دانشگاه کردستان

تابع توزیع تورس – وگا در فضای فاز گسترش یافته

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

طیبه جهانی

استاد راهنما: دکتر فاطمه طاعتی اصل

۸۸

به نام خدا

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار و خواهر و برادر عزیزم

قدردانی و تشکر

با کمال ادب و احترام، از استاد بزرگوارم سرکار خانم دکتر فاطمه طاعتی اصل که در این مدت از هیچ مساعدتی دریغ ننمودند و تجربیات گرانقدر خویش را همواره با گشاده‌رویی و شکیبایی در اختیار بنده قرار دادند، بی نهایت سپاسگزارم.

و نیز از پدر و مادر مهربانم و خواهر و برادر خوبم تشکر می‌کنم.

از اساتید محترم گروه فیزیک که در این مقطع تحصیلی در محضر درسشان بوده‌ام ممنونم.

همچنین از دوستان عزیز و همکلاسی‌های خوبم که در این مدت نسبت به بنده لطف داشتند سپاسگزارم.

چکیده

در این تحقیق تابع توزیع مثبت تورس — وگا به وسیله‌ی تعمیم تبدیل انتگرالی هوسیمی روی تابع توزیع ثبوتی — نصیری (SN) در فضای فاز بدست می‌آید. در کوششی دیگر تبدیل یکانی را در فضای فاز بدست آورده‌ایم که می‌تواند، تابع شرودینگر در فضای موقعیت را به تابع شبه شرودینگری تورس — وگا در فضای فاز تبدیل کند. این رویکرد، پارامترهای آزاد تبدیل انتگرالی تورس — وگا، که معادله‌ی شرودینگر در فضای موقعیت یا تکانه را به معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای فاز تبدیل می‌کند، را حذف می‌نماید.

فهرست

۴ تابع توزیع کوانتومی تورس — وگا در فضای فاز گسترش یافته

فصل اول

مقدمه

نمایش‌های مختلفی برای مکانیک کوانتوم وجود دارد مانند نمایش شرودینگر، هایزنبرگ و اندرکنشی.

با توجه به پیشرفت دراپتیک کوانتومی، مدارهای منطقی کوانتومی و تئوری‌های $Deformation\ Quantization$، رویکرد جدیدی در مکانیک کوانتومی مطرح می‌شود که این‌گونه مسائل را به نحو بارزی ساده می‌کند. این رویکرد، مکانیک کوانتومی در فضای فاز است.

ساختن مکانیک کوانتومی در فضای فاز[1] این امکان را برای ما فراهم می‌کند که بتوانیم آن را با مکانیک آماری کلاسیک در فضای فاز مقایسه کنیم. با این شیوه اطلاعات کوانتومی را می‌توانیم از طریق مسیرهای کلاسیکی بدست آوریم. به عنوان نمونه محاسبه مقدار چشم‌داشتی عملگرها در فضای فاز، می‌تواند با روشی مشابه روش متوسط‌گیری درمکانیک آماری کلاسیک یعنی توسط رابطه‌ی زیر بیان شود [۱]

$$< \hat{F} >_{Qu}= \int F(q,p) P_{Qu} dqdp.$$

[1] در فضای فاز، موقعیت و تکانه نقش یکسانی دارند.

در رابطه‌ی بالا، P_{Qu} تابع توزیع کوانتومی در فضای فاز است و $F(q,p)$ معادل کلاسیکی مناسب برای عملگر $\hat{F}(\hat{q},\hat{p})$ است که به نمایش مورد نظر در فضای فاز بستگی پیدا می‌کند.

نمایش‌های مختلفی برای مکانیک کوانتومی در فضای فاز وجود دارد. از جمله‌ی آنها می‌توان به مکانیک کوانتومی در فضای فاز ویگنر[۲]، گسترش یافته[۳] و تورس — وگا[۴] اشاره کرد.

ویگنر در سال ۱۹۳۲، در تصحیح کوانتومی پدیده‌های ترمودینامیکی تابع توزیع شبه احتمالاتی[۵] خود را به صورت زیر معرفی کرد [۲]

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \exp\left(\frac{ipy}{\hbar}\right) < q - \frac{1}{2}y \mid \hat{\rho} \mid q + \frac{1}{2}y > dy.$$

این تابع توزیع که به طور مستقیم از تابع موج در نمایش q یا p ساخته می‌شود، در بسیاری از شاخه‌های علم فیزیک از جمله کوانتوم اپتیک [۴ و۳]، فیزیک هسته‌ای [۵] و فیزیک حالت جامد [٦] کاربرد دارد.

رویکردهای متفاوتی برای رسیدن به فضای فاز مکانیک کوانتومی پیشنهاد داده شده‌است، در رویکرد ثبوتی - نصیری (نمایش فضای فاز گسترش یافته) برخلاف دیگران که از مکانیک کوانتومی به فضای فاز می‌رسند، می‌توان مستقیماً از طریق مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتوم در فضای فاز دست یافت [۷].

از آنجایی که مکانیک کوانتومی از کوانتومی کردن فضای فاز کلاسیک ساخته می‌شود، ثبوتی — نصیری پیش بینی کردند با تعمیم شیوه‌ی فوق می‌توان به مکانیک کوانتومی در فضای فاز رسید. آنها با تعریف یک لاگرانژی گسترش یافته که تابعی از $L^e(q,\dot{q},p,\dot{p})$ است، به هامیلتونی گسترش یافته $H^e(q,\pi_q,p,\pi_p)$ می‌رسند. در هامیلتونی مذکور q و p نقش یکسانی را بازی می‌کنند و π_q و π_p تکانه‌های گسترش یافته هستند که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند،

$$\pi_q = \frac{\partial L^e}{\partial \dot{q}}$$

[۲] Wigner

[۳] Extended Phase Space

[۴] Torres - Vegas

[۵] Quasi Distribution Function

و

$$\pi_p = \frac{\partial L^e}{\partial \dot{p}}.$$

با کوانتیزه کردن مکانیک کلاسیک گسترش یافته و با تعمیم آنچه در ساختن مکانیک کوانتومی متعارف صورت می‌گیرد، می‌توان به مکانیک کوانتومی در فضای فاز دست یافت.

امتیاز این شیوه در آن است که پس از کوانتش و ساختن عملگر هامیلتونی، برخلاف کوانتش در مکانیک کوانتومی متعارف، که باعث می‌شود تقارن بین مختصه‌ها و تکانه‌ها از بین برود، تقارن مذکور بین مختصه‌ها و تکانه‌ها حفظ می‌شود. نکته جالب توجه اینکه به کمک تبدیلات کانونیک در فضای فاز گسترش یافته و کوانتومی کردن آن می‌توان به تابع توزیع ویگنر دست یافت.

از مزیت‌های دیگر رویکرد مذکور آن است که این فرمالیسم می‌تواند اصل تطابق را برآورده کند. برای مثال تحول زمانی تابع توزیع در این فضا در حد $\hbar \longrightarrow 0$ به معادله لیوویل[۶]تبدیل می‌شود.

روش ویگنر و یا سایر روش‌های مشابه با آن تکیه بر مکانیک کوانتومی است اما دراین شیوه تکیه بر مکانیک کلاسیک هامیلتونی است. با این فرض که مسیرهای کلاسیکی برای q و p در معادلات اویلر – لاگرانژ[۷]مربوط به آنها به طور موازی در نظر گرفته می‌شوند.

در رویکردی دیگر، تورس – وگا از مکانیک کوانتومی در فضای موقعیت شروع می‌کند و با استفاده از تبدیل هوسیمی تعمیم یافته روی معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر در فضای موقعیت، به معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای فاز می‌رسد. سپس، با استفاده از معادله‌ی شبه شرودینگری بدست آمده، توابع موج، ویژه حالت‌ها، ویژه مقادیر و همچنین چگالی احتمال را محاسبه می‌نماید [۸].

در فصل دوم این پایان نامه، فضای فاز مکانیک کوانتومی تورس – وگا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم فضای فاز گسترش یافته را مطالعه خواهیم کرد و در فصل چهارم سعی می‌کنیم، علاوه بر معرفی یک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته بین تابع توزیع تورس – وگا و تابع توزیع فضای فاز گسترش یافته و یافتن هامیلتونی گسترش یافته برای این تابع توزیع، تبدیلات یکانی را در فضای فاز بیابیم که با اعمال آنها روی فضای موقعیت

[۶] Liouvill Equation

[۷] Euler - Lagrange Equations

(تکانه)، بتوانیم به فضای فاز تورس — وگا برسیم.

فصل دوم

فضای فاز مکانیک کوانتومی تورس — وگا

تورس — وگا در سال ۱۹۹۰ با استفاده از هسته‌های تبدیل انتگرالی روی معادله‌ی شرودینگر در فضای موقعیت (تکانه) شکل‌های مختلف معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای فاز را بدست می‌آورد و سپس به وسیله‌ی آن توابع موج، ویژه حالت‌ها، ویژه مقادیر و همچنین چگالی احتمال را محاسبه می‌نماید.

تورس — وگا یک عملگر هرمیتی $\hat{\Gamma}$ را فرض می‌کند که در معادله‌ی ویژه مقداری زیرصدق می‌نماید [۹]

$$\hat{\Gamma}|\Gamma >= \Gamma|\Gamma > . \qquad (۲.۱)$$

در رابطه بالا $\Gamma = (q, p)$ ویژه مقدار این عملگر هرمیتی است که یک نقطه را در این فضا نمایش می‌دهد و $|\Gamma >= |q, p >$ بردار پایه این فضا را تعریف می‌کند.

تصویر هر بردار $|\psi >$ روی پایه‌های این فضا به صورت $\psi(\Gamma) =< \Gamma|\psi >$ نوشته می‌شود که تابع موج در نمایش تورس — وگا است. با توجه به عملگرهای تصویر $\int d\acute{q}|\acute{q} >< \acute{q}|$ و $\int d\acute{p}|\acute{p} >< \acute{p}|$ روابط زیر در مورد $\psi(\Gamma)$ برقرار است [۸]

$$\psi(\Gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} < \Gamma|\acute{q} >< \acute{q}|\psi > d\acute{q}, \qquad (۲.۲)$$

و

$$\psi(\Gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}<\Gamma|\acute{p}><\acute{p}|\psi>d\acute{p}. \qquad (۲.۳)$$

در این روابط $\psi(\acute{q})$ تابع موج نمایش موقعیت و $\psi(\acute{p})$ تابع موج نمایش تکانه، در مکانیک کوانتومی متعارف می‌باشند[۱] همچنین $<\Gamma|\acute{q}>$ ($<\Gamma|\acute{p}>$) هسته‌ی تبدیلی است که تابع موج نمایش تورس – وگا را به تابع موج مکانیک کوانتومی متعارف در نمایش موقعیت (تکانه) ارتباط می‌دهد. به عبارت دیگر $<\Gamma|\acute{q}>$ درایه‌های ماتریس تبدیل بین فضای فاز تورس – وگا و مکانیک کوانتومی متعارف هستند و به شکل کلی زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$<\Gamma|\acute{q}>=F(\acute{q}-q)\exp(-\frac{ip}{\hbar}(\acute{q}-q)). \qquad (۲.۴)$$

که تابع $F(\acute{q}-q)$ در رابطه‌ی بالا، یک تابع غیر صفر است که حداقل یکبار نسبت به $(\acute{q}-q)$ مشتق‌پذیر باشد. یکی از انتخاب‌ها برای $F(\acute{q}-q)$ (همانطور که در ادامه‌ی این فصل خواهیم دید) می‌تواند به صورت رابطه‌ی زیر باشد

$$F(\acute{q}-q)=(\frac{\lambda}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{\lambda}{2\hbar}(\acute{q}-q)^2). \qquad (۲.۵)$$

با این انتخاب هسته‌ی تبدیل $<\Gamma|\acute{q}>$ را هسته‌ی تبدیل هوسیمی تعمیم یافته می‌نامند

۲–۱ معادلات شبه شرودینگری در فضای فاز تورس – وگا

تورس – وگا با در نظر گرفتن هسته‌ی تبدیل انتگرالی $<\Gamma|\acute{q}>$ به شکل

$$<\Gamma|\acute{q}>_1=(\frac{\lambda}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{\lambda}{2\hbar}(\acute{q}-q)^2-\frac{ip}{\hbar}(\acute{q}-q)), \qquad (۲.٦)$$

و اعمال آن روی معادله‌ی شرودینگر وابسته به زمان در فضای موقعیت، به رابطه‌ی زیر می‌رسد

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{q}<\Gamma|\acute{q}><\acute{q}|\psi>=\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{q}<\Gamma|\acute{q}>\{\frac{1}{2m}(i\hbar)^2(\frac{\partial}{\partial\acute{q}})^2+V(\acute{q})\}<\acute{q}|\psi> \qquad (۲.۷)$$

[۱] در این فصل عملگرهای $\acute{q}$ و $\acute{p}$ نمایش عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوانتومی متعارف هستند

در معادله‌ی فوق با استفاده از انتگرال جزبه‌جز، می‌توان مشتق‌گیری از $<\acute{q}\mid\psi>$ را به مشتق‌گیری از $<\Gamma\mid\acute{q}>$ تبدیل کرد یعنی،

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{q}<\Gamma|\acute{q}><\acute{q}|\psi>=\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{q}\{\{\frac{1}{2m}(i\hbar)^2(\frac{\partial}{\partial\acute{q}})^2+V(\acute{q})\}<\Gamma|\acute{q}>\}<\acute{q}|\psi>. \quad (۲.۸)$$

که با توجه به رابطه‌ی (۲.۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\Gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{q}\{\{\frac{1}{2m}(i\hbar)^2(\frac{\partial}{\partial\acute{q}})^2+V(\acute{q})\}<\Gamma|\acute{q}>\}<\acute{q}|\psi>. \quad (۲.۹)$$

در این مرحله با قراردادن $<\Gamma|\acute{q}>$ از رابطه‌ی (۲.٦) و محاسبه‌ی اثر $\acute{q}$ و $\frac{\partial}{\partial\acute{q}}$ روی آن یعنی،

$$(\frac{\partial}{\partial\acute{q}})^2<\Gamma|\acute{q}>_1=(\frac{\partial}{\partial q})^2<\Gamma|\acute{q}>_1 \quad (۲.۱۰)$$

و

$$\acute{q}<\Gamma|\acute{q}>_1=(q+i\hbar\frac{\partial}{\partial p})<\Gamma|\acute{q}>_1\ . \quad (۲.۱۱)$$

می‌توان هامیلتونی معادله‌ی (۲.۹) را از زیر انتگرال خارج کرد و سپس، با برداشتن عملگر تصویر $\int d\acute{q}|\acute{q}><\acute{q}|$ به معادله‌ی شبه شرودینگری تورس − وگا دست یافت.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(\Gamma)=[\frac{1}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2+V(q+i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]\psi_1(\Gamma). \quad (۲.۱۲)$$

این معادله، تحول زمانی تابع $\psi_1(\Gamma)$ را به ما می‌دهد. با توجه به معادله‌ی فوق که یک معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای فاز تورس − وگا، برای هسته‌ی تبدیل هوسیمی تعمیم یافته است و با معرفی $\hat{Q}$ و $\hat{P}$ به ترتیب به عنوان عملگر مکان و تکانه در فضای فاز تورس − وگا داریم

$$\hat{Q}=q+i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \hat{P}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \quad (۲.۱۳)$$

از طرفی بااعمال هسته‌ی تبدیل انتگرالی $<\Gamma|\acute{p}>$ روی معادله‌ی شرودینگر در فضای تکانه و تبدیل مشتق‌گیری از $<\acute{p}|\psi>$ به کمک انتگرال جزبه‌جز، به مشتق‌گیری از $<\Gamma|\acute{p}>$ می‌توان به رابطه‌ی زیر رسید

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}d\acute{p}<\Gamma|\acute{p}><\acute{p}|\psi>=\int_{-\infty}^{\infty}\{[\frac{\acute{p}^2}{2m}+V(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\acute{p}})]<\Gamma|\acute{p}>\}<\acute{p}|\psi>d\acute{p}. \quad (۲.۱۴)$$

برای محاسبه‌ی اثر $\acute{p}$ و $-i\hbar\frac{\partial}{\partial \acute{p}}$ روی هسته‌ی تبدیل $<\Gamma|\acute{p}>$ ابتدا لازم است خود این عبارت محاسبه شود

$$<\Gamma|\acute{p}>=\int<\Gamma|\acute{q}><\acute{q}|\acute{p}>d\acute{q}. \tag{۲.۱۵}$$

با جایگذاری $<\Gamma|\acute{q}>$ از معادله‌ی (۲.۴) و استفاده از تغییر متغیر

$$\ddot{q}=\acute{q}-q, \tag{۲.۱۶}$$

داریم

$$<\Gamma|\acute{p}>=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(\frac{i\acute{p}q}{\hbar})\int F(\ddot{q})\exp(\frac{-i\ddot{q}}{\hbar}(p-\acute{p}))d\ddot{q}. \tag{۲.۱۷}$$

با در نظر گرفتن

$$k(p-\acute{p})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int F(\ddot{q})\exp(\frac{-i\ddot{q}}{\hbar}(p-\acute{p}))d\ddot{q}, \tag{۲.۱۸}$$

به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$<\Gamma|\acute{p}>=k(p-\acute{p})\exp(\frac{i\acute{p}q}{\hbar}). \tag{۲.۱۹}$$

با محاسبه‌ی عبارت $k(p-\acute{p})$ به کمک رابطه‌ی (۲.۶) به صورت

$$k(p-\acute{p})=(\frac{1}{\pi\hbar\lambda})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{(p-\acute{p})^2}{2\lambda\hbar}). \tag{۲.۲۰}$$

خواهیم داشت

$$<\Gamma|\acute{p}>=<\Gamma|\acute{p}>_1=(\frac{1}{\pi\hbar\lambda})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{(\acute{p}-p)^2}{2\lambda\hbar})\exp(\frac{iq\acute{p}}{\hbar}). \tag{۲.۲۱}$$

اکنون با توجه به عبارتی که برای $<\Gamma|\acute{p}>_1$ بدست آمد می‌توان نوشت

$$\acute{p}^2<\Gamma|\acute{p}>_1=(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2<\Gamma|\acute{p}>_1 \tag{۲.۲۲}$$

و

$$(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \acute{p}})<\Gamma|\acute{p}>_1=(q+i\hbar\frac{\partial}{\partial p})<\Gamma|\acute{p}>_1 . \tag{۲.۲۳}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله‌ی (۲.۱۴) و همچنین با در نظر گرفتن

$$< \Gamma|\psi >= \int_{-\infty}^{\infty} d\acute{p} < \Gamma|\acute{p} >< \acute{p}|\psi >,$$

داریم

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} < \Gamma|\psi >= [\frac{1}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(q + i\hbar\frac{\partial}{\partial p})] < \Gamma|\psi > .$$

معادله‌ی بالا همان معادله‌ی (۲.۱۲) یعنی معادله‌ی شبه شرودینگری برای هسته‌ی تبدیل هوسیمی تعمیم یافته است. همانطور که دیده می‌شود اعمال $< \Gamma|\acute{q} >_1$ روی مکانیک کوانتومی متعارف در نمایش موقعیت و اعمال $< \Gamma|\acute{p} >_1$ روی مکانیک کوانتومی متعارف در فضای تکانه، ما را به یک معادله‌ی واحد در فضای فاز تورس — وگا می‌رساند.

معادله‌ی (۲.٦) تنها انتخاب ممکن برای هسته‌ی تبدیل $< \Gamma|\acute{q} >$ نیست بلکه با توجه به این معادله یعنی،

$$\delta(\ddot{q} - \acute{q}) =< \ddot{q}|\acute{q} >= \int < \ddot{q}|\Gamma >< \Gamma|\acute{q} > d\Gamma. \qquad (۲.۲۴)$$

می‌توان گفت اگر $< \Gamma|\acute{q} >$ یک هسته‌ی تبدیل مجاز باشد، عبارت $e^{iF(\Gamma)} < \Gamma|\acute{q} >$ هم می‌تواند به عنوان هسته‌ی تبدیل انتخاب شود [۱۰].

بنابراین با انتخاب $e^{iF(\Gamma)}$ به صورت $e^{\frac{-ipq}{2\hbar}}$ می‌توان هسته‌ی تبدیل انتگرالی زیر را بدست آورد

$$< \Gamma|\acute{q} >_2= \exp{(-\frac{ipq}{2\hbar})} < \Gamma|\acute{q} >_1= (\frac{\lambda}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} \exp{(-\frac{\lambda}{2\hbar}(\acute{q} - q)^2)} \exp{(-\frac{ip}{\hbar}(\acute{q} - \frac{q}{2}))}. \qquad (۲.۲۵)$$

که عبارت $< \Gamma|\acute{p} >$ متناظر با آن توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$< \Gamma|\acute{p} >_2= (\frac{1}{\pi\hbar\lambda})^{\frac{1}{4}} \exp{(\frac{-1}{2\hbar\lambda}(\acute{p} - p)^2)} \exp{(-\frac{iq}{\hbar}(\acute{p} - \frac{p}{2}))}. \qquad (۲.۲٦)$$

با داشتن هسته‌ی تبدیل $< \Gamma \mid \acute{q} >_2$ و محاسبه‌ی اثر $\acute{q}$ و $\frac{\partial}{\partial \acute{q}}$ روی آن یعنی،

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial \acute{q}})^2 < \Gamma|\acute{q} >_2= (\frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 < \Gamma|\acute{q} >_2 \qquad (۲.۲۷)$$

و

$$\acute{q} < \Gamma|\acute{q} >_2= (\frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}) < \Gamma|\acute{q} >_2 . \qquad (۲.۲۸)$$

و قرار دادن معادلات فوق در رابطه‌ی (۲.۹) خواهیم داشت

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(\Gamma) = [\frac{1}{2m}(\frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(\frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]\psi_2(\Gamma). \tag{۲.۲۹}$$

این رابطه شکل دیگری از معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای فاز تورس – وگا است، که با توجه به آن، عملگرهای مکان و تکانه در این فضا به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$\hat{Q} = \frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \hat{P} = \frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \tag{۲.۳۰}$$

از طرفی اگر $e^{iF(\Gamma)}$ را به شکل $e^{\frac{-ipq}{\hbar}}$ انتخاب کنیم می‌توان به یک هسته‌ی تبدیل دیگر به شکل زیر رسید

$$< \Gamma|\acute{q} >_3 = \exp{(-\frac{ipq}{\hbar})} < \Gamma|\acute{q} >_1 = (\frac{\lambda}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} \exp{(\frac{-\lambda}{2\hbar}(\acute{q} - q)^2)} \exp{(\frac{-ip\acute{q}}{\hbar})}. \tag{۲.۳۱}$$

که $< \Gamma|\acute{p} >$ متناظر با آن به صورت زیر می‌باشد

$$< \Gamma|\acute{p} >_3 = (\frac{1}{\pi\hbar\lambda})^{\frac{1}{4}} \exp{(\frac{-1}{2\hbar\lambda}(\acute{p} - p)^2)} \exp{(-\frac{iq}{\hbar}(\acute{p} - p))}. \tag{۲.۳۲}$$

با در نظر گرفتن هسته‌ی تبدیل $< \Gamma|\acute{q} >_3$ و استفاده از روابط زیر

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial \acute{q}} < \Gamma|\acute{q} >_3 = (p - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}) < \Gamma|\acute{q} >_3, \tag{۲.۳۳}$$

$$\acute{q} < \Gamma|\acute{q} >_3 = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} < \Gamma|\acute{q} >_3 . \tag{۲.۳۴}$$

می‌توان به یکی دیگر از معادلات شبه شرودینگری تورس – وگا دست یافت

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_3(\Gamma) = [\frac{1}{2m}(p - i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]\psi_3(\Gamma). \tag{۲.۳۵}$$

با توجه به معادله فوق عملگرهای مکان و تکانه در نمایش تورس – وگا به شکل زیر معرفی می‌شوند

$$\hat{Q} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \hat{P} = p - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \tag{۲.۳۶}$$

پس، به دلیل انتخاب‌های متفاوتی که برای هسته‌ی تبدیل $<\acute{q} \mid \Gamma>$ وجود دارد، به جای معادله‌ی شبه شرودینگری تورس — وگا به معادله‌های شبه شرودینگری در این نمایش می‌رسیم.

از طرفی به دلیل تفاوت هسته‌های تبدیل $<\acute{q} \mid \Gamma>$ در عامل فاز $e^{iF(\Gamma)}$ می‌توان انتظار داشت، شکل‌های متفاوت معادله‌ی شبه شرودینگری تورس — وگا تنها در یک عامل فاز با هم اختلاف داشته باشند بنابراین با اعمال تبدیل یکانی $e^{\frac{-ipq}{2\hbar}}$ روی معادله‌ی شبه شرودینگری (۲.۱۲) و با توجه به این روابط [۸]

$$e^{-\frac{ipq}{2\hbar}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})e^{\frac{ipq}{2\hbar}} = \frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q} \qquad (۲.۳۷)$$

و

$$e^{-\frac{ipq}{2\hbar}}(q + i\hbar\frac{\partial}{\partial p})e^{\frac{ipq}{2\hbar}} = \frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p}. \qquad (۲.۳۸)$$

که با توجه به بسط بیکرهاسدروف[۲]

$$e^{iG\lambda}Ae^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G,A] + (\frac{i^2\lambda^2}{2!})[G,[G,A]] + ... + (\frac{i^n\lambda^n}{n!})[G,[G,...[G,A]]]...], \qquad (۲.۳۹)$$

و استفاده از روابط جابجایی زیر در فضای فاز یعنی،

$$[q,p] = [p,p] = [q,q] = [p,\frac{\partial}{\partial q}] = [q,\frac{\partial}{\partial p}] = 0 \qquad (۲.۴۰)$$

و

$$[p,\frac{\partial}{\partial p}] = [q,\frac{\partial}{\partial q}] = -1. \qquad (۲.۴۱)$$

بدست می‌آیند، می‌توان به معادله‌ی زیر رسید

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-\frac{ipq}{2\hbar}}\psi_1(\Gamma) = [\frac{1}{2m}(\frac{p}{2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(\frac{q}{2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]e^{-\frac{ipq}{2\hbar}}\psi_1(\Gamma). \qquad (۲.۴۲)$$

رابطه‌ی بالا با معرفی $\psi_2(\Gamma) = e^{\frac{-ipq}{2\hbar}}\psi_1(\Gamma)$ همان معادله‌ی (۲.۲۹) است و نشان می‌دهد که توابع موج $\psi_1(\Gamma)$ و $\psi_2(\Gamma)$ نیز تنها در یک عامل فاز با هم اختلاف دارند.

[۲] Baker - Hausdorff

به صورت مشابه، با اعمال تبدیل $\exp(\frac{-ipq}{\hbar})$ روی معادله‌ی شبه شرودینگری (۲.۱۲) داریم

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp(\frac{-ipq}{\hbar})\psi_1(\Gamma) = [\frac{1}{2m}(p - i\hbar\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})]\exp(\frac{-ipq}{\hbar})\psi_1(\Gamma). \qquad (۲.۴۳)$$

با قرار دادن $\psi_3(\Gamma) = \exp(\frac{-ipq}{\hbar})\psi_1(\Gamma)$ معادله‌ی فوق به رابطه‌ی (۲.۳۵) تبدیل می‌شود. اکنون برای اینکه یک شکل کلی برای معادله‌ی شبه شرودینگری تورس — وگا بدست آوریم، از هسته‌ی تبدیلی به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$< \Gamma \mid \acute{q} >= F(\acute{q} - q)\exp(\frac{-ip}{\beta\hbar}(\acute{q} - \alpha q)). \qquad (۲.۴۴)$$

به کار بردن معادله‌ی (۲.۲۴) با انتخاب $d\Gamma = \frac{1}{2\pi\hbar}dqdp$ [۱۰] در مورد این هسته‌ی تبدیل، ایجاب می‌کند که تابع $F(\acute{q} - q)$ در شرط زیر صدق کند

$$\int \mid F(\acute{q} - q) \mid^2 dq = 1. \qquad (۲.۴۵)$$

معادله‌ی بالا این امکان را به ما می‌دهد که $F(\acute{q} - q)$ را به شکل یک تابع گوسی انتخاب کنیم و در نتیجه

$$< \Gamma|\acute{q} >= (\frac{\lambda}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}}\exp(-\frac{\lambda}{2\hbar}(\acute{q} - q)^2 - \frac{ip}{\beta\hbar}(\acute{q} - \alpha q)). \qquad (۲.۴۶)$$

اکنون با محاسبه‌ی اثر $\acute{q}$ و $\frac{\partial}{\partial \acute{q}}$ روی این هسته‌ی تبدیل و توجه به معادله‌ی (۲.۹) می‌توان شکل کلی معادله‌ی شبه شرودینگری در فضای تورس — وگا را به صورت زیر بدست آورد

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\Gamma) = [\frac{1}{2m}(\gamma p + i\hbar\delta\frac{\partial}{\partial q})^2 + V(\alpha q + i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial p})]\psi(\Gamma). \qquad (۲.۴۷)$$

در رابطه‌ی فوق عملگرهای مکان و تکانه‌ی تورس — وگا به صورت کلی زیر ظاهر می‌شوند [۱۱]

$$\hat{Q} = \alpha q + i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \hat{P} = \gamma p + i\hbar\delta\frac{\partial}{\partial q}. \qquad (۲.۴۸)$$

شرط انتخاب ثابت‌های α، γ، β و δ در معادله‌های بالا به گونه‌ای است که در فضای فاز تورس — وگا اصل عدم قطعیت برقرار بماند یعنی،

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar. \qquad (۲.۴۹)$$