دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش تبدیل دیفرانسیلی برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری

استاد راهنما

دکتر ابوالفضل تاری‌مرزآباد

استاد مشاور

دکتر مرتضی رحمانی

پژوهشگر

مهسا امینی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: امینی　　　　　　　　نام: مهسا

عنوان: روش تبدیل دیفرانسیلی برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری

استاد راهنما: دکتر ابوالفضل تاری‌مرزآباد

استاد مشاور: دکتر مرتضی رحمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: شاهد　　　　دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱　　تعداد صفحات: ۱۰۴

واژگان کلیدی: روش تبدیل دیفرانسیلی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری،مشتق کسری کپوتو

چکیده

-

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.
تقدیم به خانواده عزیزم و همسرم که در تمام مسیر همراه و مشوقم بود.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر ابوالفضل تاری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر مرتضی رحمانی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان از خانواده‌ی عزیزم که راهنمایی هایشان همواره روشنی بخش راه زندگیم بود کمال تشکر و قدر دانی را دارم و از خداوند متعال برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت را دارم.

چکیده

معادلات دیفرانسیل کسری ابزار مناسبی برای مدل‌سازی مسائل فیزیکی دنیای واقعی می‌باشند، اما بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری دارای جواب تحلیلی دقیق نمی‌باشند و بنابراین روش‌های تقریبی توسعه یافته‌اند.

در این پایان‌نامه، ما یکی از این روش ها را معرفی می‌کنیم. ابتدا معادلات انتگرال ولترا با هسته جدایی‌پذیر توسط روش تبدیل دیفرانسیلی حل شده‌اند. جواب تقریبی این معادله به آسانی به فرم یک سری محاسبه می‌شود [۲۹].

سپس یک تعمیم از روش تبدیل دیفرانسیلی یک بعدی که کاربرد این روش را در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توسعه می‌دهد بیان می‌کنیم. این روش بر پایه فرمول تیلور تعمیم یافته و مشتق کسری کپوتو می‌باشد [۳۰].

در پایان روش تبدیل دیفرانسیلی کسری را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا و معادلات انتگرال-دیفرانسیل با شرایط مرزی غیر موضعی بکار می‌بریم [۳۵، ۳۹].

واژه‌های کلیدی: روش تبدیل دیفرانسیلی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری، مشتق کسری کپوتو، فرمول تیلور تعمیم یافته

فهرست مطالب

لیست جداول

پیشگفتار

ریاضیات این امکان را فراهم ساخت تا بتوان با مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی، تا حدودی طبیعت را تحت سلطه درآورد. در همه موارد نمی‌توان با استفاده از معادلات دیفرانسیل غیرخطی با شرایط اولیه و مرزی، مسائل فیزیکی را مدل‌سازی کرد و حالاتی وجود دارد که این معادلات در مدل‌سازی آن ناتوان هستند و معادلات دیفرانسیل کسری ابزار خوبی را برای مدل‌سازی بعضی از این پدیده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهد و از این‌رو پیدا کردن جواب‌های دقیق و یا تقریبی برای معادلات دیفرانسیل کسری بسیار حائز اهمیت است. به‌جز مواردی محدود پیدا کردن جواب‌های تحلیلی برای این معادلات مشکل است. همچنین بیشتر معادلات دیفرانسیل کسری جواب‌های تحلیلی دقیقی ندارند، بنابراین روش‌های عددی و تقریبی به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. روش‌های عددی به دلیل نیاز زیاد به حافظه کامپیوتری و نیاز به گرد کردن خطاها دارای اشکالاتی می‌باشند. از این رو روش‌های جدیدی برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری ابداع گردید که تقریب خوبی از جواب دقیق را دارا می‌باشند. از جمله روش‌های مورد استفاده می‌توان به روش هموتوپی [۷]، تکرار تغییراتی [۸]، روش تبدیل تفاضلی [۹] و ... اشاره کرد.

در این پایان‌نامه روش تبدیل دیفرانسیل را بیان می‌کنیم که در این روش جواب معادله به‌صورت یک سری در نظر گرفته می‌شود.

در فصل اول از این پایان‌نامه به‌طور مختصر به بیان تعریف و انواع معادلات انتگرال می‌پردازیم و سپس از آنجا که بیان روش‌های حل معادلات دیفرانسیل کسری نیازمند تعاریف و مفاهیم ریاضی می‌باشد، لذا بیان پیدایش محاسبات کسری و تعاریف انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری کسری و ارتباط این تعاریف و ذکر قضایایی در این زمینه و همچنین قضیه‌ای برای اثبات وجود و یکتایی جواب‌های معادله دیفرانسیل کسری مطرح می‌گردد.

در فصل دوم، ابتدا به بیان روش تبدیل دیفرانسیلی و کاربرد این روش در حل معادلات انتگرال ولترا با هسته جدایی‌پذیر می‌پردازیم و سپس تعمیمی از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل کسری بر مبنای مرجع [۳۰] معرفی می‌شود.

در فصل سوم، روش تبدیل دیفرانسیل کسری را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری ولترا به‌کار می‌بریم [۳۵].
در فصل چهارم تعمیم روش تبدیل دیفرانسیل کسری برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری با شرایط مرزی غیرموضعی بیان می‌شود [۳۹].

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به‌صورت مختصر به معرفی معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل کسری و بعضی تعاریف آنها که در فصل‌های بعدی این پایان نامه از آنها استفاده نموده‌ایم می‌پردازیم.

۲.۱ معادلات انتگرال

در این بخش به معرفی معادلات انتگرال و انواع آن می‌پردازیم که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به مرجع [۱] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۲.۱. معادله‌ای که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد معادله انتگرال نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. به معادلاتی که تابع مجهول $u(x)$ و مشتق‌هایش به صورت خطی ظاهر شوند، معادلات انتگرال خطی می‌گویند و در غیر اینصورت معادله انتگرال را غیرخطی می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. اگر تابع مجهول معادله، تابعی یک متغیره باشد معادله را معادله انتگرال یک بعدی گویند ولی اگر تابع مجهول معادله، تابعی چند متغیره باشد معادله را یک معادله انتگرال چند بعدی می‌نامند.

متداول ترین معادلات انتگرال خطی را می‌توان در چهار گروه تقسیم بندی نمود.

۱. معادلات انتگرال فردهلم

۲. معادلات انتگرال ولترا
۳. معادلات انتگرال-دیفرانسیل
۴. معادلات انتگرال منفرد

۱.۲.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

یک معادله انتگرال به فرم

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۱.۱}$$

را یک معادله انتگرال خطی فردهلم از نوع اول ومعادله‌ی

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۲.۱}$$

را یک معادله انتگرال خطی فردهلم از نوع دوم گویند.
معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال فردهلم هستند.

$$u(x) = x + \int_۰^۱ xtu(t)dt$$

$$u(x) = ۱ + \frac{x}{۴}x + \int_۰^۱ \frac{۱}{x+t}u(t)dt$$

۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

یک معادله انتگرال به فرم

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۳.۱}$$

را یک معادله انتگرال خطی ولترا از نوع اول ومعادله‌ی

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۴.۱}$$

را یک معادله انتگرال خطی ولترا از نوع دوم گویند. توجه کنید که در معادلات انتگرال فردهلم کران بالا و پایین انتگرال می‌تواند هر عدد ثابتی باشد اما در معادلات انتگرال ولترا اینطور نیست.
معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال ولترا هستند.

$$u(x) = ۱ + x^۲ + \int_۰^x (x-t)u(t)dt.$$

$$u(x) = e^x + \int_۰^x tu^۲(t)dt.$$

۳.۲.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

معادلات انتگرالی را که حداقل یکی از مشتقات تابع مجهول در معادله دیده شود معادلات انتگرال-دیفرانسیل می‌نامند. معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل هستند.

$$u^{'''}(x) = sinx - x + \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} xtu^{'}(t)dt, \quad u(۰) = ۱, u^{'}(۰) = ۰, u^{''}(۰) = -۱$$

$$u^{"}(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - \int_۰^x (x-t)u^۳(t)dt, \quad u(۰) = ۱, u^{'}(۰) = ۰$$

۴.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادلات انتگرال فردهلم و ولترا نوع اول و نوع دوم را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند و یا هسته معادلات انتگرال در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد، معادلات انتگرال منفرد می‌نامند. معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال منفرد هستند.

$$u(x) = ۲x + ۶\int_۰^\infty sin(x-t)u(t)dt$$

$$x^۲ = \int_۰^x \frac{۱}{(x-t)^\alpha}u(t)dt, \quad ۰ < \alpha < ۱$$

۳.۱ معادلات دیفرانسیل کسری

در عصر حاضر تلاش های زیادی در جهت مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی با فرمول‌های ریاضی صورت می‌گیرد، از این رو آشنایی با نحوه‌ی کارکرد سیستم‌های معمولی یا خاص ضروری می‌باشد. برای پی

بردن به چگونگی کارکرد سیستم‌ها و مدل‌سازی پدیده‌ها به مفاهیم ریاضی نیازمندیم که از آن جمله می‌توان به مفهوم مشتق و انتگرال‌گیری اشاره کرد، اما تنها با مشتق و انتگرال‌گیری معمولی نمی‌توان به مطالعه تمام مسائل دنیای واقعی پرداخت. به علت ناکارآمد بودن این مفاهیم، دانشمندان مفهوم جدیدی تحت عنوان محاسبات کسری را مطرح نمودند که البته به نام‌های دیگری همچون حساب دیفرانسیل و انتگرال تعمیم یافته و محاسبات مرتبه دلخواه نیز معروف می‌باشد.
موضوع محاسبات کسری برای نخستین بار حدود ۳۰۰ سال پیش مطرح شد ولی علیرغم تاریخچه طولانی در ریاضیات، برای سال‌ها در پدیده‌های فیزیکی مورد استفاده قرار نگرفت. یکی از مهم‌ترین دلایل برای این امر آن بود که تعریف دقیق و واضحی برای آن موجود نبود و دیگر آن که شرح هندسی آشکاری برای خصوصیات آن نمی‌توان مطرح کرد. اما در ۳۰ سال اخیر ریاضیدانان کاربردهای بین رشته‌ای را به صورت زیبا و جامعی با استفاده از مشتقات کسری مدل‌سازی کردند و از این رو محاسبات کسری مورد توجه فراوان قرار گرفت.
در واقع محاسبات کسری شاخه‌ای از آنالیز ریاضی می‌باشد که وجود اعداد حقیقی یا مختلط را در عملگرهای مشتق و انتگرال مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهد. با استفاده از نما می‌توان بسیاری از پدیده‌های طبیعی را با فرمول‌های ریاضی بیان کرد اما این فرمول‌ها هنگامی که توان‌ها غیرصحیح یا مختلط هستند بسیار پیچیده می‌شود. ممکن است هر شخص بتواند مفهوم $x^2 = x.x$ را مورد بررسی قرار دهد اما چگونه می‌توان مفهوم فیزیکی $x^{\frac{2}{3}}$ یا مفهوم جبری x^{π} را شرح داد [۴].
مفهوم محاسبات کسری در سال ۱۶۹۵ با مطرح شدن یک سوال اساسی به وجود آمد که هوپیتال [1] نامه‌ای به لایب‌نیتز [2] نوشت مبنی بر این که $\frac{d^n y}{dx^n}$ وقتی $n = \frac{1}{2}$ است چگونه توجیه می‌شود؟ و لایب‌نیتز در پاسخ، رابطه نزدیک مشتقات و سری‌های نامتناهی(واگرا) را مطرح کرد و نوشت: "اگرچه سری‌های واگرا و هندسه رابطه دوری با هم دارند، در سری‌های واگرا تنها مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توان‌های کسری را نداشته‌ایم و این یک تناقض آشکار است و روزی افق‌های تازه‌ای را پیش روی ریاضیدانان قرار خواهد داد".
در سال ۱۸۱۹ لاکروکس [3] در کتاب هفتصد صفحه‌ای خود، دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبه دلخواه اختصاص داد. او با استفاده از تابع ساده $y = x^m$ که m عدد صحیح و مثبتی می‌باشد، مشتق مرتبه n ام را به‌صورت زیر بسط داد[۲، ۶، ۱۷]

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geqslant n$$

[1] Hopital [2] Libniz [3] Licroix

با استفاده از تعریف تابع گاما می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

تعریف ۱.۳.۱. یکی از توابع اساسی حساب کسری، تابع گامای اویلر است که تعمیمی از تابع $n!$ است و این امکان را فراهم می کند که n مقادیر غیر صحیح وحتی مختلط را بپذیرد. تابع گاما $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (5.1)$$

یافتن مقادیر $\Gamma(x)$ برای $1 < x < 2$ با محاسبه انتگرال به‌طور مستقیم کار غیرممکنی است، به همین دلیل مقادیر تابع گاما را معمولا با روش‌های عددی به‌دست می‌آورند. جدول زیر مقادیر تابع گاما را به ازای مقادیر مختلف نشان می‌دهد.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
۱.۰۰	۱.۰۰	۱.۵۰	۰.۸۸۶۲۳
۱.۰۱	۰.۹۹۴۳۳	۱.۵۵	۰.۸۸۸۸۷
۱.۰۵	۰.۹۷۳۵	۱.۶۰	۰.۸۹۳۵۲
۱.۱۰	۰.۹۵۱۳۵	۱.۶۵	۰.۹۰۰۱۲
۱.۱۵	۰.۹۳۳۰۴	۱.۷۰	۰.۹۰۸۶۴
۱.۲۰	۰.۹۱۸۱۷	۱.۷۵	۰.۹۱۹۰۶
۱.۲۵	۰.۹۰۶۴	۱.۸۰	۰۹۳۱۳۸
۱.۳۰	۰.۸۹۷۴۷	۱.۸۵	۰.۹۴۵۶۱
۱.۳۵	۰.۸۹۰۱۸	۱.۹۰	۰.۹۶۱۷۷
۱.۴۰	۰.۸۸۷۲۶	۱.۹۵	۰.۹۷۹۸۸
۱.۴۵	۰.۸۸۵۶۶	۲	۱

جدول ۱.۱: مقادیر تابع گاما

تعریف ۲.۳.۱. برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad (6.1)$$

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ باشد. آنگاه*

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

و بنابراین

$$\int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1} dt = x^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

انتگرال اول به انتگرال اویلر نوع اول یا تابع بتا اویلر معروف است.

اگر در معادله فوق $y=x$ و $n=\frac{۱}{۲}$ را قرار دهیم، داریم:

$$\frac{d^{\frac{۱}{۲}}y}{dx^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\Gamma(۲)}{\Gamma(۱-\frac{۱}{۲}+۱)}x^{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\Gamma(\frac{۳}{۲})}\sqrt{x}=۲\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

در سال ۱۸۲۳ آبل [۴] اولین کاربرد محاسبات کسری را در مسائل فیزیکی (مساله تعیین یک منحنی به قسمی که اگر جسمی تحت تاثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطه شروع حرکت باشد) ارائه داد که به‌صورت زیر بود

$$k=\int_{\circ}^{x}(x-t)^{\alpha}f(t)dt$$

معادله فوق با $\alpha=-\frac{۱}{۲}$ امروزه به معادله انتگرال آبل معروف است.
پس از آن دانشمندان بسیاری همچون لیوویل [۵] در سال ۱۸۲۳، ریمان [۶] در سال ۱۸۴۷، گرر [۷] در سال ۱۸۵۹، هولم‌گرن [۸] در سال ۱۸۶۵، گران‌والد [۹] در سال ۱۸۶۷، لتنیکو [۱۰] در سال ۱۸۶۸، سونین [۱۱] در سال ۱۸۶۹، لایورنت [۱۲] در سال ۱۸۸۴، نکراسو [۱۳] در سال ۱۸۸۸، کراگ [۱۴] در سال ۱۸۹۰، ویل [۱۵] در سال ۱۹۱۷، هوی ساید [۱۶] در سال ۱۸۹۲، جانت [۱۷] در سال ۱۹۳۶، راس [۱۸] در سال ۱۹۷۴، کنت میلر [۱۹] در سال ۱۹۹۳، کولوانکار [۲۰] در سال ۱۹۹۷، هیلفر [۲۱] در سال ۲۰۰۰ و غیره به مطالعه در زمینه محاسبات کسری و کاربردهای آن پرداختند [۲، ۵].
در واقع با ارائه تعاریف و قضایای مشتق و انتگرال کسری، کاربردهای محاسبات کسری در زمینه‌های مختلف علوم به اثبات رسید و از آن جمله می‌توان به عبور جریان سیالات، علم جریان و تغییر شکل ماده، فرایندهای دینامیکی، فرایندهای سیگنال و نوری، شیمی فیزیک، زنگ زدگی در الکتروشیمی اشاره کرد[۵].

۱.۳.۱ کاربرد فیزیکی

برای نشان دادن کاربردهای فیزیکی محاسبات کسری مبحثی در فیزیک را بیان و کاربرد این مطلب را در آن بررسی می‌کنیم [۱۰]. فرمول استرینگ [۲۲] به‌صورت زیر می‌باشد [۱۱]

$$S=mc\int ds \tag{۷.۱}$$

و

$$ds=\sqrt{c^{۲}dt^{۲}-dx^{۲}-dy^{۲}-dz^{۲}}=c\sqrt{۱-\frac{u^{۲}}{c^{۲}}}dt$$

[۴] Abel [۵] Liouville [۶] Rimann [۷] Greer [۸] Holmgren [۹] Grunwald [۱۰] Letnikov [۱۱] Sonin
[۱۲] Lourent [۱۳] Nekrassov [۱۴] Krug [۱۵] Wayl [۱۶] Heaviside [۱۷] Gemant [۱۸] Ross [۱۹] Miller
[۲۰] Kolwankar [۲۱] Hilfer [۲۲] String

و

$$u = \frac{dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}}{dt^{۲}}$$

از کاربردهای مهم فرمول استرینگ معادله حرکت آزاد است که با فرض پیوسته بودن زمان و مکان به‌صورت زیر می‌باشد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mu}{\sqrt{۱ - \frac{u^{۲}}{c^{۲}}}}\right) = ۰ \quad (۸.۱)$$

اما فاصله بین دو نقطه را، هنگامی که مکان ناپیوسته است نمی‌توان با فرمول فوق بیان کرد.
اگر صفحه‌ای با ساختار پرمنفذ را در نظر بگیریم، کوتاهترین مسیر بین دو نقطه یک خط راست نیست و داریم:

$$ds_E = kds^D$$

که ds_E فاصله واقعی بین دو نقطه است که خط ناپیوسته می‌باشد، ds خط فاصل بین دو نقطه(خط پیوسته)، D بعد پرمنفذ و k یک ثابت است. فرمول حرکت در این فضای ناپیوسته، با استفاده از محاسبات کسری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = mc\int ds_E = \int mc^{۱+D}k(۱ - \frac{u^{۲}}{c^{۲}})^{\frac{D}{۲}}dt^D$$

از کاربردهای دیگر محاسبات کسری می‌توان به معادلات گرما و نوسان آهنگ اشاره کرد.

۲.۳.۱ تعاریف و قضایای کسری

بطور کلی راه‌های گوناگونی برای تعمیم مشتق‌گیری کسری وجود دارد که از آن جمله مشتق کسری ریمان-لیوویل ، مشتق کسری جراندوالد-لتنیکوف[۲۳] و مشتق گیری کسری کپوتو[۲۴] می‌باشد [۱۴].
مشتق گیری کسری ریمان-لیوویل بیشتر مورد استفاده ریاضیدانان است و چون نیازمند شرایط اولیه کسری می‌باشد که هنوز بیان فیزیکی معنی داری ندارد برای مسائل دنیای واقعی مناسب نمی‌باشد.
کاپوتو تعریف دیگری ارائه کرد که دارای این مزیت است که برای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، شرایط اولیه مرتبه صحیح معرفی می‌کند[۱۵]. برخلاف روش ریمان-لیوویل که تعریف آن از انتگرالگیری مکرر ناشی می‌شود، فرمول جراندوالد-لتنیکوف و این روش بیشتر مورد استفاده در الگوریتم‌های عددی

[۲۳] Grunwald-Letnikow [۲۴] Caputo

قرار می‌گیرد [۱۶].
بطورکلی می‌توان گفت که پایه حساب کسری وابسته به حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی می‌باشد و پیدایش انتگرال (یعنی محاسبه مساحت زیر منحنی) قبل از پیدایش مشتق (یعنی شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه) بوده است و این دو موضوع در اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به هم مربوط شده‌اند که در قضیه زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شود*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

آنگاه F دیفرانسیل پذیر است و $F'=f$

بنابراین یک رابطه نزدیک بین عملگرهای دیفرانسیل و عملگرهای انتگرال برقرار است و در واقع مشتق‌گیری عکس فرآیند انتگرال‌گیری می‌باشد، در حالی که انتگرال‌گیری از ۰ تا x معکوس مشتق‌گیری نیست، به عنوان مثال اگر $f(x)=e^x$ در آن صورت $\frac{df}{dx}=f'(x)=f(x)$ ولی

$$\int_{۰}^{x} e^t dt = e^x - ۱ \neq f(x)$$

تذکر ۵.۳.۱. *در اینجا عملگر دیفرانسیل را با $Df(x)$ و عملگر انتگرال را با $Jf(x)$ نشان می‌دهیم.*

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید f تابع ریمان انتگرال پذیر روی $[a,b]$ باشد، آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a\leqslant x\leqslant b$ داریم

$$J_a^n f(x)=\frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^x (x-t)^{n-۱} f(t)dt \tag{۹.۱}$$

این رابطه به فرمول کوشی معروف است [۱۷].

تعریف ۷.۳.۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α برای تابع f بر مبنای فرمول کوشی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$J_a^\alpha f(x)=\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-۱} f(t)dt, \quad \alpha>۰, x>۰ \tag{۱۰.۱}$$

مثال ۸.۳.۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل را حول نقطه صفر برای $f(x)=x^k$ بدست آورید.
حل. فرض می‌کنیم α هر عدد مثبت دلخواهی باشد، از تعریف داده شده در رابطه (۱۰.۱) داریم

$$J^\alpha f(x)=\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{x} (x-t)^{\alpha-۱} t^k dt$$

حال اگر تغییر متغیر $u = \frac{t}{x}$ را اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} u^{k}(1-u)^{\alpha-1} du$$

و داریم [۱۸]

$$\int_{0}^{1} u^{k}(1-u)^{\alpha-1} du = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$J^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} x^{\alpha+k}$$

□

تعریف ۹.۳.۱. مشتق کسری ریمان–لیوویل مرتبه α برای تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود[۱۵، ۱۷].

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(x) &= \frac{d^m}{dx^m}\left[J_a^{m-\alpha} f(x)\right] = D_a^m J_a^{m-\alpha} f \\ m-1 &\leqslant \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

برای $n = 0$ قرار می‌دهیم $D_a^{0} = I$ که I عملگر همانی است.

مثال ۱۰.۳.۱. اگر برای هر x ، $f(x) = 1$ باشد، مشتق $\frac{1}{2}$ ام تابع $f(x)$ را بدست آورید.

حل. داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J^{1/2} f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{x} (x-t)^{-1/2} \cdot 1 dt\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} (x-t)^{-1/2} dt\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}\left(-2(x-t)^{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

نتیجه‌ی غیرمنتظره که به آن رسیدیم این است که مشتق $\frac{1}{2}$ ام تابع ثابت $f(x) = 1$ صفر نیست. □