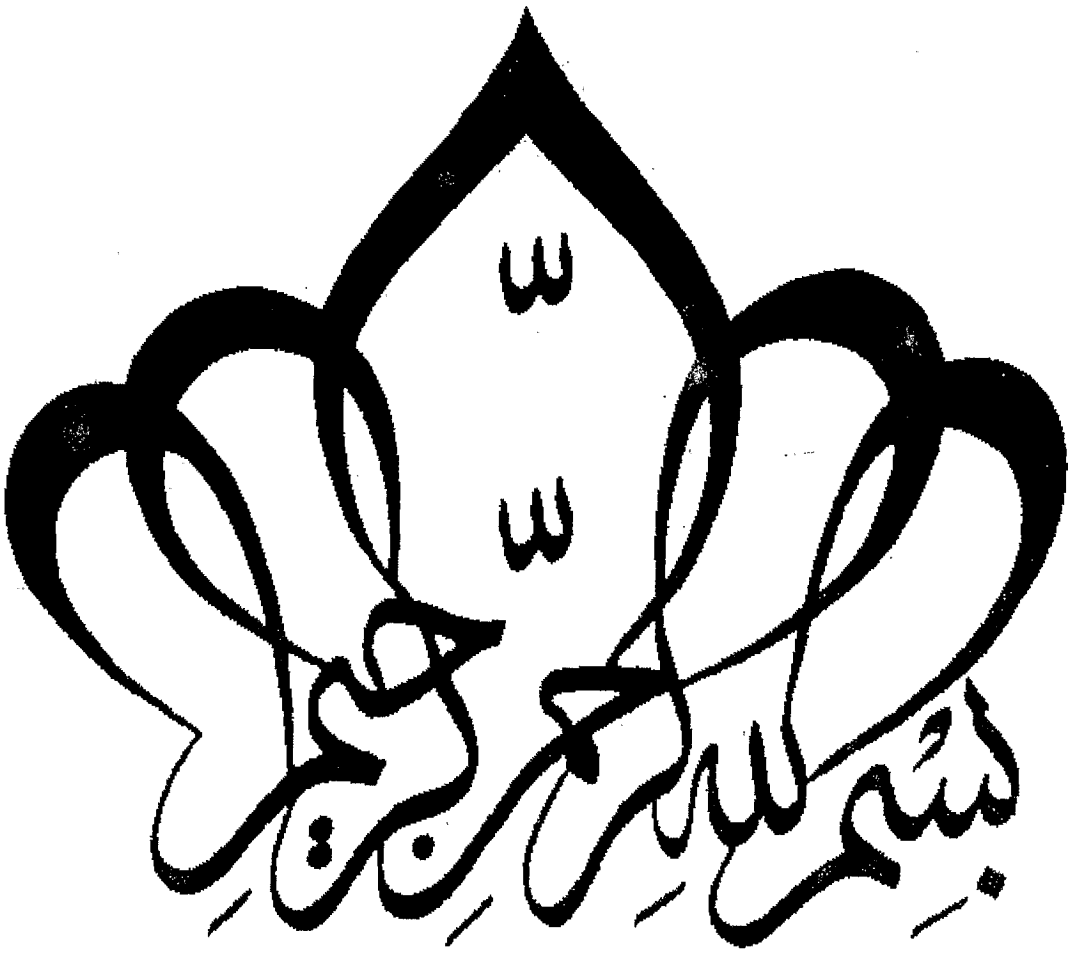
۱۰۹/۱۳۶



۱۳۸۷/۲/۲۵

۱۰۲۲۶۷

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی (کاربردی)

حل عددی سیستمهای دینامیکی توسط توابع متعامد (کاربرد در آیرودینامیک)

نگارنده:

فرزاد رضایی

استاد راهنما:

دکتر علاء الدین ملک

استاد مشاور:

دکتر حجت اله مومنی ماسوله

۱۳۸۷/۲/۲۵

خرداد ۸۶

۱۰۲۳۶۷

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت‌مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاستهای پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان‌نامه‌ها/ رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعملهای مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی می‌باید به نام دانشگاه بوده و **استاد راهنما** نویسنده **مسئول مقاله** باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشرمی‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸٤/٤/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم‌الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.۱۳۸٤/٦/پ

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **فرزاد رضایی** رشته **ریاضی(کاربردی)** تحت عنوان: «**حل عددی سیستمهای دینامیکی توسط توابع متعامد (کاربرد آیرودینامیک)**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علاءالدین ملک	دانشیار	
۲- استادمشاور	آقای دکترسیدحجت‌اله‌مؤمنی‌ماسوله	استادیار	
۳- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر [illegible] دهقان	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر ناصر خاجی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	خانم دکتر فرشته سعدی	استادیار	

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد/~~رسالهٔ دکتری~~ نگارنده در رشتهٔ ریاضی کاربردی است که در سال ۸۶/۳۶ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر علاء الدین ملک، مشاورهٔ ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر محمد الی موضی ماسوله و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر _____ از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس ، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب فرزاد رضایی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: فرزاد رضایی

تاریخ و امضا: ۸۶/۹/۲۶

تقدیر و تشکر:

بر خود لازم می دانم که از زحمات استاد راهنما دکتر علاءالدین ملک و استاد مشاور دکتر حجت اله مومنی ماسوله که یاری نموده اند کمال تشکر و قدردانی نمایم.

تقدیم:

این پایان نامه را به پدر و مادر و برادران و خواهرانم به خصوص اخوی بزرگم تقدیم می کنم.

چکیده

تغییر شکل اجسام بر اثر حرکت، مانند تغییر شکل بدنه های الاستیک هواپیما و یا تغییر شکل و حرکت سازه های عمرانی بر اثر نیروهای خارجی وارده بر سازه، نمونه مثالهایی هستند که سیستم معادله آنها به صورت سیستم معادله دیفرانسیل حرکت، مقید و یا غیر مقید شده در می آید. سیستم معادله های حرکت را در اکثر موارد نمی توان به صورت تحلیلی حل کرد.معمولا آنها را به صورت عددی حل می کنند.

دراین پایان نامه یک الگوی جدید برای حل عددی سیستم معادله های حرکت مرتبه اول و خطی ارائه می کنیم. در آخر سیستم غیر خطی معادله حرکت مرتبه دوم (مقید و یا غیر مقید)، را به کمک تغییر متغیر و خطی سازی و استفاده از توابع متعامد مثلثی به یک سیستم معادله مرتبه اول و خطی تبدیل می کنیم، تا به کمک این الگوی جدید جوابی عددی برای سیستم مفروض بدست آورده باشیم. کاربرد سیستم معرفی شده در این پایان نامه در مسائل آیرودینامیکی (بدنه های انعطاف پذیر) و در دنیای واقعی است. مثالهای عددی متنوعی برای بررسی، دقت و خطای ممکنه در روشهای ارائه شده برای حل سیستم های فوق ارائه شده است.

کلمات کلیدی

توابع متعامد مثلثی، بلوک پالس ها، سیستم معادله های دیفرانسیل معمولی(حرکت).

فهرست

فصل اول: شبیه سازی چندبدنه

۱-۱- مروری بر شبیه‌سازی چندبدنه و---------- ۱
مقدمه‌ای از آیرودینامیک هواپیما

۱-۲- مهندسی هم‌زمان و نقش نرم‌افزارهای کامپیوتری ---------- ۲

۱-۳- شبیه‌سازی چندبدنه ---------- ۵

۱-۴- فرموله کردن سیستمهای چندبدنه و روشهای انتگرال‌گیری--------- ۶
۱-۴-۱ روشهای انتگرال‌گیری عددی (اویلر و رونگه‌کوتای مرتبه ۴)
۱-۴-۲ روش اویلر
۱-۴-۳ روش رونگه‌کوتای مرتبه (۴)

۱-۵-حل دو مثال عددی به کمک روش های اویلر و رونگه کوتا مرتبه۴ -- ۱۰

۱-۶- کاربرد سیستم شبیه‌سازی چندبدنه---------- ۱۶

۱-۷- المان‌های نیروی آیرودینامیک وارده بر هواپیما ---------- ۱۷

۱-۸- سیستم‌های چندبدنه هیبریدی از معادله‌های حرکت---------- ۱۸

فصل دوم: بیان و نحوه بدست آمدن سیستم معادله آیرودینامیک در بدنه‌های انعطاف‌پذیر

۲-۱- فرضیه‌هایی از بدنه‌های انعطاف‌پذیر ---------- ۲۰

۲-۲- بدنه‌های انعطاف‌پذیر در علم حرکت ---------- ۲۳

۲-۳- سیستم معادله‌های غیر خطی حرکت از بدنه انعطاف پذیر ساده---- ۲۴

۲-۴- خطی سازی تغییر شکل الاستیکی ---------- ۲۵

فصل سوم: نحوه بدست آوردن توابع متعامد پایه‌ای مثلثی

۳-۱- مقدمه‌ای از توابع پایه‌ای---------- ۳۲

۳-۲- مروری مختصر به توابع بلوک‌پالس‌ها و عملگر---------- ۳۳
ماتریسی این نوع توابع

۳-۳- ساخت یک سری از توابع پایه‌ای متعامد جدید---------- ۳۴
به کمک بلوک‌پالس‌ها تحت عنوان توابع متعامد مثلثی

۳-۴- تقریب توابع به کمک سری توابع مثلثی ---------- ۳۷

۳-۵- بررسی متعامد بودن توابع مثلثی ---------- ---- ۴۰

۳-۶- تقریب یک تابع زمانی به کمک توابع متعامد---------- ۴۲
مثلثی و توابع بلوک‌پالس‌ها

۳-۷- ماتریس عملگر سری توابع مثلثی برای---------- ۴۳
تقریب تابع اولیه هر تابع مفروضه

۳-۸- تقریب یک تابع زمانی داده شده توسط ---------- ۴۶
دو گروه از توابع مثلثی و بلوک‌پالس‌ها

فصل چهارم: کاربرد توابع مثلثی در معادله‌های حرکت

۴-۱- بررسی و آنالیز سیستم معادله‌های حرکت مرتبه اول---------- ۴۸
و خطی توسط توابع متعامد مثلثی بلوک‌پالس‌ها

۴-۲- آنالیز خطا ---------- ۵۴

۴-۳- تقریب توابع به کمک توابع متعامد مثلثی با ضرایب بهینه-------- ۵۸

۴-۴- مقایسه بین سه الگوی توابع متعامد مثلثی با ضرایب بهینه و------ ۶۰
غیر بهینه و سری توابع بلوک‌پالس‌ها به کمک مثال‌های عددی

۴-۵- تبدیل مساله آیرودینامیک مرتبه دوم به سیستم معادله ---------- ۶۲
آیرودینامیک مرتبه اول خطی و نحوه خطی سازی آن

فصل پنجم: چندین مثال عددی از سیستم‌معادله‌های آیرودینامیک

۵-۱- مروری بر فصول قبلی ---------- ۶۶

مثال عددی ۱ : رسم خطای تقریب یک تابع با الگوی توابع مثلثی ------- ۶۷

مثال عددی ۲: حل عددی سیستم خطی و مقایسه با جواب تحلیلی --- ۶۸

مثال عددی ۳: حل عددی یک سیستم معادله خطی ---------- ۶۹

مثال عددی ۴ : حل عددی یک سیستم معادله خطی ---------- ۷۱
مرتبه دوم از دنیای واقعی و بررسی و آنالیز این مثال

مثال عددی ۵ : حل عددی یک سیستم معادله غیرخطی---------- ۷۴
مرتبه دوم و بررسی نحوه حل آن با الگوی توابع مثلثی

مثال عددی ۶: حل عددی یک سیستم معادله مرتبه دوم---------- ۷۹
مقید و مقایسه جواب رسم شده با الگوهای مختلف

فصل ششم: نتیجه گیری و جمع بندی

۶-۱- نتیجه گیری و جمع بندی ---------- ۸۴

کتاب نامه ---------- ۸۶

فصل اول

شبیه سازی چندبدنه

۱-۱- مروری بر شبیه‌سازی چندبدنه و مقدمه‌ای از آیرودینامیک هواپیما

در طراحی هواپیماها بیشتر مواقع موضوع تعادل و حفظ پرواز را مد نظر قرار می‌دهند، اما با این وجود موضوع مربوط به نشست و برخاست یکی از هدفهای بسیار مهم در طراحی هواپیماهای جدید است. زیرا مقاومت، صرفه جویی، امنیت(بیشتر از ۵۰٪ از تصادفات هوایی زمانی رخ داده است که هواپیما روی زمین در حال نشست و برخاست بوده است) و قیمت، چهار فاکتور مهم برای صنعت هوانوردی است که در موضوع نشست و برخاست هواپیماها خودشان را نشان می‌دهند. بنابر این عمل نشست و برخاست هواپیما یکی از عوامل کلیدی از یک طراحی موفق برای هواپیماها خواهد بود.

با کمک علوم کامپیوتر در خدمت علوم مهندسی (CAE)[1]، شبیه سازی چند بدنه (MBS)[2] نرم افزارهای مناسبی را برای بررسی و آنالیز وسایل نقلیه در اختیار ما قرار می‌دهد. در برنامه ها و پژوهشها و کاربردهای صنعتی، شبیه سازی چندبدنه برای تحلیل و ارزیابی دینامیک نشست و برخاست و ساختار انعطاف‌پذیر هواپیما، ابزاری کارآمد است. در آینده شبیه‌سازی چندبدنه(با توجه به پیشرفت روز افزون و سریع علوم کامپیوتر و نرم‌افزارها) می‌تواند قابلیتهای پیچیده‌تری و راهکارهای بهتری پیش روی ما قرار دهد. با افزایش ساختار انعطاف‌پذیری نسل بعدی طرحهای هواپیما تقاضاها بیشتر روی آنالیز دینامیک نشست و برخاست خواهد بود.

در دو دهه گذشته، راهبردها و روشهای به کار رفته در طراحی هواپیما بطور معنی‌داری توسعه یافته است، که این پیشرفت‌ها تابع پیشرفت سریع علوم کامپیوتر و نرم افزارهای مهندسی در این زمینه بوده است.

پیشرفت اصلی کار استفاده از نرم‌افزارهای موجود برای بررسی طرحها است که مهندسی همزمان (CE)[3] در برنامه‌های محاسبات مهندسی نیز به کار می‌برند. طراحی به کمک کامپیوتر (CAD)[4]، آنالیز المان محدود (FEA)[5] و دینامیک سیالات (CAE)[6] از جمله محیطهای کامپیوتری هستند که در مهندسی همزمان در این مقوله بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱-۲- مهندسی همزمان و نقش نرم‌افزارهای کامپیوتری

مهندسی همزمان یک نوع کار گروهی است، که به صورت هم‌زمان برای گروه‌های مختلف، هر گروه برای تمام کردن یک زیر پروژه با هم همکاری می‌کنند. قبلا کارها یا پروژه‌هایی که انجام می‌شد بدین صورت بود که کارهای گروهی را به صورت گسسته در اختیار گروهها قرار داده شده اند و هر گروه

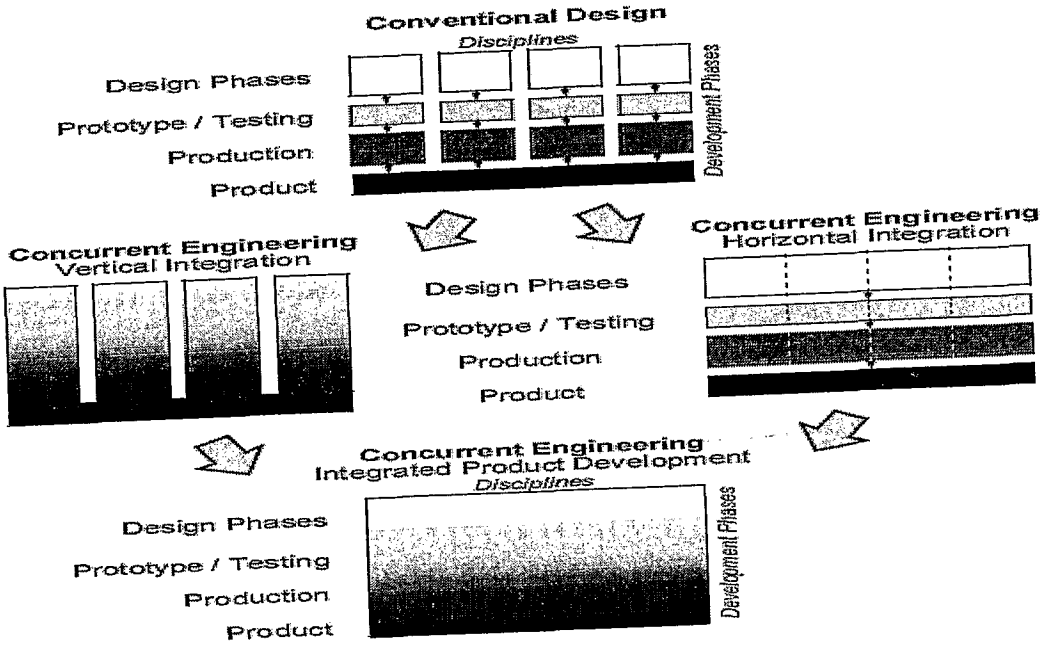
(1) computer aided engineering
(2) multibody simulation
(3) concurrent engineering
(4) computer aided design
(5) finite element analysis
(6) computational fluid dynamics

کارهها را در سه مرحله طرح، تست، و تولید و هر کدام به صورت جداگانه(یعنی تا مرحله طرح به طور کامل تمام نمی‌شد، مرحله تست آغاز نمی‌شد)، و بدون دخالت در کار دیگر گروهها، کارهای خودرا پیش می‌بردند و در آخر تمام گروهها کارهایی که به آنها محول شده بود، را روی هم ریخته و طرح کلی را به پایان می‌رساندند.

بعدا مهندسی هم زمان با الگوی بهتر مطرح شد که به الگوهای عمودی و افقی معروفند. در الگوی عمودی پروژه به چند زیر پروژه تقسیم می‌شود و هر زیر پروژه به یک گروه داده می شد. فرق این الگو با الگوی کلاسیک(الگوی قبلی) در این بود، که در این الگو هر گروه کارهایشان را به صورت گسسته انجام نمی‌دادند، بلکه در پروژه پیشرفت، گروه مراحل طرح و تست و تولید را در یک زمان انجام می‌دادند، یعنی اگر کار گروه تولید یا اجراء یک زیر پروژه بود قسمتی از زیر پروژه را که طرح می‌شد بلافاصله تست می‌شد، پس از تست(اگر با موفقیت بود) به مرحله تولید می‌رسید.

الگوی افقی عیب الگوی عمودی را نداشت ولی مزیت الگوی عمودی را نیز نداشت. در الگوی افقی گروهها به کمک همدیگر زیر پروژه های خودشان را انجام می‌دادند ولی در این الگو حتما باید مرحله طرح را تمام می کردند تا به مرحله تست برسند. سپس اگر تمام کارهایی که در مرحله تست انجام می شد موفق بود آنوقت به مرحله تولید می رفتند و الی آخر. عیب این الگو این بود که اگر در پروژه طرح اشکالی ایجاد می‌شد، و در پروژه تست این اشکال نمایان می‌شد امکان داشت در کلیه کارهایی که در مرحله طرح بدست آمده بود با این اشتباه اخلال ایجاد کند و کار گروهی به مرحله قبل بازگشته و متحمل زمان و تحمل هزینه بیشتر و زحماتی بیشتر شود. بنابراین این الگو نیز مانند الگوی عمودی دارای معایب خاص خودش بود. پس از اینکه این دو الگو ناکارآمدی خودشان را نشان دادند، و با توسعه اینترنت به عنوان یک شبکه جهانی ارتباط مابین گروهها راحتتر شد، و دلیلی نداشت که گروهها با هم همکاری نداشته باشند. بنابر این در این زمان دو الگو بالا را با هم تلفیق کردند، و الگوی نویی ارائه شد که هیچ کدام از مشکلات بالا را نداشت. در این الگوی جدید گروهها با هم همکاری لازم را دارند و اگر در گروهی با مشکلی برخورد کردند با گروه دیگر در میان گذاشته و با کمک همدیگر مشکلات یکدیگر

را حل می‌کردند. و اگر در یک زیر پروژه یک قسمت از کارشان را در یک مرحله انجام دادند به مرحله بعد رفته و نتیجه کارشان را بررسی می کردند، یا تولید می کردند. نمونه ای از این نوع همکاری در صنعت کارخانه های هواپیما سازی را در کشور های اروپایی به وضوح می بینیم. تصویر(۱-۱)را ببینید



تصویر۱-۱ : نحوه پیشرفت مهندسی همزمان با گذشت زمان

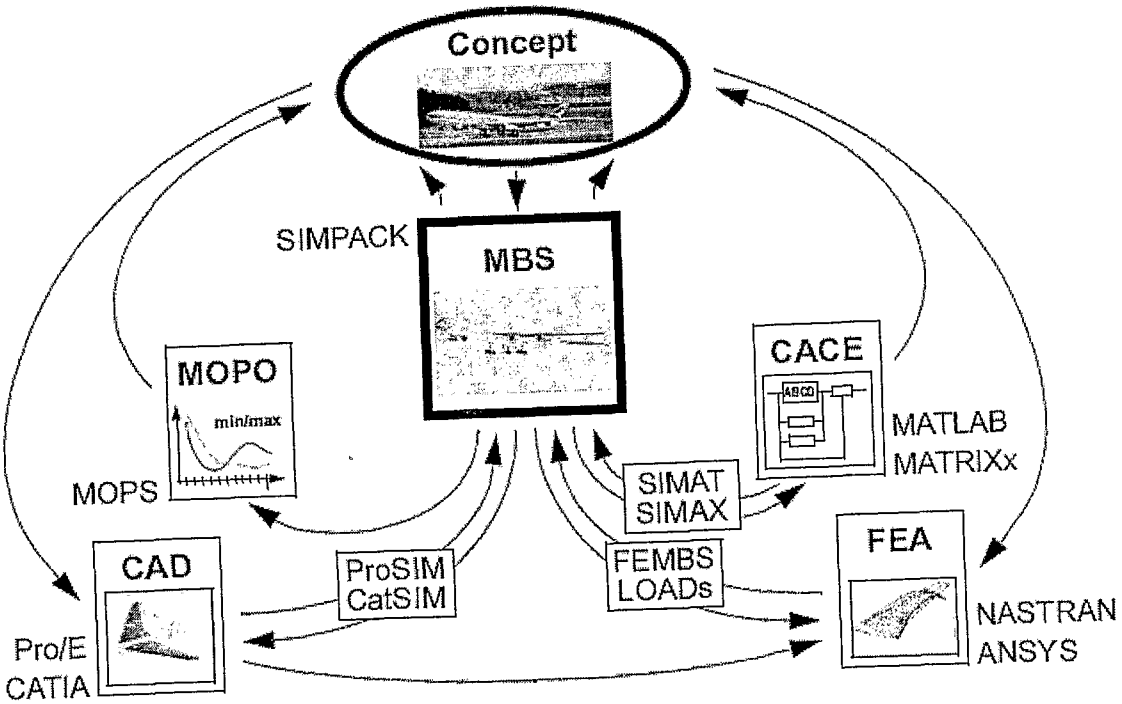
توانایی لازم برای تجزیه یک سیستم به طور کامل، تنها یک گام به سمت مهندسی همزمان و موفق و کارآمد است.

الگوی مهندسی همزمان به سرعت در برنامه توسعه و پیشرفت کارخانه‌جات مهم هواپیماسازی در دنیا مورد استفاده قرار گرفت. از جمله کارخانه هواپیماسازی سازنده McDonnell Douglas (بوئینگ جدید) -E/F ۱۸F/A یا بوئینگ 777 را می‌توان نام برد. حوادث ناگواری که برای بوئینگ 777 اتفاق افتاد یکی از مسائلی بود که به طور جدی روی کیفیت و کارایی تولید این نوع هواپیما تاثیر بسزایی داشت.

۱-۳- شبیه سازی چند بدنه

در گذشته آنالیز رفتار دینامیکی هواپیما زمان زیادی برای محاسبه و بررسی مورد نیاز بود. در اوایل معادله‌های حاکم بر حرکت توسط دست محاسبه می‌شدند با پیشرفت علم در ابتدا از خط‌کش‌های محاسبه و بعدا به کمک آنالوگ پیوندی(دورگه) یا کامپیوترهای رقمی برای محاسبه بهتر و سریعتر سیستمهای خطی مورد استفاده قرار گرفت در آخر با توسعه در فنهای شبیه‌سازی کامپیوتری شیوه‌های متفاوتی برای مشکل بالا ارائه شد. نمونه‌ای از این نرم‌افزارها، نرم‌افزار شبیه‌سازی (Custum-made) است که مسائل خاص دینامیک نشست و برخاست هواپیما را حل می‌کند.

در واقع کدهای شبیه‌سازی چندبدنه بازده یا نتیجه کلیه کارهایی است که به کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری که هر کدام بخشی از رفتار دینامیکی خطی و غیر خطی از سیستمهای دینامیکی را شبیه‌سازی می‌کند را شامل می‌شود، در کاربرد عملی شبیه‌سازی چندبدنه یک میز آزمایش مجازی برای این سیستمها است.



تصویر ۱-۲ : رابطه بین نرم افزارهای مهندسی و شبیه‌سازی چندبدنه

بدنه‌های سیستم شبیه‌سازی چندبدنه معمولا سخت فرض می‌شوند. در سیستم های چندبدنه هیبریدی، بدنه‌های شبیه‌سازی چندبدنه ممکن است مجموعا در معرض تغییرشکلهای نسبتا انعطاف‌پذیر و کوچک قرار گیرند. بنابر این دینامیک سیستم‌های چندبدنه را می توان بدین صورت تعریف کرد" آنالیز دینامیکی سیستم بدنه‌های به هم مرتبط که تحت انتقال و دوران عمومی قرار می‌گیرند" . آلبرت نیوتن، اویلر و لاگرانژ اساس حل معادله‌های سیستمهای چندبدنه حرکت را پایه‌ریزی کردند.

روش شبیه‌سازی چندبدنه در درجه اول به بررسی و تحلیل حرکت از علم دینامیک می‌پردازد بعد از ورودی داده‌های موجود مدل مورد بررسی توصیف می‌شود، برای حل عددی این سیستم یک تنوع از راه‌حلهای بهینه شده در دسترس است که جوابهای عددی تولید می‌کند. اساسا، شبیه سازی چندبدنه از دو قسمت بدنه‌ها و اتصالات تشکیل شده است. بدنه‌ها سخت یا انعطاف‌پذیر اند در حالی که اتصالها ممکن است که در علم سینماتیک (مفصل) یا سینتیک(عناصر نیرو) باشند.

مفصلها معمولا برای اتصال ما بین دو بدنه یا دو چهارچوب است و معمولا درجات آزادی سیستم را ساده می‌کنند. بنابراین مفصل‌ها معمولا به عنوان نیروهای محدودیت یا عکس‌العمل بصورت متعامد در سلسله مراحل حرکت به عنوان محدودیت در نظر می‌گیریم. محدودیت‌های نیروی عکس‌العمل حرکت سیستم و در نتیجه حالات کرانداری ژئومتری سیستم را پوشش می‌دهند.

المان‌های نیرو به عنوان نیروها و گشتاورهای خارجی یا درونی از سیستم به کار می‌روند، آنها ممکن است مستقل از حالت سیستم باشند. المانهای نیرو معمولا درجات آزادی‌شان در سیستم تغییر نمی‌کند اما ممکن است وضعیت‌های اضافی با حالات کراندار تولید کند.

۱-۴- فرموله کردن سیستمهای چندبدنه و روش‌های انتگرال‌گیری

حرکت یک سیستم سخت چندبدنه با ماتریس جرم M توسط مختصه تولید شده q به عنوان بردار مکان، سرعت $\dot{q}$ و شتاب $\ddot{q}$ که هر سه توابعی برداری از درجه nروی متغیر t تعریف شده‌اند، به صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$M(q)\ddot{q}(t) = f(q,\dot{q},\lambda,t) - G^T(q,t)\lambda.$$

که در آن f بردار نیروهای ژیروسکوپی (گردش نما) و $G^T\lambda$ نماینده قیدهای نیروست، با ماتریس محدودیت G و بردار λ (ضریب لاگرانژین) که بزرگی نیروهای محدودیت را نشان می‌دهد.

۱-۴-۱- روش‌های انتگرال‌گیری عددی (اویلر و رونگه‌کوتای مرتبه۴)

با تغییر متغیر زیر سیستم معادله حرکت مرتبه دوم به یک سیستم معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود.

$$x = \left(q^T, \dot{q}^T\right)^T$$

بنابراین داریم

$$\dot{x} = f(x,t).$$

به علاوه شرایط اولیه بردار x را می‌دهند، در اینجا $\dot{x}$ دیفرانسیل x نسبت به زمان است. سیستم بالا را با شرایط اولیه زیر و استفاده از الگوهای عددی سیستم را به صورت عددی حل می‌کنند.

$$x_0 = x(t=0)$$

اجازه دهید یکی ازسیستم معادله‌های حرکت را به صورت عددی، با ساده نمودن رفتار سیستمها روی زمان اجرا کنیم. در اینجا نمونه‌ای از مثال‌های از معادله‌های حرکت مرتبه اول را ارائه و مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای حل این سیستم معادله از روشهای اویلر و رونگه‌کوتای مرتبه(۴) استفاده می‌کنیم. نمونه‌ای از یک سیستم معادله مرتبه اول خطی که تابع اولیه آن در دسترس است را با روشهای فوق حل می‌کنیم و روشهای فوق را در رسیدن به جواب از نظر سرعت یا دقت را با هم بررسی و خطای محاسبات آن را برای طول گام های مختلف بدست می‌آوریم. سپس چند سیستم معادله مرتبه دوم

خطی و غیر خطی را از دنیای واقعی را بدست آورده و با تغییر متغیر به معادله مرتبه اول خطی تبدیل می‌کنیم و به کمک روشهای اویلر و رونگه کوتای مرتبه۴ به صورت عددی حل می‌کنیم.

هدف اصلی ما در این پروژه پیدا کردن راه‌حل عددی جدید برای حل عددی سیستم معادله حرکت مرتبه دو مقید است ما ابتدا در فصل بعدی نحوه پیدا کردن این نوع معادله‌ها را در مورد بدنه‌های انعطاف‌پذیر بدست می‌آوریم. بنابر این در این پایان‌نامه سعی می کنیم سیستم معادله های حرکت دلخواهی را حل کنیم، و راه حلها را با هم مقایسه کنیم(در واقع قیاس ما یک قیاس عددی است) یعنی با نوشتن برنامه کامپیوتری به زبان MATLAB مثالهایی از معادله‌های حرکت مرتبه اول و مرتبه دوم با روشهای مختلف را حل و این روشها را با هم مقایسه می‌کنیم.

۱-۴-۲- روش اویلر

فرض می کنیم معادله مرتبه اول $\dot{y}=f(x,y)$ را با مقدار اولیه x_0 و $y_0=y(x=0)$ داشته باشیم، می خواهیم مقدار y را در نقطه $x=s$ پیدا کنیم، روش اویلر که به صورت زیر است را برای حل این نوع معادله به کار می‌بریم.

$$\tilde{y}_{n+1}=\tilde{y}_n+h*f(x_n,\tilde{y}_n),$$

این الگو از تقریب زیر بدست آمده است

$$\frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h}\cong f(x_0,y_0),$$

هر چه h به اندازه معقولی کوچک باشد تقریب $\tilde{y}_n$ بدست آمده بهتر است ولی برای بدست آوردن تقریبی برای مقدار $y(s)$ تعداد مراحل و زمان بیشتری تلف می‌شود. به هر حال روش اویلر یکی از روشهای مهم برای حل عددی سیستم معادله‌ها است، زیرا روشی ساده و استفاده کردن از آن و نوشتن

برنامه کامپیوتری آن راحتتر است. خطای گسسته سازی روش اویلر از مرتبه $O(h)$ است که نشان می دهد که روش فوق خطای نسبتا زیادی دارد. معمولا

$$\tau = \frac{1}{h}(y(x_0+h) - \tilde{y}(x_0+h)),$$

به عنوان خطای گسسته سازی معروف است. در معادله اویلر

$$\tilde{y}(x_0+h) = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

$$y(x_0+h) = y_0 + h\dot{y}_0 + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_0 + O(h^3),$$

بنابراین داریم که

$$\tau = \frac{h}{2}(\ddot{y}_0 + O(h)),$$

و بدیهی است که $\tau \longrightarrow 0$ زمانی که $h \longrightarrow 0$ ، پس روش اویلر روش سازگاری است.

۱-۴-۳- روش رونگه‌کوتای مرتبه۴

این روش به صورت زیر است

$$\tilde{y}(x_n+h) = \tilde{y}(x_n) + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

$$k_1 = f(x_n, \tilde{y}_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, \tilde{y}_n + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, \tilde{y}_n + hk_3).$$