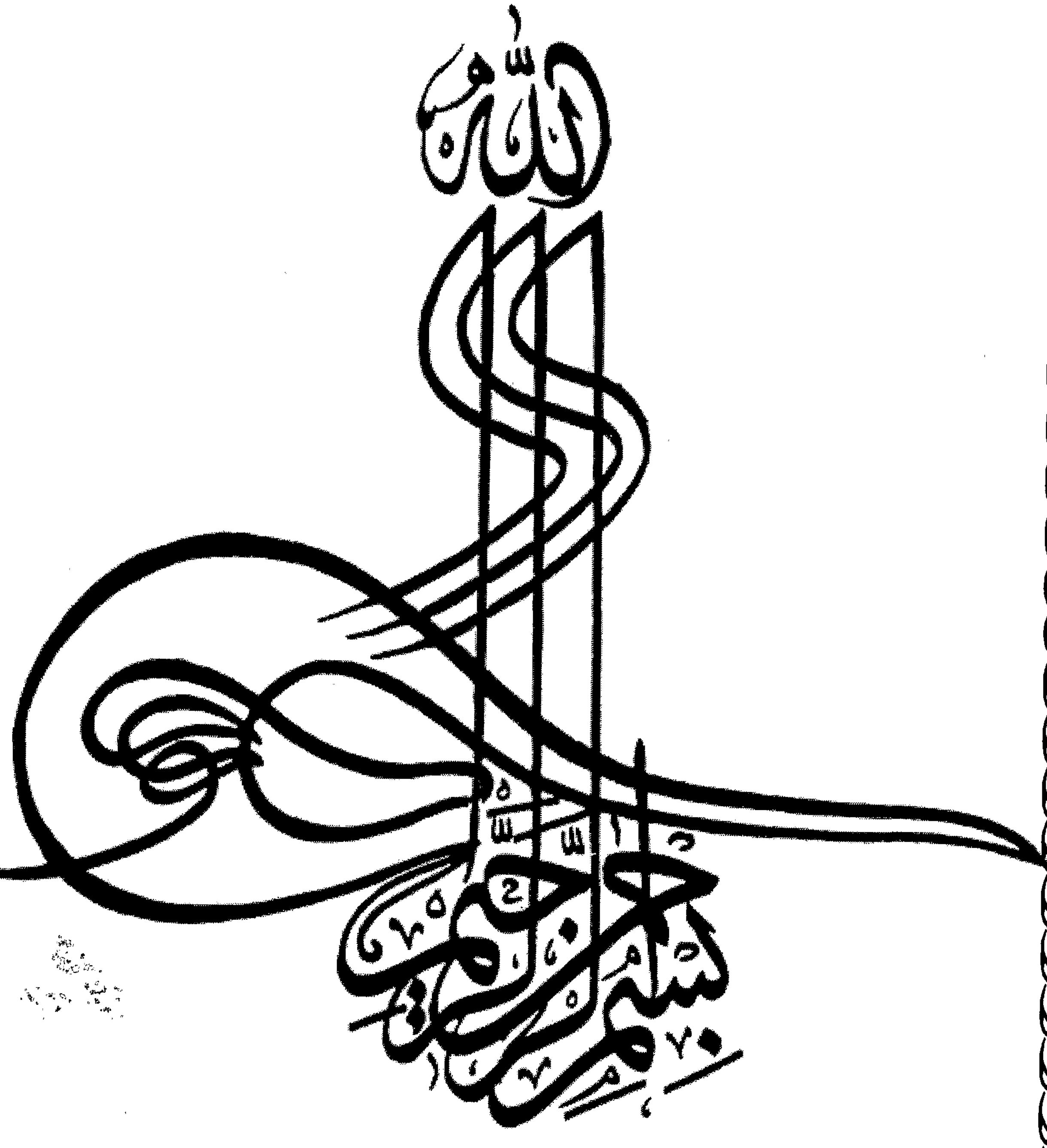
٨٧/١/١٠١٧٦١

٨٧/١٠/٢٢



١٠٧٥٥٨

دانشگاه ولی عصر (عج)

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش آنالیز

عنوان :

گابورهای k– ضربی ، قاب ها و پایه های ریس چند گانه

استاد راهنما :

دکتر محمد علی دهقان

دانشجو :

حمیده آذرمی

اردیبهشت ۸۷

مدیر تحصیلات تکمیلی
دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشدرشته‌ی ریاضی گرایش محض خانم حمیده آذرمی

تحت عنوان:

گابورهای K ضربی قاب‌ها، و پایه‌های ریس چندگانه

در تاریخ ۸۷/۲/۲۶ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی..... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۲- داور خارج از گروه دکتر عطاءا... عسکری‌همت با مرتبه‌ی استادیار امضاء

۳- داور داخل گروه دکتر احمد صفاپور با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج
مطالعات ، ابتکارات ونوآوریهای
ناشی ازتحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه ولی عصررفسنجان است.

سپاسگزاری

سپاس **خدایی** را که اول است بی آنکه قبل از او اولی باشد و آخر است بی آنکه بعد از او آخری باشد . خدایی که چشم بینایان از دیدنش ناتوان و فکر توصیف کنندگان از وصفش عاجز است . به دست قدرتش مخلوقات را آفرید و به خواست خود آنها را صورت بخشید . آنگاه آنها را در مسیر اراده خود قرار داد و در جاده محبت خویش روانه کرد . خلائق توان تأخیرانداختن در قضای او را ندارند و اگر او نخواهد کاری از پیش نمی برند . از برای هر یک روزی مشخصی معین فرمود . روزی هر کس را افزاید کسی یارای کاستن آن را ندارد و روزی آن را که کاست کسی نتواند بیفزاید . سپس مدت زندگی هر یک را تا زمانی مشخص مقرر فرمود و سرانجامش را مدتی محدود معین کرد که ایام عمر در آن بپیماید . زمانیکه عمرش به آخر رسید و پیمانه عمرش لبریز گردید جانش را می ستاند و به سوی آنچه بدان فراخوانده از پاداش فراوان و عذاب دردناک راهی می سازد تا آنان را که بد کردند به اندازه کردار بدشان مجازات کند و آنان را که نیکی کردند به عدالت پاداش دهد . نام هایش پاک و مقدس و نعمتهایش فراوان و پیاپی است . هیچ کس را نرسد که او را در برابر اعمالش بازخواست کند ولی همه را مورد بازخواست قرار می دهد .

می ستایم خدایی را که اگر معرفت ستایش را از بندگانش دریغ می نمود با وجود نعمتهای پی در پی و فراوانش انسانها علیرغم بهرمندی از آنها از او سپاسگزاری نمی کردند و با وجود گشاده دستی سپاسگزارش نبودند و اگر چنین رخ می داد آنها از مرز انسانیت دور شده و به جرگه بهایم می پیوستند و چنان می شد که خدا در کتاب محکمش فرموده : آنان جز به چهارپایان نمانند بلکه از آنان نیز گمراه ترند.

و سپاس خداوند را بر آنچه از ذات پاکش به ما شناساند و شیوه سپاسگزاری الهام فرمود و با پروردگاری خویش درهای دانش را به روی ما گشود و در اخلاص ورزی به یگانگیش رهنمون شد و از کفر و الحاد و تردید در کارش دور ساخت . سپاسی که با آن در میان بندگان شکرگزارش زندگی کنیم و از تمام پیشتازان در جلب رضایت او پیشی گیریم .

پس از آن هزاران هزار گوهر سپاس و احساس را تقدیم استاد گرانقدرم **جناب آقای دکتر دهقان** می نمایم که در راه علم اندوزی ، چراغ هدایتم به دست ایشان بود و به آرامی یاری ام نمودند تا راه را از بیراهه باز شناسم .

همچنین از آقای **دکتر عسکری همت** و آقای **دکتر صفاپور** به خاطر داوری این پایان نامه سپاسگزارم .

نیز تشکر می کنم از **دوستان عزیزم** خانمها : فخروی ، رضایی ، جعفری ، اسمعیل پور، خاکسار، مانیان ، رجایی و آقایان : حسنخانی و قلی زاده که از حمایتهای معنویشان بهره مند شدم .

نیز از برادران عزیزم **حمید** و **حامد** و خواهر مهربانم **مریم** و **والدین** گرامی ام که همواره دلخوشی شان شادی من و دلواپسی شان نگرانی من بوده است ، نهایت قدردانی و سپاس را دارم.

تقدیم به حضرت ولی عصر عج

که همواره انوار نگاهش بر جهانیان پرتو افکنده است

بسمه تعالی

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم قاب را برای فضاهای هیلبرت بیان کرده‌ایم و سپس این مفهوم را به جمع مستقیم k تکراراز فضاهای هیلبرت تعمیم داده و مفاهیم قاب‌های چندگانه و پایه های ریس چندگانه را تولید کرده‌ایم . همچنین ویژگی‌های قاب‌های دوگان و مجموعه‌های متعامد مربوط به آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم .

بعد از آن این مفهوم را به مجموعه‌های ویل — هایزنبرگ گسترش داده‌ایم و قاب‌های ویل —هایزنبرگ چندگانه و پایه‌های ریس ویل — هایزنبرگ چندگانه را معرفی کرده‌ایم . همچنین ارتباط آن‌ها را مورد بررسی قرار داده و نشان داده‌ایم که اصل دوگان در مورد آن‌ها برقرار است .

قاب چندگانه مجموعه‌ای از قاب‌ها را مهیا می‌کند که مجموعه اندیس گذار آن‌ها یکسان است و این مفهوم در مورد سیگنال‌های چند بخشی مورد استفاده قرار می‌گیرد .

در این پایان نامه همچنین مفهوم عملگرهای گابور ضربی را بیان کرده‌ایم و شرایطی را که تحت آن‌ها این عملگرها کران‌دار باشند را مورد بررسی قرار داده‌ایم . با استفاده از این عملگرها به عملگرهای جدیدی دست یافته‌ایم که دنباله حاصل از آن‌ها روی یک شبکه مجزا تحت شرایطی تشکیل یک پایه ریس می‌دهند .

در نهایت این مفهوم را به جمع مستقیم k تکرار از فضای عملگری هیلبرت اشمیت تعمیم داده‌ایم و عملگرهای گابور k ضربی را تولید کرده‌ایم . همچنین شرایطی را بیان کردیم که تحت آن‌ها ، این عملگرها از نوع هیلبرت اشمیت بوده و کران‌دار باشند .

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم قاب بیش از پنجاه و پنج سال پیش توسط دافین[1] و شیفر[2] در مقاله [۱۵] مطرح شد . این مفهوم در نیمه‌های دهه ۸۰ توسط دوبشی[3] و گراسمان [4] و میر[5] در [۱۳] گسترش پیدا کرد . در اواخر دهه ۸۰ موضوع موجک مطرح شد . همچنین نظریه قاب‌ها در همین زمان شناخته شد . خلاصه‌ای از خواص قاب‌های موجکی و مجموعه‌های ویل — هایزنبرگ در این زمان توسط هیل[6] و والنت[7] در [۱۸] آمده است .

شرایط لازم و کافی برای وجود قاب ویل —هایزنبرگ یا قاب موجکی توسط دوبشی در [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفت و بعداً توسط چوی[8] و شی [9] در [۱۰] و [۱۱] باز سازی شد . قاب‌های ویل — هایزنبرگ و پایه‌های ریس ویل — هایزنبرگ مدت کوتاهی است که مورد بررسی قرار گرفته‌اند . برای مثال به مجله آنالیز فوریه و کاربردهای آن[10] شماره چهارم (۱۹۹۵) ، مقاله‌های ([۱۴] و [۲۰] و [۷]) رجوع کنید . نتایج مقاله‌های مطرح شده در مورد ۱ —قاب می‌باشند .

یک ابزار مهم در آنالیز قاب‌های ویل — هایزنبرگ تبدیلات زاک [11]هستند . این

---

[1] R . J. Duffin

[2] A . C . Schaeffer

[3] I.Daubencheis

[4] A . Grossman

[5] Y.Meyer

[6] C . Heil

[7] D.Walnut

[8] C.K.Chui

[9] X.Shi

[10] Fourier Analysis and application

[11] Zak

تبدیلات سال‌ها قبل کشف شده‌اند و آن‌ها را به افراد مختلفی از قبیل (گاوس ، ویل — برایزن ، گلفند ، زاک) نسبت داده‌اند . در این‌جا آن را به زاک نسبت می‌دهیم چرا که او این تبدیلات را به طور منظم و پایه‌ای در فیزیک جامدات در مقالات [۴ و ۲۷ و ۲٦] مورد استفاده قرار داده است .

بعداً توسط بالین[۱۲] این تبدیلات منجر به شکل گیری پایه‌های ریس ویل — هایزنبرگ غیر موضعی در مقاله [٦] شدند .

بررسی دو مسأله تعمیمی برای قاب‌ها قبلاً انجام گرفته است . در اولین تعمیم فضای هیلبرت به فضای باناخ تبدیل شد و قاب‌های باناخ به دست آمدند (به [۹] رجوع کنید) . در دومین تعمیم ، مجموعه اندیس‌گذار ناشمارا قاب‌های پیوسته را تولید کرد . این توسط علی[۱۳] و آنتوان[۱۴] و گزو[۱۵] در[۱] آمده است .

مسأله تعمیمی در این پایان نامه به گونه متفاوتی است . می‌خواهیم در مورد چندگانگی تحقیق کنیم . توجه کنید که قاب‌های اندیس‌گذاری شده با مجموعه اندیس گذار (شمارا) مورد بحث است . همچنین گابورهای ضربی که توسط فیچتینگر[۱٦] و نواک [۱۷] در [۱٦] آمده است راه مناسبی برای بسط عملگرهای هیلبرت اشمیت فراهم می‌کند . که ما این موضوع را تعمیم داده‌ایم تا بتوانیم بسط عملگرهای چندگانه را بیابیم .

ساختار این پایان نامه به صورت زیر است .

---

[۱۲] R.Balian

[۱۳] S.Ali

[۱۴] J. Antoine

[۱۵] J.Gazeau

[۱٦] H.G.Feichtinger

[۱۷] K.Nowak

در فصل اول ، تعاریف مورد استفاده از آنالیز تابعی و آنالیز فوریه را برای ساده‌تر کردن مطالعات آورده‌ایم . لیکن به لحاظ رعایت ایجاز اثبات بسیاری از آن‌ها را ارجاع داده‌ایم .

فصل دوم در سه بخش ارائه شده است . در بخش اول ابتدا به تعریف مفهوم قاب پرداخته‌ایم وسپس برخی قضایای مهم که در بخش دوم بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند ، را بیان کرده‌ایم . عمدتاً اثبات این قضایا آورده شده است .

دربخش دوم به قاب‌های چندگانه پرداخته‌ایم و در مورد دوگان آن‌ها مطالبی آمده و تحت عنوان قضیه‌ای بررسی شده است .

در بخش سوم پایه‌های ریس و تعریف پایه‌های ریس چندگانه آمده است و به طور مشابه قضیه‌ای مطرح و اثبات شده است که شبه دوگان‌های پایه‌های ریس چندگانه را مشخص می‌کند .

فصل سوم در دو بخش ارائه شده است . در بخش اول قاب‌های گابور و دوگان آن ها و ارتباط آن‌ها با پایه‌های ریس گابور آورده شده است . در این بخش بیان شده است که مجموعه دوگان ، ساختار گابوری دارد . در بخش دوم این فصل ، مجموعه‌های گابور چندگانه تعریف شده‌اند . در قضایای این بخش به دنبال شرایط مناسبی برای وجود مجموعه‌های متعامد بوده‌ایم .

فصل چهارم در دو بخش ارائه شده است . در بخش اول گابورهای ضربی معرفی شده‌اند و با استفاده از آن‌ها عملگر P_λ را تعریف کرده ایم و سپس شرطی را بیان کرده‌ایم که مجموعه این عملگرها روی شبکه Λ تشکیل یک پایه ریس بدهند . در بخش دوم این فصل k—شبکه مجزا و گابور k—ضربی معرفی شده‌اند و از روی آن‌ها به یک پایه ریس چندگانه دست یافته‌ایم .

همچنین از این پایان نامه مقاله‌ای با عنوان Gabor k-Multipliers در سمینار آنالیز ریاضی اراک ارائه گردیده است .

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل برآنیم برخی از تعاریف و قضایایی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند را بیاوریم .

۱.۱ فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱

ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط V ، یک تابع $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to C$ است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) به ازای هر $x\in V$، $\langle x,x\rangle \geq 0$ و $\langle x,x\rangle = 0$ اگر وتنها اگر $x=0$.

۲) به ازای هر $x,y\in V$، $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

۳) به ازای هر $x,y,z\in V$ و $\alpha,\beta\in C$، $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

تعریف ۲.۱.۱

به فضای برداری مجهز به ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱

هر فضای ضرب داخلی که توسط متر حاصل از ضرب داخلی، یعنی

$$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}\ ,$$

کامل باشد را فضای هیلبرت [1] گوییم. کامل بودن به‌این‌معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

تعریف ۴.۱.۱

محمل تابع f را که با $supp(f)$ نمایش می‌دهیم بستار مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱

توابع با محمل فشرده: فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ای با طول $1/b$ که $b > 0$ باشد و مجموعه $L^2(I) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : supp(f) \subseteq I\}$ زیر فضای بسته $L^2(\mathbb{R})$ باشد،آن گاه $L^2(I)$ یک فضای هیلبرت با نرم و ضرب داخلی $L^2(\mathbb{R})$ است. به‌علاوه مجموعه نمایی‌های $\{b^{1/2} E_{mb}\chi_I\}_{m\in Z}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(I)$ می‌باشد که در آن $E_{mb} = e^{2\pi imb\cdot}$. بنابراین برای هر $f \in L^2(I)$ داریم $\sum_m |\langle f, E_{mb}\chi_I\rangle|^2 = b^{-1}\int |f(x)|^2 dx$ و $\sum_m \langle f, E_{mb}\chi_I\rangle E_{mb}\chi_I = b^{-1} f$.

[1] Hilbert space

تعریف ۶.۱.۱

X را جدایی پذیر گوییم هرگاه شامل زیر مجموعه چگال شمارش پذیر باشد. فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای پایه متعامد یکه شمارا است اگر وتنها اگر $\mathcal{H}$ جدایی پذیر باشد[۸] .

تعریف ۷.۱.۱

$span\{x_n\}$ در $\mathcal{H}$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی متناهی x_n ها می‌باشد به‌این معنی که ،

$$span\{x_n\} = \{\sum_{n=-N}^{N} c_n x_n; N > 0 \quad, c_n \in C\}.$$

تعریف ۸.۱.۱

دلتای کرونکر که با نماد $\delta_{i,j}$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

است.

تعریف ۹.۱.۱

دنباله $\{x_n\}$ کامل است هر گاه $span\{x_n\}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.

قضیه زیر که شرایط هم‌ارز برای پایه متعامد یکه رابیان می‌کند، از [۲] آورده شده است .

قضیه ۱۰.۱.۱

فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند:

۱) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است.

۲) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$.

۳) برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (اتحاد پارسوال [۲]).

۴) $\overline{span}(\{e_i\}_{i=1}^{\infty}) = \mathcal{H}$.

۵) اگر برای $x \in \mathcal{H}$ و برای هر i، $\langle x, e_i\rangle = 0$ باشد، آن‌گاه $x = 0$.

تعریف ۱۱.۱.۱

[۱۷] عملگر $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک عملگر هیلبرت اشمیت است اگر برای یک پایه متعامد یکه $\{e_n : n \in N\}$ برای $\mathcal{H}$ رابطه $\sum_{n=1}^{\infty} \| Ae_n \|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ برقرار باشد . نرم هیلبرت اشمیت عملگر A به صورت زیر است ،

$$\| A \|_{\mathcal{HS}} = (\sum_{n=1}^{\infty} \| Ae_n \|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

اگر عملگر A یک عملگر انتگرالی با هسته κ باشد یعنی $Af(x) = \int_{R^d} \kappa(x,y) f(y) dy$ ، آن‌گاه A هیلبرت اشمیت است اگر و تنها اگر $\kappa \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ و در این مورد $\| A \|_{\mathcal{HS}} = \| \kappa \|_2$.

۲.۱ عملگرها

تعریف ۱.۲.۱

فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت با نرم‌های $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ و $\| \cdot \|_{\mathcal{K}}$ و ضرب‌های داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ باشند. اگر S عملگر خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ باشد دراین‌صورت ،

---

[۲] Parsval's identity

۱) S را کران‌دار گوییم، هرگاه

$$\|S\| = \sup\{\|Sx\|_{\mathcal{K}} : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\} < \infty,$$

دراین‌صورت $\| S \|$ را نرم تبدیل خطی S می‌نامیم.

۲) الحاقی عملگر S، عملگر یکتای $S^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ است، به طوری‌که به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{K}$ ،

$$\langle Sx, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, S^*y\rangle_{\mathcal{H}},$$

به علاوه $\| S^* \| = \| S \|$.

۳) عملگر خطی و دوسویی S، عملگری یکانی است هرگاه به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$،

$$\langle Sx, Sy\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} .$$

تعریف ۲.۲.۱

فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد. و S و T عملگرهایی خطی روی $\mathcal{H}$ باشند. دراین‌صورت ،

۱) عملگر S خود الحاق [۳] است، اگر $S = S^*$.

۲) عملگر S مثبت است، هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Sx, x\rangle \geq 0$.

۳) $S > T$، اگر $S - T > 0$ باشد.

فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند .

---

[۳] Self-adjoint