دانشگاه تربيت معلم

دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

پايان نامه كارشناسي ارشد

رياضي محض (جبر)

عنوان :

تعمييم هاي از قضيه هاي هال و بئر

تدوين

خديجه علي بابايي

استاد راهنما :

عليرضا جمالي

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد. بر طبق قضیه مشهور شور اگر $|G:Z(G)|$ متناهی باشد آنگاه $|G'|$ متناهی است. بئر این قضیه را به صورت زیر تعمیم داد. به ازای هر عدد طبیعی i، اگر $|G:Z_i(G)|$ متناهی باشد آنگاه $\gamma_{i+1}(G)$ متناهی است. عکس این قضیه عموماً برقرار نیست. ولی هال ثابت کرد که اگر $\gamma_{i+1}(G)$ متناهی باشد آنگاه $|G:Z_{2i}(G)|$ متناهی است. در این پایان نامه ثابت می‌کنیم که نتیجه اخیر با شرط ضعیف‌تری نیز برقرار است. در واقع ثابت می‌کنیم اگر $|\gamma_{i+1}(G):\gamma_{i+1}(G)\cap Z_i(G)|$ متناهی باشد آنگاه $|G:Z_{2i}(G)|$ متناهی است.

در حالتی که G متناهی است، کران بالایی را برای $|G:Z_2(G)|$ بر حسب $|G'|$ و $|G':G'\cap Z(G)|$ به‌دست می‌آوریم. به همین ترتیب در حالتی که G یک گروه پوچتوان و متناهی است کران بالایی را برای رتبه‌ی $G/Z(G)$ بر حسب رتبه‌ی $G'/(G'\cap Z(G))$ به‌دست می‌آوریم. بالاخره در حالتی که G متناهی باشد، نتایج زیر را ثابت می‌کنیم. اگر G گروهی پوچتوان باشد و رتبه‌ی $\gamma_{i+1}(G)$ برابر r باشد آنگاه رتبه‌ی $G/Z_{2i}(G)$ از بالا به تابعی بر حسب i و r، کراندار است. همچنین اگر G متناهی و رتبه‌ی $G/Z_i(G)$ برابر r باشد آنگاه رتبه‌ی $\gamma_{i+1}(G)$ از بالا به تابعی برحسب i و r کراندار است. این دو قضیه شبیه قضیه‌های بئر و هال اند که به جای اندیس رتبه در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: سری‌های مرکزی بالایی و پایینی؛ گروه متناهی در پوچتوان؛ رتبه‌ی گروه؛ p-گروه؛ گروه پوچتوان؛ گروه مستعد؛ تعویضگر مرتبه‌ی بالا؛ قضیه‌های هال و بئر

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰: 20F14، 20D15.

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه باشد. قضیه‌ی کلاسیک شور بیان می کند که اگر $|G:Z(G)|$ متناهی باشد، آنگاه زیرگروه مشتق آن نیز متناهی است. این قضیه بعداً توسط بئر برای هر جمله‌ی سری مرکزی پایینی گروه G تعمیم داده شد. بدین صورت که اگر $|G:Z_i(G)|$ متناهی باشد، آنگاه $\gamma_{i+1}(G)$ نیز متناهی است. در حالت کلی عکس قضیه‌ی بئر برقرار نیست؛ اما هال اثبات کرد که اگر $\gamma_{i+1}(G)$ متناهی باشد، آنگاه $|G:Z_{2i}(G)|$ نیز متناهی است. در فصل دوم این پایان‌نامه نشان می‌دهیم با شرط ضعیف‌تر متناهی بودن $|\gamma_{i+1}(G):\gamma_{i+1}(G)\cap Z(G)|$، نتیجه قضیه هال همچنان برقرار است.
برای اثبات این قضیه از مقاله‌ی زیر استفاده شده است.

[1] M. Morigi, G. Fernandez, Generalizing a theorem of P. Hall on finite-by-nilpotent gorups, *American Mathematical Soiety*, Volume **137**, September 15, 2008.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. کوچکترین عدد طبیعی r را که هر زیرگروه G با r عضو تولید می‌شود رتبه‌ی گروه G نامیم و آن را با نماد $rk(G)$ نمایش می‌دهیم. هال ثابت کرد که $|G:Z_2(G)|$ از بالا برحسب $|G'|$ کراندار است. در فصل سوم این پایان نامه ثابت می‌کنیم که اگر $rk(G')=r$ آنگاه $|G:Z_2(G)|\leq|G'|^{2r}$. گروه H را مستعد نامیم هرگاه گروهی مانند G موجود باشد به طوری که $G/Z(G)$ با H یکریخت باشد. ثابت می‌کنیم که اگر $rk(G'/(G'\cap Z(G)))=r$ آنگاه $|G:Z_2(G)|\leq|G':G'\cap Z(G)|^{4r}$. در نتیجه اگر H یگ گروه مستعد متناهی باشد و $rk(H')=r$ آنگاه $|H:Z(H)|\leq|H|^{4r}$. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی و پوچتوان باشد و $rk(G'/(G'\cap Z(G))=r$. در فصل چهارم ثابت می‌کنیم که $rk(G/Z_2(G))\leq\frac{1}{2}(13r^2-r)\varphi(n)$ که در آن $\varphi(n)$ تابع فی اویلر است.
برای اثبات این قضیه‌ها از مقالات زیر استفاده شده است.

[2] K. Podoski, B. Szegedy, On finite group whose derived subgroup has bounded rank, arXiv:0706.3246vl [math. GR] 22 Jun 2007.

[3] K. Podoski, B. Szegedy, Bounds for the index of the centre in capable groups, *American Mathematical Society*, Volume **133**, number **12**, July 13, 2005.

[4] I. M. Isaacs, Derived subgroups and centre of capable groups, *American Mathematical Society*, Volume **129**, number **10**, February 22, 2001.

در فصل چهارم ابتدا فرض می‌کنیم که G یک گروه پوچتوان و متناهی باشد. اثبات می‌کنیم که اگر رتبه‌ی $\gamma_{i+1}(G)$ برابر r باشد آنگاه رتبه‌ی $G/Z_{2i}(G)$ از بالا به تابعی بر حسب i و r، کراندار است. همچنین اثبات می‌کنیم که اگر G یک گروه متناهی دلخواه باشد و رتبه‌ی $G/Z_i(G)$ برابر r باشد آنگاه رتبه‌ی $\gamma_{i+1}(G)$ از بالا به تابعی برحسب i و r کراندار است.

این دو قضیه شبیه قضیه‌های بئر و هال اند که به جای اندیس رتبه در نظر گرفته شده است. برای اثبات این قضیه‌ها از مقاله‌ی زیر استفاده شده است.

[5] N. Yu. Makarenko, Rank analogs of Hall's and Baer's theorems, *Siberian Mathematical Journal*, Vol. **41**, No. **6**, 2000.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل به معرفی نمادها و بیان تعریف‌ها و قضیه‌های اساسی مورد نیاز که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. در بیشتر موارد برهان‌ها را به کتاب‌ها ارجاع داده‌ایم.

۱.۱.۱ **تبصره.** در این فصل وفصل‌های بعد گروه دوری از مرتبه‌ی n را با C_n، عضو همانی گروه G را با ۱، و اثر خودریختی G مانند α را بر عضو g به صورت $g\alpha$ نشان می‌دهیم. همچنین p همواره یک عدد اول است.

اثبات لم زیر مقدماتی است.

۲.۱.۱ **لم.** فرض کنیم $H \leq K \leq G$. در این صورت هرگاه اندیس H در G متناهی باشد آنگاه اندیس K در G متناهی است و

$$|G:H| = |G:K||K:H|.$$

۳.۱.۱ **لم.** فرض کنیم H و K زیرگروه‌های گروهی مانند G باشند، به طوری که اندیس K در G

متناهی باشد، در این صورت

(i) اندیس $H \cap K$ در H متناهی است، و $|H : H \cap K| \leq |G : K|$ و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $G = HK$؛

(ii) هرگاه اندیس H در G نیز متناهی باشد آنگاه $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$؛ و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $G = HK$.

برهان. نتیجه فوری از لم قبل است.

۴.۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد، و $A, B \leq G$. زیرگروه

$$\langle [a, b] | a \in A, b \in B \rangle$$

از G را زیرگروه تعویضگر A و B می‌نامند. آن را با علامت $[A, B]$ نشان می‌دهند.

۵.۱.۱ **لم.** [۱, ۱.۱.۱۰] فرض کنیم $A, B \leq G$، که در آن G یک گروه دلخواه است. در این صورت

(i) $[A, B] = [B, A]$.

(ii) اگر $A_1 \leq A$ و $B_1 \leq B$ آنگاه $[A_1, B_1] \leq [A, B]$.

(iii) اگر $A \lhd G$ آنگاه $[A, B] \leq A$.

(iv) اگر $A \lhd G$ و $B \lhd G$ آنگاه $[A, B] \lhd G$.

(v) $[A, B] \leq B$ اگروتنهااگر $A \leq N(B)$.

(vi) اگر $A \leq B$ و $A \lhd G$ آنگاه شرط لازم وکافی برای آن که $B/A \leq Z(G/A)$ آن است که $[G, B] \leq A$.

(vii) اگر θ یک همریختی گروه G باشد آنگاه $[A\theta, B\theta] = [A, B]\theta$.

(viii) اگر K گروه دلخواهی باشد، و $C \leq K$ آنگاه

$$[G \times K, A \times C] = [G, A] \times [K, C].$$

۶.۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد، و $x_1, \cdots, x_n$ اعضایی از G باشند. تعویضگر مرتبه nم

$[x_1, \cdots, x_n]$ به استقراء چنین تعریف می‌شود:

$$[x_1] = x_1, \quad [x_1, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n] \quad (n \geq 2).$$

۷.۱.۱ لم. [۱, ۱.۴.۱۰] فرض کنیم G یک گروه باشد، و $x, y, z \in G$. در این صورت

(i) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, y, z][y, z]$.

(ii) $[x, yz] = [x, z][y, z]^y = [x, z][x, y][x, y, z]$.

(iii) $[x^{-1}, y] = \left([x, y]^{-1}\right)^{x^{-1}} = [x, y]^{-1} \left[[x, y]^{-1}, x^{-1}\right]$.

(iv) $[x, y^{-1}] = \left([x, y]^{-1}\right)^{y^{-1}} = [x, y]^{-1} \left[[x, y]^{-1}, y^{-1}\right]$.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و $H, K \leq G$. مرکز ساز H در G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_K(H) = \{k \in K | kh = hk \ \ \forall h \in H\}.$$

۹.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه و $H, K \leq G$. اگر $[H, K]$ متناهی و H با تولید متناهی باشد آنگاه $|K : C_K(H)|$ متناهی است.

برهان. فرض کنیم $H = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$. به آسانی دیده می‌شود که

$$|K : C_K(H)| = |\{[x, k] | k \in K, \ x \in H\}|.$$

همچنین داریم $C_K(H) = \bigcap_{i=1}^{n} C_K(x_i)$. در نتیجه

$$|K : C_K(H)| \leq \prod_{i=1}^{n} |K : C_K(x_i)| \leq \prod_{i=1}^{n} |[H, K]|. \blacksquare$$

۱۰.۱.۱ قضیه (شرایر[1]). [۱, ۴.۲.۲] فرض کنیم G یک گروه متناهی‌مولد باشد و $H \leq G$. در این صورت اگر اندیس H در G متناهی باشد آنگاه H متناهی‌مولد است.

[1] Otto Schreier

۲.۱ pـگروه‌ها و تجزیه‌ی گروه‌های آبلی متناهی مولد

۱.۲.۱ **تعریف.** pـگروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی (یا مختصراً مقدماتی) می‌گوییم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد. اگر $|G| = p^n$، آنگاه $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$، که در آن a_iها اعضای غیر بدیهی Gاند؛ و در نتیجه

$$G \cong \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{n}.$$

۲.۲.۱ **لم.** [۱, ۳.۲.۵] فرض کنیم G یک pـگروه آبلی مقدماتی باشد و $|G| = n$. در این صورت $Aut(G) \cong GL_n(F_p)$، که در آن $GL_n(F_p)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان F_p است که دترمینان آن‌ها ناصفر است.

۳.۲.۱ **قضیه.** [۱, ۳.۱.۶] فرض کنیم G یک pـگروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G به حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری غیربدیهی‌اش تجزیه می‌شود. به عبارت دیگر G اعضایی غیر بدیهی مانند a_1، $\cdots$، a_n دارد به طوری که $G = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle$.

۴.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد.

(i) گروه G را تابدار گویند هرگاه مرتبه‌ی هر عضو آن متناهی باشد.

(ii) گروه G را بی‌تاب گویند هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی آن نامتناهی باشد.

۵.۲.۱ **لم.** [۱, ۴.۲.۶] فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از G که مرتبه‌ی هر یک از آن‌ها متناهی است یک زیرگروه تابدار G است. اگر این زیرگروه را T بنامیم آنگاه G/T یک گروه بی‌تاب است.

۶.۲.۱ **تعریف.** زیرگروه T از G را که در لم ۵.۲.۱ معرفی شد، زیرگروه تابدار G می‌گویند و آن را با نماد $T(G)$ نشان می‌دهند. $T(G)$ همواره یک گروه متناهی است.

۷.۲.۱ **قضیه.** [۱, ۵.۲.٦] فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی‌مولد باشد. در این صورت G زیرگروه بی‌تابی مانند S دارد به طوری که $G = T(G) \times S$.

۳.۱ گروه‌های پوچتوان

۱.۳.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right).$$

۲.۳.۱ **تعریف.** گروه G را پوچتوان نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده پوچتوانی G گویند وآن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

۳.۳.۱ **تذکر.** اگر G یک گروه پوچتوان غیربدیهی باشد آنگاه $Z(G) \neq 1$. همچنین هر pـگروه متناهی پوچتوان است.

۴.۳.۱ **لم.** [۱, ۲.۱.۱۰] گروه G پوچتوان است اگروتنهااگر سری نرمالی مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $[G, G_i] \leq G_{i-1}$.

۵.۳.۱ **قضیه.** [۱, ۳.۱.۱۰] فرض کنیم G یک گروه پوچتوان از رده‌ی r باشد. در این صورت

(i) هر زیرگروه G پوچتوان از رده‌ی حداکثر r است.

(ii) هر تصویر همریخت G پوچتوان از رده‌ی حداکثر r است.

٦.۳.۱ **نتیجه.** اگر G پوچتوان باشد و $N \lhd Z(G)$ آنگاه G/N پوچتوان است.

عکس نتیجه فوق برقرار نیست. ولی در حالت خاص لم زیر را داریم.

۷.۳.۱ لم. [۱, ۱.۱۰] فرض کنیم G یک گروه و $N \leq G$. در این صورت اگر G/N پوچتوان باشد آنگاه G نیز پوچتوان است؛ به علاوه $c(G) = c(G/N)$ یا $c(G) = c(G/N) + ۱$.

۸.۳.۱ قضیه. [۱, ۵.۱.۱۰] حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروه‌های پوچتوان، پوچتوان است.

۹.۳.۱ قضیه. [۱, ۸.۱.۱۰] فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر دوبه‌دو معادل‌اند؛

(i) G پوچتوان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(iii) هر p-زیرگروه سیلوی G نرمال است؛

(v) G حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

۱۰.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{\gamma_n(G)\}_{n=۱}$ از زیرگروه‌های G را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_۱(G) = G, \quad \gamma_n(G) = [G, \gamma_{n-۱}(G)] \quad (n \geq ۱).$$

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه (یعنی G) پیش نیاید، به جای $\gamma_n(G)$، مختصراً می‌نویسیم γ_n.

به آسانی به استقراء ثابت می‌شود که هر γ_n یک زیرگروه مشخّص G است. در نتیجه به ازای هر n طبیعی، $\gamma_n \lhd G$. بر طبق بند (iii) لم ۵.۱.۱، به ازای هر n طبیعی که $n > ۱$، $\gamma_n = [G, \gamma_{n-۱}] \leq \gamma_{n-۱}$.

۱۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری

$$G = \gamma_۱(G) \geq \gamma_۲(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

را سری مرکزی پایینی G می‌نامند.

۱۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{Z_n(G)\}_{n=\circ}$ از زیرگروه‌های G را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم:

$$Z_\circ(G) = ۱, \quad \frac{Z_{n+۱}}{Z_n(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_n(G)}\right) \quad (n \geq \circ).$$

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه پیش نیاید، به جای $Z_n(G)$، مختصراً می‌نویسیم Z_n.

واضح است که $Z_۱(G) = Z(G)$. به آسانی به استقراء ثابت می‌شود که هر Z_n یک زیرگروه مشخّص G است. بنابراین، به ازای هر n صحیح نامنفی، $Z_n \lhd G$؛ همچنین معلوم می‌شود که $Z_n \leq Z_{n+۱}$.

۱۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری

$$۱ = Z_\circ(G) \leq Z_۱(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \cdots$$

را سری مرکزی بالایی G می‌نامند.

۱۴.۳.۱ لم. [۱, ۳, ۲, ۱۰] فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد. در این صورت اگر

$$۱ = G_\circ \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_r = G$$

یک سری مرکزی برای G باشد آنگاه

(i) به ازای هر n طبیعی که $n \leq r + ۱$، $\gamma_n \leq G_{r-n+۱}$.

(ii) به ازای هر n صحیح نامنفی که $n \leq r$، $G_n \leq Z_n$.

۱۵.۳.۱ قضیه. [۱, ۲.۲.۱۰] فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

(i) G پوچتوان است اگروتنهااگر عدد صحیح نامنفیی مانند r موجود باشد به طوری که $\gamma_{r+۱} = ۱$.

(ii) G پوچتوان است اگروتنهااگر عدد صحیح نامنفیی مانند s موجود باشد به طوری که $Z_s = ۱$.

۱۶.۳.۱ نتیجه. فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد. در این صورت اگر r کوچکترین عدد صحیح نامنفیی باشد که $\gamma_{r+۱} = ۱$ یا $Z_r = G$ آنگاه $c(G) = r$.

۱۷.۳.۱ قضیه. [۱۰.۲.۵ ,۱] فرض کنیم G یک گروه پوچتوان باشد و $N \lhd G$. در این صورت اگر $N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.

۱۸.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد، و $A_1, \cdots, A_n \leq G$. زیرگروه تعویضگر تعمیم‌یافته‌ی $[A_1, \cdots, A_n]$ به استقراء چنین تعریف می‌شود:

$$[A_1] = A_1, \quad [A_1, \cdots, A_n] = [[A_1, , \cdots, A_{n-1}], A_n] \ \ (n \geq 1).$$

تعویضگر $[A, \underbrace{B, \cdots, B}_{n}]$ را با نماد $[A,_n B]$ نمایش می‌دهیم.

۱۹.۳.۱ لم. [۱۰.۲.۶ ,۱] فرض کنیم H، K، و L زیرگروه‌های نرمال گروه G باشند. در این صورت $[HK, L] = [H, L][K, L]$ و $[H, KL] = [H, K][H, L]$.

۲۰.۳.۱ لم (سه زیرگروه). [۱۰.۲.۱۱ ,۱] فرض کنید H، K، و L سه زیرگروه G باشند و $N \lhd G$. در این صورت اگر دو زیرگروه از سه زیرگروه $[H, K, L]$، $[K, L, H]$، $[L, H, K]$ زیرگروه N باشند آنگاه سومی نیز چنین است.

۲۱.۳.۱ قضیه. [۱۰.۲.۱۲ ,۱] به ازای هر دو عدد طبیعی i و j،

(i) $[\gamma_i, \gamma_j] \leq \gamma_{i+j}$،

(ii) اگر $i \geq j$، $[Z_i, \gamma_j] \leq Z_{i-j}$،

۲۲.۳.۱ لم. [۱۰.۴.۲ ,۱] فرض کنید G یک گروه، و $\{a_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک مجموعه مولّد G باشد. در این صورت به ازای هر i طبیعی γ_i/γ_{i+1} با اعضایی به صورت $[b_1, \cdots, b_i]\gamma_{i+1}$ تولید می‌شود که در آن به ازای هر j طبیعی که $1 \leq j \leq i$، $b_j \in \{a_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$.

۲۳.۳.۱ نتیجه. اگر G یک گروه متناهی‌مولد باشد آنگاه به ازای هر i طبیعی γ_i/γ_{i+1} متناهی‌مولد است.

۲۴.۳.۱ نتیجه. [۱۰.۴.۴ ,۱] اگر G یک گروه پوچتوان متناهی‌مولد باشد آنگاه هر زیرگروه G نیز

متناهی‌مولد است.

۲۵.۳.۱ **لم.** فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت داریم:

$$\gamma_i\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{\gamma_i(G)Z(G)}{Z(G)}, \quad Z_i\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{Z_{i+۱}(G)}{Z(G)} \quad (i \geq ۱).$$

برهان. اثبات مقدماتی و به استقراء نسبت به i است.■

۲۶.۳.۱ **لم.** فرض کنیم G یک گروه و $N \lhd G$ و $H \leq G$. در این صورت اگر $G = NH$ آنگاه به ازای هر عدد طبیعی $i \geq ۱$ داریم

$$\gamma_i(G) = \gamma_i(H)[N,_{i-۱} G] \leq \gamma_i(H)N.$$

برهان. اثبات آسان و به استقراء نسبت به i است.■

۲۷.۳.۱ **لم.** فرض کنیم $G_۱$، $\cdots$، G_n گروه‌های دلخواهی باشند. در این صورت داریم

$$\gamma_i(G_۱ \times \cdots \times G_n) = \gamma_i(G_۱) \times \cdots \times \gamma_i(G_n).$$

برهان. نتیجه از قسمت $(viii)$ لم ۵.۱.۱ حاصل می‌شود.■

۴.۱ نمایش آزاد گروه‌ها

۱.۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم F یک گروه، X مجموعه‌ای غیر تهی، و $\theta : X \longrightarrow F$ تابعی باشد. در این صورت (F,θ) را بر X آزاد گوییم هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \longrightarrow G$ یک همریختی منحصربه‌فرد مانند $\beta : F \longrightarrow G$ موجود باشد به طوری که $\alpha = \theta\beta$. گروه F را بر X آزاد گوییم در صورتی که تابعی مانند $\theta : X \longrightarrow F$ موجود باشد به طوری که (F,θ) بر X آزاد باشد. گروه F را یک گروه آزاد نامیم هرگاه بر مجموعه‌ای آزاد باشد.

به وضوح تابع θ که در تعریف فوق آمده، یک به یک است. اگر F بر X آزاد باشد، آنگاه F بر زیرمجموعه‌ای از خودش که با X هم‌عدد است آزاد است. در واقع (F,ι) بر $Im\theta$ آزاد است که درآن ι تابع احتواست. بنابراین با فرض $X \subseteq F$ و $\theta = \iota$ از تعریف معلوم می‌شود که β توسیع منحصر به فرد $\alpha : X \longrightarrow F$ است. به آسانی دیده می‌شود که اگر $G = \langle \alpha X \rangle$، آنگاه β یک برویختی است.

۲.۴.۱ **قضیه.** [۱, ۱.۱.۷] فرض کنیم X مجموعه‌ای غیر خالی باشد. در این صورت گروهی مانند F و تابعی مانند $\theta : X \longrightarrow F$ وجود دارد به طوری که (F,θ) بر X آزاد است و به علاوه $F = \langle Im\theta \rangle$.

۳.۴.۱ **قرارداد.** گروه F را که در قضیه‌ی فوق ساخته شد با علامت $F(X)$ نشان می‌دهیم.

۴.۴.۱ **قضیه.** [۱, ۴.۱.۷] هر گروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

۵.۴.۱ **نتیجه.** اگر G یک گروه و X مجموعه مولدی برای G باشد، آنگاه زیرگروه نرمالی مانند N از $F(X)$ هست که $G \cong F(X)/N$.

۶.۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد و $R \subseteq F(X)$. در این صورت گروه خارج قسمتی $F(X)/\bar{R}$ را با علامت $\langle X|R \rangle$ نشان می‌دهیم وآن را یک نمایش گروه $F(X)/\bar{R}$ می‌گوییم. ($\bar{R}$ یعنی بستار نرمال R در $F(X)$).

اینک فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد. اگر X مجموعه مولدی برای G باشد آنگاه بنا به قضیه‌ی قبل $G \cong F(X)/N$. که درآن N زیرگروه نرمالی از $F(X)$ است. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی R از N چنان باشد که $\bar{R} = N$. در این صورت واضح است که $G \cong \langle X|R \rangle$

۷.۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم G یک گروه باشد و $G \cong \langle X|R \rangle$ که در آن $R \subset F(X)$. در این صورت $\langle X|R \rangle$ را یک نمایش آزاد (یا مختصراً نمایش) G می‌نامیم. هر عضو X را یک مولد و هر عضو R را یک رابطه می‌نامیم.

۸.۴.۱ **تبصره.** فرض کنیم F گروه آزاد روی مجموعه‌ی X باشد. در این صورت F دارای نمایش

$F = \langle X| \, \rangle$ است که هیچ رابطه‌ی نابدیهی ندارد.

۹.۴.۱ قضیه. [۱, ۴.۲.۷] فرض کنیم $G = \langle X|R \rangle$. در این صورت $G/G' \cong \langle X|R \cup C \rangle$ که در آن $C = \{[x,y]|x,y \in X, x \neq y\}$.

۱۰.۴.۱ تبصره. فرض کنیم $G \cong \langle X|R \rangle$ که در آن $X = \{x_۱, \cdots, x_n\}$. با قضیه‌ی فوق، به آسانی دیده می‌شود که

$$\frac{G}{G'} \cong \langle X| \; R \cup \{[x_i, x_j]| ۱ \leq i \leq j \leq n\} \rangle$$

۱۱.۴.۱ تعریف. به ازای هر n طبیعی که $n \geq ۳$، گروه دووجهی از مرتبه‌ی $۲n$ که آن را با نماد $D_{۲n}$ نشان می‌دهند، زیرگروهی از S_n است که با دو جایگشت زیر تولید می‌شود:

$$\alpha = (۱۲ \cdots n), \qquad \beta = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \cdots & n-۲ & n-۱ & n \\ ۱ & n & n-۱ & n-۲ & \cdots & ۴ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}.$$

۱۲.۴.۱ قضیه. با علامات تعریف قبل اگر $۲ \mid n$، آنگاه $Z(D_{۲n}) = \left\langle \alpha^{\frac{n}{۲}} \right\rangle$.

۱۳.۴.۱ قضیه. [۱, ۱.۳.۷] گروه دو وجهی از مرتبه‌ی ۲^n دارای نمایش زیر است:

$$D_{۲^n} \cong \left\langle x, y| \; x^{۲^{n-۱}} = y^۲ = (xy)^۲ = ۱ \right\rangle$$

۵.۱ همریختی انتقال

در سراسر این مبحث H زیرگروهی از گروه مفروض G است و $|G:H| = n$، به علاوه قرار می‌دهیم $\Omega = \{۱, ۲, \cdots, n\}$.

۱.۵.۱ لم. [۱, ۱.۱.۱۲] فرض کنیم $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ و $\{y_۱, \cdots, y_n\}$ دو ترگرد راست H در G باشند، و $a \in G$. در این صورت به ازای هر i از Ω یک‌وتنهایک j از Ω، و نیز یک‌وتنهایک h_i از H وجود دارد به طوری که $y_i a = h_i x_j$ به علاوه تابع $\sigma : \Omega \longrightarrow \Omega$ یک جایگشت Ω است.

۲.۵.۱ تبصره. لم فوق را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد:
فرض کنیم $\{x_1, \cdots, x_n\}$ و $\{y_1, \cdots, y_n\}$ دو ترگرد راست H در G باشند، و $a \in G$. در این صورت جایگشتی از Ω مانند σ وجود دارد به طوری که به ازای هر i از Ω، عضوی از H مانند h_i هست که $y_i a = h_i x_{i\sigma}$.

۳.۵.۱ تعریف. فرض کنیم $\{x_1, \cdots, x_n\}$ یک ترگرد راست H در G باشد. تابع $T : G \longrightarrow H/H'$ با ضابطهٔ

$$aT = \prod_{i=1}^{n} H' h_i$$

را که در آن $x_i a = h_i x_j$ (مطابق لم قبل)، انتقال می‌گویند.

۴.۵.۱ قضیه. [۱,۲.۱.۱۲] با مفروضات وعلامات تعریف فوق ،
(i) T مستقل از انتخاب تراگرد راست H در G است،
(ii) T یک همریختی است.

۵.۵.۱ لم. [۱,۳.۱.۱۲] فرض کنیم $\{x_1, \cdots, x_n\}$ یک ترگرد راست H در G باشد و $a \in G$. در این صورت اعداد طبیعی مانند r_1، $\cdots$، r_m و اعضایی از $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مانند g_1، $\cdots$، g_m موجودند به طوری که
(i) $\sum_{t=1}^{m} r_t = n$،
(ii) به ازای هر t که $1 \leq t \leq m$، $g_t a^{r_t} g_t^{-1} \in H$،
(iii) $aT = \prod_{t=1}^{m} H' \left(g_t a^{r_t} g_t^{-1}\right)$.

۶.۵.۱ قضیه. [۱,۴.۱.۱۲] فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq Z(G)$. در این صورت اگر $|G : H| = n$ آنگاه به ازای هر a از G، $aT = a^n$.

۷.۵.۱ نتیجه. فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq Z(G)$. در این صورت اگر $|G : H| = n$ آنگاه تابع $T : G \longrightarrow H$ با ضابطهٔ $aT = a^n$ یک همریختی است.

۸.۵.۱ لم. فرض کنیم $T : G \longrightarrow H/H'$ همریختی انتقال باشد. در این صورت $G' \leq KerT$.

برهان. با توجه به اینکه H/H' آبلی است از قضیه اول یکریختی نتیجه حاصل می‌شود.■

۹.۵.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$ به طوری که $|G : H| = n$. در این صورت اگر $a \in Z(G)$ آنگاه $aT = H'a^n$.

برهان. به موجب بند (iii) لم ۵.۵.۱، نتیجه حاصل می شود.■

۱۰.۵.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. به علاوه فرض کنیم $|G : H| = n$ و $|H/H'| = m$، که در آن m و n دو عدد طبیعی‌اند.در این صورت اگر m و n نسبت به هم اول باشند آنگاه $H \cap G' \cap Z(G) \leq H'$.

برهان. فرض کنیم $T : G \longrightarrow H/H'$ همریختی انتقال باشد و $a \in H \cap G' \cap Z(G)$. بر طبق لم قبل، $aT = H'a^n$. از طرفی بر طبق لم ۸.۵.۱، $aT \in KerT$. در نتیجه $|aH'| \mid n$. لذا $|aH'| \mid (n, m)$، پس $aH' = H'$.■

۱۱.۵.۱ لم (شور[۲]). [۱۴, ۲.۱۲] فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq Z(G)$. در این صورت اگر $|G : H|$ متناهی باشد آنگاه G' متناهی است.

۶.۱ عمل گروه بر گروه

۱.۶.۱ تعریف. فرض کنیم H و K دو گروه باشند. گوییم گروه H بر گروه K عمل می‌کند در صورتی که به ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$، عضو یکتایی از K که آن را با k^h نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(i) برای هر $k \in K$، $k^1 = k$.

(ii) برای هر $h_1, h_2 \in H$ و هر $k \in K$، $k^{(h_1 h_2)} = (k^{h_1})^{h_2}$.

(iii) برای هر $k_1, k_2 \in K$ و هر $h \in H$، $(k_1 k_2)^h = k_1^h k_2^h$.

---
[۲] Schur

۲.۶.۱ تبصره. دو اصل موضوع (i) و (ii) معرف عمل گروه H بر مجموعه‌ی K است. بنابراین همهٔ احکامی که در مورد عمل گروه بر یک مجموعه داشتیم برقرار است.

۳.۶.۱ قضیه. [۲۱, ۹.۳] فرض کنیم گروه H بر گروه K عمل کند. به ازای هر $h \in H$، تابع $\theta_h : K \longrightarrow K$ را با ضابطه‌ی $k\theta_h = k^h$ تعریف می‌کنیم. در این صورت θ_h یک خودریختی K است و نگاشت $\theta : H \longrightarrow Aut(K)$ با ضابطهٔ $h \to \theta_h$ یک همریختی است.

۴.۶.۱ تعریف. با علامات قضیه قبل θ را نمایش خودریختی‌ای H، متناظر با عمل H بر K می‌نامند و گوییم H بر K با θ عمل می‌کند. اگر θ یک‌به‌یک باشد آنگاه عمل را صادق گوییم.

۵.۶.۱ قضیه. [۲۱, ۹.۴] فرض کنیم H و K دو گروه باشند و $\theta : H \longrightarrow Aut(K)$ یک همریختی باشد. در این صورت H بر K به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\forall h \in H,\ \forall k \in K \quad k^h := k^{(h\theta)}.$$

وبه علاوه نمایش خودریختی‌ای H متناظر با این عمل همان θ است.

۶.۶.۱ قضیه. فرض کنیم گروه H بر گروه K عمل کند. در حاصلضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱ h_۲, k_۱^{h_۲} k_۲).$$

مجموعهٔ $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصلضرب نیم‌مستقیم H و K می‌نامند و آن را با علامت $H \ltimes K$ نشان می‌دهند.

۷.۶.۱ قضیه. [۲۱, ۹.۵] فرض کنیم گروه H بر گروه K عمل کند و $G = H \ltimes K$. در این صورت G زیرگروه نرمالی مانند N وزیرگروهی مانند M دارد که $M \cong H$ و $N \cong K$ به طوری که $G = MN$ و $M \cap N = ۱$.