود اگر خانواده $\{R_g : g \in G\}$ از زیرگروه‌های جمعی R وجود داشته باشد به طوری که

الف) $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$

ب) برای هر $g, h \in G$، $R_g R_h \subseteq R_{gh}$

برای یک گروه آبلی دلخواه G حلقه G−مدرج R با نماد (R, G) نمایش داده می‌شود. برای سادگی (R, G) را با R نمایش می‌دهیم. فرض کنید $h(R) = \bigcup_{g\in G} R_g$. در این صورت هر عنصر $h(R)$ را همگن می‌نامیم. اگر برای یک $g \in G$، $x \in R_g$، آنگاه x را یک عنصر همگن از درجه g می‌نامیم و آن را با $degx = g$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in R$، آنگاه x را می‌توان به طور منحصر

به فردی به صورت $\sum\limits_{g\in G} x_g$ نوشت که x_g مولفه‌ای از x در R_g است. توجه می‌کنیم که این مجموع متناهی است، یعنی همه بجز تعداد متناهی از x_gها صفر هستند.

گزاره ۲.۱ فرض کنید $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$ یک حلقه G–مدرج باشد. در این صورت R_e یک زیرحلقه R است و $1 \in R_e$. به‌علاوه برای هر عنصر $g \in G$، زیرگروه R_g یک R_e–مدول است.

اثبات. بنابر فرض R_e یک زیرگروه جمعی R است. به‌علاوه بنا بر بند (ب) از تعریف ۱.۱،

$$R_eR_e \subseteq R_{ee} = R_e$$

لذا R_e نسبت به عمل ضرب نیز بسته می‌باشد. برای دیدن این که $1 \in R_e$ می‌نویسیم $\sum\limits_{h\in G} x_h = 1$ که برای هر $h \in G$، $x_h \in R_h$ و همه بجز تعداد متناهی از x_h ها صفر هستند. برای هر $g \in G$،

$$x_g = x_g.1 = \sum_{h\in G} x_g x_h$$

با توجه به یکتایی نمایش و اینکه $x_g \in R_g$ نتیجه می‌شود که برای هر $e \neq h \in G$، $x_g x_h = 0$ و لذا $x_g = x_g x_e$. به خصوص برای هر $e \neq h \in G$، $x_e x_h = 0$. بنابراین

$$x_e = x_e.1 = \sum_{g\in G} x_e x_h = x_e x_e$$

پس $x_e x_e = x_e$ و برای هر $e \neq g \in G$، $x_e x_g = 0$. لذا برای هر $g \neq e$، $x_g = 0$. پس $1 = x_e \in R_g$. عبارت آخر نیز از این واقعیت که $R_eR_g \subseteq R_g$ نتیجه می‌شود. $\square$

هر حلقه R را می‌توان با در نظر گرفتن $R_e = R$ و $R_g = 0$ برای هر $e \neq g \in G$ به صورت یک حلقه G–مدرج بیان کرد. چنین حلقه‌ای را حلقه G–مدرج بدیهی می‌گویند.

گزاره ۳.۱ فرض کنید $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$ یک حلقه G–مدرج باشد و r یک عنصر وارون‌پذیر همگن از R باشد. در این صورت r^{-1} نیز یک عنصر همگن از R است.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $U(R)$ مجموعه همه عناصر وارون‌پذیر R باشد و فرض می‌کنیم $r \in U(R) \cap R_h$. اگر $r^{-1} = \sum_{g \in G} (r^{-1})_g$ که برای هر $g \in G$، $(r^{-1})_g \in R_g$، آنگاه داریم

$$1 = rr^{-1} = \sum_{g \in G} r(r^{-1})_g$$

چون $1 \in R_e$ و $r(r^{-1})_g \in R_{gh}$، پس برای هر $g \neq h^{-1}$، $r(r^{-1})_g = 0$. چون $r \in U(R)$، برای هر $g \neq h^{-1}$، $(r^{-1})_g \neq 0$. بنابراین $r^{-1} = (r^{-1})_{g^{-1}} \in R_{g^{-1}}$. □

تعریف ۴.۱ فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه G–مدرج R باشد. در این صورت I یک ایده‌آل مدرج از حلقه R نامیده می‌شود هرگاه $I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g) = \bigoplus_{g \in G} I_g$. به وضوح برای هر ایده‌آل I از R، $\bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g) \subseteq I$. از اینرو برای این که ثابت کنیم I یک ایده‌آل مدرج است کافی است ثابت کنیم $I \subseteq \bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g)$. در حالت خاص، اگر I یک ایده‌آل مدرج تولید شده توسط یک عنصر همگن باشد، آنگاه I یک ایده‌آل G–اصلی نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱ فرض کنید A یک حلقه باشد. در این صورت حلقه چند جمله‌ای $R = A[X]$ یک حلقه $\mathbb{Z}$–مدرج است. زیرا برای هر $i \geq 0$، $R_i = \{ax^i \mid a \in A\}$ و برای هر $i < 0$، $R_i = 0$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی R است و $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$.

مثال ۶.۱ فرض کنید A یک حلقه و $X_1, ..., X_n$ مجهول‌هایی روی A باشند. در این صورت $R = A[X_1, ..., X_n]$ یک حلقه $\mathbb{Z}$–مدرج است که

$$R_i = \{ \sum_{a_{i_1, ..., i_n} \in A} a_{i_1 ... i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n} \mid i_1 + ... i_n = i \}$$

باید توجه کنیم که $R_0 = A$ و برای هر i، $degX_i = 1$.

مثال ۷.۱ فرض کنید A یک حلقه و $R = A[X, X^{-1}]$ حلقه چند جمله‌ای لورانت با مجهول X باشد. یک عنصر از R به شکل $\sum_{i \geq m} a_i x^i$ است که $m \in \mathbb{Z}$ و تعداد متناهی از a_iها ناصفر می‌باشد. در این صورت R یک حلقه $\mathbb{Z}$–مدرج است که برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$R_i = \{aX^i \mid a \in A\}.$$

گزاره ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه $G-$مدرج و I و J ایده‌آل‌های مدرج از R باشند. در این صورت $I+J$، IJ، $I\cap J$ و $(I:_R J)$ ایده‌آل‌هایی مدرج از R هستند.

اثبات. بنابر توضیح قبل کافی است نشان دهیم

$$I+J\subseteq\bigoplus_{g\in G}((I+J)\cap R_g)$$

فرض می‌کنیم $x\in I+J$. در این صورت $x=a+b$ که $a\in I$ و $b\in J$. از طرفی چون I و J مدرج هستند لذا

$$a\in I=\bigoplus_{g\in G}(I\cap R_g)$$

و

$$b\in J=\bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$$

بنابراین a و b دارای نمایش‌هایی یکتا به صورت $a=\sum\limits_{g\in G}a_g$ و $b=\sum\limits_{g\in G}b_g$ می‌باشند به طوری که برای هر $g\in G$، $a_g\in I\cap R_g$ و $b_g\in J\cap R_g$. در این صورت برای هر $g\in G$،

$$\begin{aligned} a_g+b_g &\in (I\cap R_g)+(J\cap R_g)\\ &\subseteq (I+J)\cap R_g\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} x &= a+b\\ &= \sum_{g\in G}a_g+\sum_{g\in G}b_g\\ &= \sum_{g\in G}(a_g+b_g)\\ &\in \bigoplus_{g\in G}((I+J)\cap R_g)\end{aligned}$$

به طور مشابه ثابت می‌کنیم $IJ\subseteq\bigoplus\limits_{g\in G}((IJ)\cap R_g)$. فرض می‌کنیم $a\in I$ و $b\in J$. چون I و J مدرج هستند، لذا a و b دارای نمایش‌هایی یکتا به صورت $a=\sum\limits_{g\in G}a_g$ و $b=\sum\limits_{h\in G}b_h$

می‌باشند که برای هر $g,h \in G$، $a_g \in I \cap R_g$ و $b_h \in J \cap R_h$. حال چون هر عضو IJ به صورت مجموع عناصر ab است، لذا

$$\begin{aligned} ab &= \sum_{g,h \in G} a_g b_h \\ &\in \bigoplus_{g,h \in G} ((IJ) \cap R_{gh}) \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم $I \cap J \subseteq \bigoplus_{g \in G} ((I \cap J) \cap R_g)$. فرض می‌کنیم $x \in I \cap J$. در این صورت

$$x \in I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g)$$

لذا x دارای نمایشی یکتا به صورت $x = \sum_{g \in G} a_g$ می‌باشد که برای هر $g \in G$، $a_g \in I \cap R_g$. به طور مشابه چون

$$x \in J = \bigoplus_{g \in G} (J \cap R_g)$$

لذا x دارای نمایشی یکتا به صورت $x = \sum_{g \in G} b_g$ می‌باشد که برای هر $g \in G$، $b_g \in J \cap R_g$. بنابر یکتایی نمایش در R، برای هر $g \in G$ داریم

$$a_g = b_g \in (I \cap J) \cap R_g$$

و لذا

$$x = \sum_{g \in G} a_g \in \bigoplus_{g \in G} ((I \cap J) \cap R_g)$$

حال نشان می‌دهیم $(I :_R J)$ یک ایده‌آل مدرج حلقه G-مدرج R است. فرض می‌کنیم $x = \sum_{g \in G} x_g \in (I :_R J)$. در این صورت به ازای هر $y_h \in J \cap h(R)$ داریم $xy_h \in I$. بنابراین $xy_h = \sum_{g,h \in G} x_g y_h$. چون I مدرج است پس برای هر $g,h \in h(R)$، $x_g y_h \in I$. در نتیجه $x_g \in (I :_R J)$. لذا $x = \sum_{g \in G} x_g \in (I :_R J)$. □

گزاره ۹.۱ فرض کنید R یک حلقه $G-$مدرج و $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های مدرج R باشد. در این صورت $\sum\limits_{i\in\Lambda} I_i$ یک ایده‌آل مدرج از R است.

اثبات. کافی است نشان دهیم $\sum\limits_{i\in\Lambda} I_i \subseteq \bigoplus\limits_{g\in G}((\sum\limits_{i\in\Lambda} I_i)\cap R_g)$. فرض می‌کنیم $x\in \sum\limits_{i\in\Lambda} I_i$. در این صورت x دارای نمایشی به صورت $x=\sum\limits_{i\in\Lambda} x_i$ است که برای هر $i\in\Lambda$، $x_i\in I_i$. چون طبق فرض I_i مدرج است، لذا

$$x_i\in I_i=\bigoplus_{g\in G}(I_i\cap R_g)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i\in\Lambda} x_i \\ &\in \sum_{i\in\Lambda}(\bigoplus_{g\in G}(I_i\cap R_g)) \\ &= \bigoplus_{g\in G}((\sum_{i\in\Lambda} I_i)\cap R_g) \end{aligned}$$

□

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $R=\bigoplus\limits_{g\in G} R_g$ و $R'=\bigoplus\limits_{g\in G} R'_g$ دو حلقه $G-$مدرج باشند. در این صورت همریختی حلقه‌ای $\eta: R\longrightarrow R'$ یک $G-$همریختی نامیده می‌شود هرگاه $\eta(۱_R)=۱_{R'}$ و برای هر $g\in G$، $\eta(R_g)\subseteq R'_g$.

گزاره ۱۱.۱ فرض کنید $R=\bigoplus\limits_{g\in G} R_g$ و $S=\bigoplus\limits_{g\in G} S_g$ دو حلقه $G-$مدرج و $f: R\longrightarrow S$ یک $G-$همریختی باشد. در این صورت $Kerf$ یک ایده‌آل مدرج از R است.

اثبات. باید نشان دهیم $Kerf=\bigoplus\limits_{g\in G}(Kerf\cap R_g)$. فرض می‌کنیم $x\in Kerf$. در این صورت x دارای نمایشی یکتا به صورت $x=\sum\limits_{g\in G} x_g$ می‌باشد که در آن برای هر $g\in G$، $x_g\in R_g$. لذا

$$\begin{aligned} ۰ &= f(x) \\ &= \sum_{g\in G} f(x_g) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه برای هر $g \in G$، $f(x_g) \in S_g$ و یکتایی نمایش عناصر نتیجه می‌شود، برای هر $g \in G$، $f(x_g) = 0$. لذا برای هر $g \in G$، $x_g \in Kerf$. بنابراین برای هر $g \in G$، $x_g \in Kerf \cap R_g$ و در نتیجه

$$x = \sum_{g \in G} x_g \in \bigoplus_{g \in G} (Kerf \cap R_g)$$

و اثبات تمام است. $\square$

گزاره ۱۲.۱ فرض کنید $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ و $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ دو حلقه G-مدرج و $f : R \longrightarrow S$ یک G-همریختی پوشا باشد. در این صورت اگر I یک ایده‌آل مدرج از R باشد آنگاه $f(I)$ یک ایده‌آل مدرج از S است.

اثبات. کافی است نشان دهیم $f(I) \subseteq \bigoplus_{g \in G} (f(I) \cap S_g)$. فرض می‌کنیم $x \in f(I)$ عنصر دلخواهی باشد. در این صورت $a \in I$ وجود دارد که $x = f(a)$. چون طبق فرض I یک ایده‌آل مدرج از R است، لذا

$$a \in I = \bigoplus_{g \in G} (I \cap R_g)$$

در این صورت a دارای نمایشی یکتا به صورت $a = \sum_{g \in G} a_g$ است که برای هر $g \in G$، $a_g \in I \cap R_g$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(a_g) &\in f(I \cap R_g) \\ &\subseteq f(I) \cap f(R_g) \\ &\subseteq f(I) \cap S_g \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ &= f(\sum_{g \in G} a_g) \\ &= \sum_{g \in G} f(a_g) \\ &\subseteq \bigoplus_{g \in G} (f(I) \cap S_g) \end{aligned}$$

بنابراین

$$f(I) \subseteq \bigoplus_{g\in G}(f(I)\cap S_g)$$

$\square$

گزاره ۱۳.۱ فرض کنید $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های مدرج حلقه $G-$مدرج R باشد به طوری که یک زنجیر را تشکیل دهند. در این صورت $\bigcup\limits_{i\in\Lambda} I_i$ نیز ایده‌آلی مدرج است.

اثبات. فرض می‌کنیم $J=\bigcup\limits_{i\in\Lambda} I_i$. به وضوح J زیرمجموعه‌ای ناتهی از R است و به ازای هر $a\in J$ و $r\in R$، $ra\in J$. فرض می‌کنیم $a,b\in J$. در این صورت ایده‌آل‌هایی مدرج چون $I_1,I_2\in\Lambda$ وجود دارند که $a\in I_1$ و $b\in I_2$. چون ایده‌آل‌های متعلق به Λ یک زنجیر تشکیل می‌دهند پس Λ نسبت به رابطه شمول کلاً مرتب است. بدون کاستن از کلیت اثبات فرض می‌کنیم $I_1\subseteq I_2$. لذا $a+b$ متعلق به I_2 می‌باشد. در نتیجه J یک ایده‌آل R است.

حال نشان می‌دهیم $J\subseteq \bigoplus\limits_{g\in G}(J\cap R_g)$. فرض می‌کنیم $x\in J$. در این صورت $j\in\Lambda$ وجود دارد که $x\in I_j$. طبق فرض I_j مدرج است، لذا

$$x\in I_j=\bigoplus_{g\in G}(I_j\cap R_g)$$

در این صورت x دارای نمایشی یکتا به صورت $x=\sum\limits_{g\in G}x_g$ می‌باشد که برای هر $g\in G$، $x_g\in I_j\cap R_g$. بنابراین برای هر $g\in G$، $x_g\in(\bigcup\limits_{i\in\Lambda} I_i)\cap R_g=J\cap R_g$. در نتیجه

$$x=\sum_{g\in G}x_g\in\bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$$

بنابراین

$$J=\bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$$

$\square$

گزاره ۱۴.۱ فرض کنید $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های مدرج حلقه $G-$مدرج R باشد. در این صورت $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} I_i$ نیز ایده‌آلی مدرج است.

اثبات. فرض می‌کنیم $J = \bigcap_{i\in\Lambda} I_i$. به وضوح J یک ایده‌آل R است. کافی است نشان دهیم $J \subseteq \bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$. فرض می‌کنیم $x \in J$. در این صورت برای هر $i \in \Lambda$، $x \in I_i$. طبق فرض I_i مدرج است، لذا برای هر $i \in \Lambda$،

$$x \in I_i = \bigoplus_{g\in G}(I_i \cap R_g)$$

در این صورت x دارای نمایشی یکتا به صورت $x = \sum_{g\in G} x_g$ می‌باشد که برای هر $g \in G$ و هر $i \in \Lambda$، $x_g \in I_i \cap R_g$. بنابراین برای هر $g \in G$،

$$x_g \in (\bigcap_{i\in\Lambda} I_i) \cap R_g = J \cap R_g$$

لذا

$$x = \sum_{g\in G} x_g \in \bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$$

در نتیجه

$$J = \bigoplus_{g\in G}(J\cap R_g)$$

□

گزاره ۱۵.۱ فرض کنید $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ یک حلقه $G-$مدرج و I یک ایده‌آل مدرج از R باشد. در این صورت حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ نیز یک حلقه $G-$مدرج است. در واقع $\frac{R}{I} = \bigoplus_{g\in G}(\frac{R}{I})_g$ که

$$(\frac{R}{I})_g = \{x + I : x \in R_g\}$$

اثبات. به وضوح $\{(\frac{R}{I})_g\}_g$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های جمعی $\frac{R}{I}$ است، زیرا برای هر $g \in G$،

$$(\frac{R}{I})_g = \frac{R_g + I}{I}$$