دانشکده فیزیک

گروه نظری و اختر فیزیک

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

عنوان

تخمین حالت ها و کانال های کوانتومی

استاد راهنما

دکتر محمد علی جعفری زاده

استاد مشاور

دکتر یحیی اکبری کور بلاغ

پژوهشگر

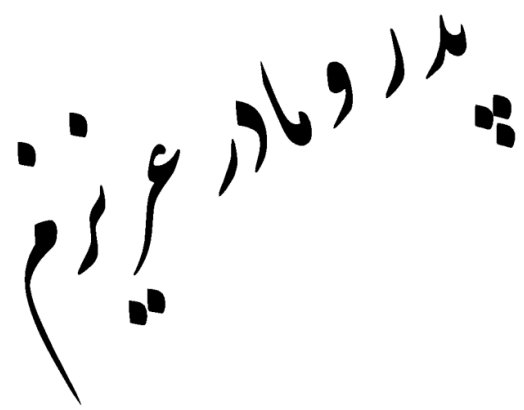
امیر زنده روح روانلو

بهمن ۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مقدسترین واژه‌هاي زندگیم



آنان که وجودم برای آنان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر

توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی من است

آنانکه راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت

در برابر وجودشان زانوی ادب بر زمین می‌نهم

و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر قلبشان بوسه می‌زنم

سرو وجودشان همیشه سرسبز و امتداد باد

سپاسگزاری

سپاس خدای را به کل آن سپاسی که نزدیک‌ترین ملائکه به او، و گرامی‌ترین آفریدگان نزد او، و پسندیده‌ترین ستایش‌گران آستان او، وی را ستوده‌اند. سپاسی بالاتر از سپاس دیگر سپاسگزاران مانند برتری پروردگارمان بر تمام مخلوقات، و او را سپاس و حمد در برابر تمام نعمت‌های او که به ما و به بندگانش که در گذشته بوده‌اند و باقی بندگانش که هستند و می‌آیند دارد. سپاسی به عدد تمام اشیاء که دانش او بر آن احاطه دارد، سپاسی که حدش را پایانی، و شماره آن را حسابی، و پایان آن را نهایتی، و مدت آن را انقطاعی نباشد، سپاسی که باعث رسیدن به طاعت و بخشش او، و سبب رضا و خشنودی او، و وسیله آمرزش او، و راه به سوی بهشت او، و پناه از انتقام او، و ایمنی از غضب او، و یار و مددکار بر طاعت او، و مانع از معصیت او، و کمک بر اداء حق و وظائف حضرت او باشد. سپاسی که به سبب آن در گروه نیک‌بختان از دوستان درآییم، و در سلک شهیدان به شمشیر دشمنانش قرار گیریم، که همانا حضرت او یاری دهنده و ستوده است.

امام سجاد علیه السلام، (صحیفه سجادیه)

در اینجا بر خود لازم می‌دانم، از استاد عزیز وگرانمایه‌ام جناب آقای دکترمحمد علی جعفری زاده که راهنمایی پایان‌نامه بنده را در طی این مدت قبول نموده‌اند، و از اقای دکتر اکبر کور بلاغ که مشاوره ی این پایانامه را داشتند، نهایت تشکر وقدردانی را می نمایم و از تمام کسانی که برایم زحمت کشیده و همیشه دعاگوی من بوده‌اند، کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی: زنده روح روانلو **نام**: امیر

عنوان پایان‌نامه: تخمین حالت ها وکانال های کوانتومی

استاد راهنما: دکترمحمد علی‌جعفری زاده

استاد مشاور: دکتریحیی اکبری کوربلاغ

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: فیزیک **گرایش**: نظری

دانشگاه: تبریز **دانشکده**: فیزیک **تاریخ فارغ التحصیلی**: بهمن ۹۰ **تعداد صفحه**:۱۱۱

کلید واژه‌ها: تابع توزیع، برآوردگر، آنباياس، کیوبیت، تخمین، حالت

چکیده: تعیین حالات سیستم با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری (اطلاعات محدود) یکی از مباحث بسیار مهم و کاربردی رشته های مهندسی و فیزیک کاربردی هستند. همین طور، تخمین کانال های کوانتومی اهمیت زیادی در میدان اطلاعات کوانتومی دارند. بیشتر فرایندهای اطلاعات کوانتومی می‌توانند بصورت کانال های کوانتومی نمایش داده شوند به ویژه تخمینی که همراه با کمترین خطا باشد. حد «کرامر- راو» این ارزیابی را انجام می‌دهد. در این تحقیق به بررسی تخمین حالات و کانال ها، با استفاده از پارامتریزه کردن و بررسی دقت تخمین پارامترها پرداخته‌ایم. به طور کلی، در تخمین، دو مقوله بحث شده است. اول اینکه چطور اندازه‌گیری ها را انجام دهیم یا به اصطلاح کوانتومی، از چه عملگرهای اندازه‌گیری بهره گیریم. دوم، چگونه داده های اندازه‌گیری شده را پردازش کنیم. در این پایان‌نامه سعی شده است تخمین هایی از ماتریس های چگالی بررسی شود طوریکه در تخمین هایی از ماتریس چگالی، دنبال بهترین عملگرهای اندازه‌گیری و بهترین پردازش ممکن هستیم. ما در این پایان‌نامه، به دنبال طراحی بهترین عملگرهای اندازه‌گیری ممکن هستیم که از نابرابری «کرامر- راو» کوانتومی به دست می آیند. ولی در اکثر موارد، این عملگرها به خاطر اینکه تابع پارامتر تخمینی هستند نمی توانند در آزمایشگاه طراحی شوند. به خاطر همین مشکل، استراتژی را عوض کرده و به دنبال طراحی عملگرهای اندازه‌گیری از روش دیگری چون، میانگین‌گیری از واریانس پارامتر و مینیمم کردن آن هستیم. عملگرهای اندازه‌گیری به دست آمده، می توانند در طراحی آزمایشگاهی استفاده شوند. در حالت های تک کیوبیتی این استراتژی کارساز است ولی در حالت های ۲ کیوبیتی با عملگرهای اندازه‌گیری مواجه می شویم که لوکال نیستند. بنابراین، در انتها، اندازه‌گیری ها را روی حداقل عملگرهای اندازه‌گیری قابل دسترسی و حداکثر عملگرهای

اندازه‌گیری قابل دسترسی انجام می دهیم. در هر مرحلهٔ طراحیِ عملگرهای اندازه‌گیری، شبیه‌سازی-هایی با استفاده از این عملگرهای اندازه‌گیری برای تخمین پارامتر انجام شده است.

فهرست

عنوان **صفحه**

مقدمه ۱

فصل اول:

بررسی منابع

۱-۱ تخمین کانال ۳

۱-۲ تخمین حالت ٤

۱-۳ تخمین کوانتومی حالت ٥

فصل دوم:

مبانی و روش ها

۲-۱ پردازش داده های تصادفی ۳۲

۲-۲ حالت ها ۳٤

۲-۳ اندازه گیری ها ۳٦

۲-٤ کانال های کوانتومی ۳۹

۲-٥ اطلاعات فیشر و نابرابری کرامر- راو ٤۳

۲-٥-۱ مورد تک پارامتری ٤۳

۲-٥-۲ مورد چند پارامتری ٤۷

۲-٦ تکنیک ماکزیمم احتمال ٤۸

۲-۷ تناظر بین برآوردگرهای کارآمد آنباياس و برآوردگرهای ماکزیمم احتمال: ٤۹

۲-۸ اطلاعات کوانتومی ٥۰

۲-۸-۱ مدل های چند پارامتری ٥٤

۲-۹ تخمین کوانتومی پارامتر ٥٥

۲-۹-۱ تشخیص اندازه گیری های بهینه با استفاده از کرامر- راو کوانتومی ٥٥

۱-۱-۹-۲ کرامر- راو کوانتومی و استفاده از آن برای تشخیص اندازه گیری ها بهینه ۵۵
۲-۱-۹-۲ مثال: خانواده های یکانی و حالت های خالص ۶۰
۳-۱-۹-۲ عملیات کوانتومی ۶۲
٤-۱-۹-۲ مدل های چند پارامتری و دوباره پارامتر سازی ۶۳
۵-۱-۹-۲ هندسه ی تخمین کوانتومی ۶٤
٦-۱-۹-۲ نابرابر براون اشتاین-کوس ٦٦
۲-۹-۲ تشخیص اندازه گیری های بهینه با میانگین گیری واریانس ۷۱
۱-۲-۹-۲ تمامیت ۷۱
۲-۲-۹-۲ عملگرهای اندازه گیری یک کیوبیتی ۷۳
۳-۹-۲ توموگرافی ۷۹
۱-۳-۹-۲ نمایش حالتهای تک کیوبیتی ۷۹
۲-۳-۹-۲ توموگرافی سیستم های فوتونی ۸۱
۳-۳-۹-۲ ویوپلیت ها و شکافنده ی پرتو قطبشی ۸۷

فصل سوم:

نتایج و بحث

۳-۱ تخمین ماتریس چگالی تک کیوبیتی، با تک پارامتر ٦۰
۳-۲تخمین ماتریس چگالی تک کیوبیتی با چند پارامتر ٦٦
۳-۳ تعمیم عملگرهای اندازه گیری بهینه به ۲- کیوبیت: ۷۳
۳-۳-۱ تعمیم طراحی عملگر های اندازه گیری بهینه ی تک پارامتری به ۲-کیوبیت با کرامر-راو کوانتومی، ۷٤
۳-۳-۲ تعمیم طراحی عملگرهای اندازه گیری بهینه برای تخمین پارامترهای ماتریس چگالی ۲-کیوبیتی با استفاده از مینیمم کردن واریانس میانگین ۷٤
۳-٤ تخمین ماتریس چگالی دو کیوبیتی با ۱٦ عملگر اندازه گیری ۸۰
۳-۵ تخمین ماتریس چگالی ۲-کیوبیتی با ۹ ست POVM، که ۳٦ عملگر اندازه گیری می شود ۹۹
نتایج و پیشنهادات ۱۱۰

مقدمه:

تخمین پارامتری که متمرکز به ریاضیات آمار ریاضی هست، یک مسئله ی بنیادی نظریه ی اطلاعات است. هدف اصلی اش، ساخت وتعیین روش هایی که می تواند مقادیر پارامترهای یک منبع اطلاعاتی ویا یک کانال ارتباطی را تخمین بزند. برخلاف سناریوی معمول نظریه ی اطلاعات که منبع وکانال دقیقا شناخته شده هستند،ما حالا با یک منبع ویا کانالی سرو کار داریم که وابسته به تعدادی پارامتر شناخته نشده هست. مفهوم "خانواده ای از توزیع با پارامتر"تا اواخر قرن بیستم [۱] جا نیافتاده بود. آمارشناسان استدلال کردند تا روشهای مختلفی برای استنباط هایی حول پارامترها، نظیر برآوردگر ماکزیمم احتمال، برآوردگر بیزی وغیره بسازند. در همان زمان یک نابرابری مهم (نابرابری کرامر–راو)کشف شد، که حد پایین تر واریانس هربرآوردگر را در عبارت های "اطلاعات فیشر"[۳,۲] می‌داد. فیشر نشان داده بود که برآوردگرهای ماکزیمم احتمال، می توانند حد پایین تر را به طور مجانبی بدست دهند. با این استنباط، نابرابری اساسی کرامر–راو، برای نظریه ی تخمین ساخته شد. این نتایج از آمار تاکنون برای مسائل گوناگون نظریه ی اطلاعات بکار برده شده است.به دلیل اینکه مکانیک کوانتومی یک مدل دقیق تر از توصیف واقعیت را دارد، بنابراین ضروری است مطالعه ی نظریه ی تخمین بطور مستقیم برای مکانیک کوانتومی، بجای مدل های تجربی در آمار، بکار رود. هیلستروم وهولوودرمطالعه ی نظریه ی تخمین در زمینه ی کوانتومی پیشقدم بودند. نسخه کوانتومی نابرابری کرامر–راو در مراجع [۵,٤] ایجاد شد. این نابرابری توسط براون اشتاین، کوس و میلبورن برای حد پایین تر نشان داده شده بود. این نابرابری دارای مفاهیم بنیادی در فیزیک است، که دقیقا به انحراف اطلاعات پیشنهاد شده توسط ویگنر و یانیس [۷,٦] مربوط می شود. هم چنین به نسخه ی پارامتریی عدم قطعیت هایزنبرگی[۵] اشاره دارد.

تعیین حالات سیستم بااستفاده از مقادیر اندازه‌گیری (اطلاعات محدود)یکی از مباحث بسیار مهم و کاربردی رشته های مهندسی و فیزیک کاربردی هستند، همین طور، تخمین کانال های کوانتومی، اهمیت زیادی در میدان اطلاعات کوانتومی دارند. بیشتر فرایندهای اطلاعات کوانتومی می توانند بصورت کانال های کوانتومی نمایش داده شوند. به ویژه تخمینی که همراه با کمترین خطا باشد، که لازم است حد های را تامین کند. حد کرامر–راو این ارزیابی را انجام می دهد، ما به بررسی تخمین حالات وتخمین کانال های با استفاده از پارامتریزه کردن وبررسی دقت تخمین پارامترها خواهیم پرداخت.

فصل اول:

بررسی منابع

۱-۱ تخمین کانال

یک کانال کوانتومی یک نگاشتی از ماتریس های چگالی به ماتریس های چگالی است. تخمین کانال های کوانتومی از اهمیت زیادی در میدان اطلاعات کوانتومی دارد،بیشتر فرایندهای اطلاعات کوانتومی می توانند بصورت کانال های کوانتومی نمایش داده شوند. اغلب، کانال های کوانتومی بصورت از قبل شناخته شده نیستند و تخمین زدن آنها اهمیت زیادی دارد. چندین روش برای تخمین یک کانال کوانتومی وجود دارد؛ یک رهیافت فرایند کوانتومی، توموگرافی هست که در مرجع [۸] بحث می شود. برای این رهیافت، لازم است تخمین بزنیم که چگونه کانال ها روی پایه های مختلف فضای هیلبرت بعلاوه روی ترکیب های خطی وابسته به ان عمل می کنند. در بیشتر وضعیت های کاربردی تهیه ی این حالت های ورودی در ازمایشگاه ممکن نیست [۹]. رهیافت دیگر بدین صورت است که فرض کنیم، کانال از یک خانواده ای از کانال های پارامتری داده شده است، خانواده ای از کانال های پارامتری را می شود توسط یک پارامتر حقیقی θ، بصورت $\rho_0 \to \sum_k E_k(\theta)\rho_0 E_k^t(\theta)$ نمایش داد. هنگام تخمین یک کانال کوانتومی فاکتورهای مختلف زیادی در نظر گرفته می شود نظیر چگونه کانال ها مرتب شوند وچه ترکیبی از حالت ورودی براوردگر POVM بهترین است. ایده ی پیدا کردن حالت ورودی بهینه توسط مرجع[۱۰] درنظر گرفته شد است. به طور کلی، برای یک خانواده از کانالهای پارامتری، حالتهای ورودی متفاوت به خانواده ای از حالتهای خروجی متفاوت منجر می شوند. حالت ورودی به گونه ای انتخاب می شود که خانواده ای از حالت‌های خروجی با ماکزیمم اطلاعات کوانتومی قابل دسترسی را بدهد.

۲-۱ تخمین حالت

شاید بنیادی ترین مسئله در استنباط آمار کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی ساخت ماتریس چگالی یک سیستم کوانتومی، روی پایه هایی با تعداد محدود از مشاهدات کوانتومی است. به علت توجه روزافزون به محاسبات کوانتومی و کنترل کوانتومی، توانایی بازیافت ماکزیمم مقدار اطلاعات درباره یک حالت کوانتومی بر اساس کوچکترین تعداد اندازه گیری ها یکی از مهمترین موضوعات است، دقیق شدن روی همه شکل‌های مشتق از استنباط آمار کوانتوم، شامل فرایند تخمین، درنهایت توسط اصول تخمین حالت تعیین می شود. روشهایی برای تخمین حالت کوانتومی را می توان به سه دسته تقسیم کرد:۱)توموگرافی وارون سازی[٤]، که کمترین محاسبات وعمومی ترین تکنیک است. به هر حال توموگرافی وارون سازی، نمی تواند محدودیت هایی روی ماتریس چگالی در طی تخمین اجرا کند، وبنابراین تابع استنباط اماری سختی نیست. ۲) دسته دوم، تکنیک های فراوانی گرا[1] هستند که استنباط بر اساس تابع احتمالی است، برجسته ترین روش در این تکنیک، تخمین[۱] ماکزیمم احتمال است. این دسته از روشها از مسائل وابسته به توموگرافی اجتناب می کند، اما با این وجود نتایج توزیعی را برای برآوردگرهای پارامترهای مورد علاقه تحت فرض یک تعداد متناهی از اندازه‌گیری ها انجام می دهد. بنابراین برای اندازه های تعداد متناهی از نمونه، فاصله های اطمینان تخمینی برای پارامترها ممکن است دقیقا پوشش کاملا متفاوت از تناظر مجانبی انها داشته باشد، به طوری که در ادبیات آماری خوب شناخته شده است، همه شکلهای استنباط فراوانی گرا، شامل توموگرافی وارون سازی و ماکزیمم احتمال ، به یک رده مشاهده کامل یعنی N^2-1 عملگر مشاهده پذیر مستقل خطی (N بعد فضای هیلبرت است) به منظور تخمین همه پارامترها، نیاز دارند. ۳) نوع سوم، تخمین بیزی[۸,۹,۱۱,۱۲,۱۳]که هست به روز رسانی یک توزیع معقول قبلی حول پارامترها،

[1] frequentist

براساس داده های مشاهده شده می باشد. در آمار کلاسیکی، همچنین در نظریه کوانتومی مشاهدات همیشه قابل پیش بینی نیستند اما انها به طور تصادفی توزیع می شوند. در نظریه تخمین یک هدف حدس زدن توزیع اصولی از مشاهدات تصادفی از داده های اماری است. بویژه ما علاقه مند هستیم، توزیع های درست ممکن را توسط، یک تعداد پارامترθ،از یک مجموعه یΘ پارامتریزه کنیم، وما سعی می کنیم تا یک تک مقداری برای θ (یعنی یک تخمین نقطه ای) که یک تقریب خوبی می دهد را پیدا کنیم. آمار کوانتومی را که ما در نظر می‌گیریم، یک خانواده ای از عملگرهای چگالی پارامتریزه شده توسط یک پارامتر از یک مجموعه یΘ است. همانطوری که در مورد کلاسیکی هدف نظریه تخمین پیدا کردن یک تخمین از پارامتر θ ازنتیجه مشاهدات سیستم هست. برای این هدف ما یک نمونه ازN کپی یکسان از یک حالت ρ(θ) ازسیستم کوانتومی را در نظر می گیریم. به منظور بدست اوردن داده های ازمایشگاهی ما نیاز داریم مشخص کنیم یک مجموعه از اندازه‌گیری هایی که ما روی نمونه انجام می دهیم. از داده های آماری بدست آمده و از نتیجه اندازه گیری ها، ما تشکیل یک تخمینی از یک حالت درستی از سیستم می کنیم، بنابراین یک شکل تخمین کوانتومی معمولا تشکیل می شود از گامهای زیر:

$$\rho_\theta : \theta \in \Theta \xrightarrow{N\ copy\ of\ \rho_\theta} \text{اندازه گیری روی کپی ها} \rightarrow \text{داده ها} \ (a_1, a_2, ...) \rightarrow \text{تخمین}\ \hat{\theta}$$

۳-۱ تخمین کوانتومی حالت

تکنیک تخمین حالت، روشی است که توصیف کاملی از یک سیستم را فراهم می کند، یعنی ان ماکزیمم دانش ممکن از حالت را دست می یابد، بنابراین این تکنیک دنبال می شود تا بهترین پیش بینی از نتایج هر اندازه گیری، که ممکن است روی سیستم انجام گیرد، را انجام دهد. خطی بودن مکانیک کوانتومی[۱۴] و عدم قطعیت هایزنبرگی[۱۵] مانع از ان هستند که یک روشی متشکل از چند

اندازه‌گیری ساخته شود تا بطور کامل حالت سیستم بدست آورده شود. در دهه ی اخیر به مسئله ی پی بردن حالت یک سیستم از اندازه‌گیری ها، به علت توسعه های جدید در زمینه ی تکنیک های ازمایشی و پیشرفت در تکنولوژی اطلاعات کوانتومی، توجه زیادی شده است. از انجایی که نتایج هر اندازه‌گیری با خطاهایی همراه است، تلاش بر ان است تا خطاها به حداقل برسد. به هر حال دقت هر روش اندازه‌گیری به قانون بنیادی آمار و مکانیک کوانتومی محدود می شود، به منظور تخمین بهینه از مقدار بعضی از پارامترها، تلاش بر ان است تا از ابزار هایی که توسط نظریه ی تخمین کوانتومی فراهم شده است، بهره برداری شود[١٦,١٧,١٨].

به عنوان یک حقیقت، کمیت های مورد علاقه ی زیادی متناظر با مشاهده پذیرهای کوانتومی، نیستند. مثال های مربوطه می تواند در هم تنیدگی یا خلوص یک حالت کوانتومی[١٩] یا ثابت کوپلاژ یک هامیلتونی بر هم کنشی باشد. در این وضعیت نیاز هست تا به مقدار یک پارامتر از میان اندازه‌گیری ها ی غیر مستقیم پی برده شود. دو نمونه ی اصلی در نظریه ی تخمین کوانتومی [1] وجود دارد:١) نظریه ی تخمین کوانتومی جهانی[2] که دنبال POVM هایی است تا یک تابع ارزشی مناسب را مینیمم کند، نتیجه ی بهینه سازی جهانی، تک POVM مستقل روی مقدار پارامتری هست. ٢) نظریه ی تخمین کوانتومی محلی[3] دنبال POVM هایی است تا اطلاعات فیشری را ماکزیمم کند طوریکه در یک مقدار ثابت از پارامتر بدست امده واریانس براوردگر پارامتر را مینیمم می کند [٢٠,٢١,٢٢].

[1] quantum estimation theory (QET)
[2] global QET
[3] local QET

قطع نظر از جزئیات، کسی ممکن است اعتقاد داشته باشد که QET محلی عملکرد بهتری دارد چون بهینه سازی هم به یک مقدار ویژه از پارامتر مربوط می شود وهم تعدادی مکانیسم از میزان دقت قابل حصول از حد نهایی تخمین وجود دارد.

QET محلی به طور موفقیت آمیزی برای تخمین فاز کوانتومی[۲۲] ومسائل تخمین با سیستم های کوانتومی باز از قبیل تخمین بهینه ی پارامتر نویزی از نور غیر قطبشی[۲۳] برای سیستم های متغیرهای تصادفی، تخمین پارامتر اتلافی یک کانال کوانتومی [۲٤,۲٥,۲٦]، هم چنین چگونگی یک تک فوتون[۲۱] بهره برداری می شود.

اخیرا، ساختار هندسی با اطلاعات فیشری معرفی می شود که برای تفسیر موثر کمی درهم تنیدگی چند قسمتی بهره برداری می شود[۲۷] و شاخص کوانتومی برای ارزیابی یک وسیله ای تخمین کوانتومی است[۲۸].در تخمین مقدار یک پارامتر، اطلاعات فیشری تعریف می شود که یک فاصله ی بی نهایت کوچک را از میان توزیع های احتمالی و یک دقت بالای دست یافتنی با یک برآوردگر را به وسیله ی قضیه کرامر- راو نمایش می دهد. همتای کوانتومی اش، اطلاعات فیشر کوانتومی است(QFI) که به درجه آماری قابل تشخیص از یک حالت کوانتومی، در همسایگی اش مربوط می شود و ان با متریک بوری، معادل حالت های کوانتومی بدست می آید[۳٤ – ۲۹].

فصل دوم:

مبانی و روشها

۲-۱ پردازش داده های تصادفی

برای آشنایی با موضوع پردازش داده های تصادفی، داشتن اطلاعاتی در مورد تئوری احتمال ضروری است. در ابتدای این بخش برخی از تعاریف مهم در این زمینه مرور می شوند. عملی که نتیجهٔ انجام آن از پیش مشخص نباشد **آزمایش تصادفی** نامیده می شود(مانند پرتاب سکه). مجموعهٔ کلیهٔ نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی فضای نمونه نامیده می شود(در مورد مثال پرتاب سکه فضای نمونه $S = \{\text{شیر} ، \text{خط}\}$ است). هر زیر مجموعه از فضای نمونه **پیشامد** نامیده می شود. اگر آزمایش تصادفی مورد نظر n بار تکرار شود و در طی آن پیشامد A به تعداد $n(A)$ بار ظاهر شود، احتمال وقوع پیشامد A به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \qquad (۲-۱-۱)$$

متغیر تصادفی یک مفهوم مهم در تئوری احتمال است که علی رغم اسم خود نه متغیر است و نه تصادفی بلکه تابعی است از فضای پیشامد به فضای اعداد حقیقی. **میانگین یا امید ریاضی** متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$E\{X\} = \sum_i x_i P(X = x_i) \qquad (۲-۱-۲)$$

واریانس متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \qquad (۲-۱-۳)$$

برای مثال، پرتاب همزمان دو سکه را در نظر بگیرید. فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی سه عضو دارد در جدول(۲-۱)، T نشان دهندهٔ خط و H نشان دهندهٔ شیر است. متغیر تصادفی X به هر یک

از این پیشامدها یک عدد حقیقی شامل ۰ ، ۱ و ۲ نسبت می دهد. احتمال وقوع هر x_i به صورت $p_i = P(X = x_i)$ نشان داه شده است.

	x_i	$p_i = P(X = x_i)$
TT→	0	.25
HT, TH→	1	.50
HH→	2	.25
	sum	1.00

جدول ۱-۲: نمایش فضای نمونه و متغیر تصادفی X

مقادیر میانگین و واریانس متغیر تصادفی X در جدول(۲-۲) نشان داده شده است.

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2 p_i$
0	.25	.00	-1	.25
1	.50	.50	0	.00
2	.25	.50	1	.25
Total	1.00	$\mu = 1.00$		$\sigma^2 = .50$

جدول ۲-۲: مقادیر میانگین و واریانس متغیر تصادفی X

برای متغیر تصادفی X تابع توزیع احتمال به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_X(\alpha) = P(X \le \alpha) \qquad (۲-۱-٤)$$

تعریف تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X چنین است:

$$f_X(\alpha) = \frac{\partial F_X(\alpha)}{\partial \alpha} \qquad (۲-۱-٥)$$

فرایند تصادفی قاعده ای است که به خروجی پیشامد تصادفی تابعی را نسبت می دهد یا به عبارتی فرایند تصادفی دنباله ای از متغیرهای تصادفی است.

برآوردگر[1]:یک برآوردگر، یک تابعی مانند T است که وابسته به n متغیر تصادفی $X_1, X_2, ... X_n$ هست که تقریبی خوبی از مقدار پارامتر مجهول را میدهد .وما اختلاف θ-Tرا خطای براوردگر می نامیم واین خطا نیز یک متغییر تصادفی است .

برآوردگر بایاس[2] و آنبایاس[3]: برآوردگری، انبایاس گفته می شود، اگر مقدار چشم داشتی برآوردگر، برابر با پارامتر باشد، یعنی $[E_\theta T = \theta]$. در غیر این صورت، یعنی $[E_\theta T \neq \theta]$، برآوردگر بایاس نامیده می شود. زیر نویس θ چشم داشتی نسبت به چگالی $p(x;\theta)$ است.

۲-۲ حالت ها

ابتدا حالت های خالص معرفی خواهند شد. حالت های خالص یک زیر مجموعه ای از مجموعه ی همه ی حالت های کوانتومی است. یک حالت خالص d بعدی می تواند توسط یک تک بردار مختلط d بعدی $|\psi\rangle$ نمایش داد. برای θ حقیقی، بردارهای $|\psi\rangle$ و $e^{i\theta}|\psi\rangle$ حالت یکسانی را نمایش می دهند.

بطور کلی تر، یک حالت کوانتومی d بعدی توسط یک ماتریس $d \times d$ با نماد ρ نمایش داده می شود، که ماتریس چگالی نامیده می شود. این یک عملگر خطی است که روی یک فضای هیلبرت مختلط H عمل می کند، که غیر منفی هست $(v^T \rho v \geq 0 \ \ \forall \ \ v \in R^d)$ و رد برابر با یک دارد. یک نتیجه از غیر منفی بودن ρ خود الحاقی بودن ان است.

[1] estimator
[2] bias
[3] unbiased

مجموعه ای از حالت ها، در یک فضای هیلبرت مختلط H با S(H) مشخص می شود.

یک حالت خالص می تواند هم با بردار حالت $|\psi\rangle$ و هم با ماتریس چگالی $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ نمایش داده شود. برای مثال،

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad \rho=|\psi\rangle\langle\psi|=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (۲-۲-۱)$$

حالت های که خالص نیستند(مرتبه ای بیشتر از یک دارند) حالت های مخلوط نامیده می شوند. یک تست ساده برای اینکه ایا حال ρ خالص است یا مخلوط، گرفتن رد از ρ^2 است. برای حالت های خالص $tr(\rho^2)=1$ وبرای حالت های مخلوط $tr(\rho^2)<1$ است.

مثال های از حالت های خالص۲ بعدی عبارتند از:

$$\rho_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\qquad \rho_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}. \qquad (۲-۲-۲)$$

یک حالت مخلوط می تواند بصورت یک ترکیبی از حالت های خالص، در روشهای متفاوت زیادی بیان شود. برای نمونه، حالت ρ_1 داده شده در $(۲-۳-۲)$، می تواند بصورت های زیر نوشته شود،

$$\begin{aligned}\rho_1&=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$