باسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ

سخنران: مریم رجایی ریزی

زمان: دوشنبه ۲ /۱۱/ ۹۱ ساعت ۴ عصر
مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– پروفسور رسول نصر اصفهانی

۲– دکتر اعظم اعتماد

۳– دکتر سیما سلطانی رنانی

۴– دکتر محمدرضا کوشش

چکیده
در این پایان‌نامه به معرفی و مطالعه‌ی تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ $\mathcal{A}$، که آن را با $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم می‌پردازیم، و ارتباط آن را با نمایش جبرهای باناخ بررسی می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف و تابعک‌های متناوب تقریبی؛ یعنی $\mathrm{ap}(\mathcal{A})$ و برخی ویژگی‌های موروثی آن را بیان می‌کنیم و به عنوان نمونه فضای تابعک‌های متناوب تقریبی را روی برخی از جبرهای باناخ به دست می‌آوریم. همچنین با توجه به ارتباط $\mathrm{wap}(L^1(G))$ و توابع متناوب تقریبی ضعیف روی گروه G؛ یعنی $\mathrm{wap}(G)$ نتایج خوبی را روی $L^1(G)$ می‌گیریم. سرانجام با توجه به اینکه $M(G)^*$ یک جبر هاف فون نویمن جابه‌جایی است و $\mathrm{wap}(L^1(G))$ یک C^*–زیرجبر از $L^\infty(G)$ است، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{wap}(M(G))$ یک C^*–زیرجبر از $C_0(G)^{**} = M(G)^*$ است.
رده‌بندی موضوعی: اولیه ۴۳A۱۰، ۴۶L۸۹. ثانویه ۴۳A۲۰، ۴۳A۶۰، ۸۱R۵۰.
کلمات کلیدی: تابعک‌های متناوب تقریبی، جبر باناخ، جبر گروهی، جبر اندازه، جبر هاف فون نویمن.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز هارمونیک)

مریم رجایی ریزی

استاد راهنما

پروفسور رسول نصر اصفهانی

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز هارمونیک) مریم رجایی ریزی
تحت عنوان

تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ

در تاریخ ۹۱/ ۱۱/ ۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنما	پروفسور رسول نصر اصفهانی
۲- استاد مشاور	دکتر اعظم اعتماد
۳- استاد داور۱	دکتر سیما سلطانی رنانی
۴- استاد داور۲	دکتر محمدرضا کوشش

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

الهی!

نور تو، چراغ معرفت بیفروخت، دل من افزونی ست.

گواهی تو، ترجمانی من بکردند، ندای من افزونی ست.

قرب تو چراغ وجد بیفروخت، همت من افزونی ست.

بود تو کار من راست کرد، بود من افزونی ست.

اکنون که در پرتو لطف و عنایت پروردگار سبحان انجام این پژوهش میسر گردید، شایسته است از تمام عزیزانی که در انجام این امر مرا یاری داده اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از پدر و مادر عزیزم، اولین و بزرگترین معلمان زندگیم که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق های روشن را در دلم شکوفا ساختند از صمیم قلب سپاس گزارم.

زلال ترین سپاس ها را به همسر عزیزم که همواره مایه دلگرمی و آرامش من بوده، تقدیم می نمایم.

از جناب آقای پروفسور نصر اصفهانی استاد راهنمای بزرگوارم که در طول انجام این پایان نامه با نهایت صبوری همواره راهنما و مشوق من بوده اند، صمیمانه سپاس گزارم. دیدگاه های علمی و معنوی ایشان همیشه روشنگر راه من بوده و افتخار شاگردی شان، فرصتی بی نظیر و ارزشمند برای یاد گرفتن درس های علم و زندگی بوده است.

از سرکار خانم دکتر اعتماد استاد مشاور ارجمندم که از نظرات و راهنمایی های ایشان بهره ها بردم، کمال تشکر را دارم.

از سرکار خانم دکتر سلطانی و جناب آقای دکتر کوشش که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

و در نهایت، از تمامی دوستان خوبم که آشنایی و همراهی شان فرصتی تکرار ناشدنی بوده است، سپاس گزارم.

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به دو ستاره ی کوچک

اما به درخشندگی خورشید

در آسمان زندگی ام

غزل و علی

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه به معرفی و مطالعه‌ی تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ $\mathcal{A}$، که آن را با $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم می‌پردازیم، و ارتباط آن را با نمایش جبرهای باناخ بررسی می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف و تابعک‌های متناوب تقریبی؛ یعنی $\mathrm{ap}(\mathcal{A})$ و برخی ویژگی‌های موروثی آن را بیان می‌کنیم و به عنوان نمونه فضای تابعک‌های متناوب تقریبی را روی برخی از جبرهای باناخ به دست می‌آوریم. همچنین با توجه به ارتباط $\mathrm{wap}(L^1(G))$ و توابع متناوب تقریبی ضعیف روی گروه G؛ یعنی $\mathrm{wap}(G)$ نتایج خوبی را روی $L^1(G)$ می‌گیریم. سرانجام با توجه به اینکه $M(G)^*$ یک جبر هاف فون نویمن جابه‌جایی است و $\mathrm{wap}(L^1(G))$ یک C^*-زیرجبر از $L^\infty(G)$ است، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{wap}(M(G))$ یک C^*-زیرجبر از $M(G)^* = C_0(G)^{**}$ است.

رده‌بندی موضوعی: اولیه $۴۳A۱۰$، $۴۶L۸۹$. ثانویه $۴۳A۲۰$، $۴۳A۶۰$، $۸۱R۵۰$.

کلمات کلیدی: تابعک‌های متناوب تقریبی، جبر باناخ، جبر گروهی، جبر اندازه، جبر هاف فون نویمن.

فصل ۱

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی و $C_b(G)$ فضای توابع پیوسته و کران‌دار روی G را نمایش دهد. منظور از یک تابع متناوب تقریبی ضعیف روی G تابعی است در $C_b(G)$ به طوری که مجموعه‌ی انتقال‌های چپ(راست) آن در $C_b(G)$ فشرده‌ی ضعیف نسبی باشد؛ یعنی بستار $\{L_s f : f \in C_b(G), s \in G\}$ در $C_b(G)$ فشرده‌ی ضعیف باشد. مجموعه‌ی همه‌ی توابع متناوب تقریبی ضعیف روی G را با $\mathrm{wap}(G)$ نمایش می‌دهیم.

توابع متناوب تقریبی ضعیف برای اولین بار در سال ۱۹۴۹ توسط ابرلین در [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفت. این معرفی موازی با تعریف یک تابع متناوب تقریبی است؛ یعنی توابعی در $C_b(G)$ که مجموعه‌ی انتقال‌های چپ آن در $C_b(G)$ فشرده‌ی نسبی است در ضمن

$$\mathrm{ap}(G) \subseteq \mathrm{wap}(G)$$

.

که در آن $\mathrm{ap}(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع متناوب تقریبی روی G را نمایش می‌دهد. وی نشان داد که مجموعه‌ی $\mathrm{wap}(G)$ یک زیرفضای خطی بسته از $C_b(G)$ و تحت انتقال پایا و تحت مزدوج مختلط است. برای اثبات اینکه فضای $\mathrm{wap}(G)$ یک جبر است، ابرلین از این واقعیت استفاده کرد که زیرمجموعه‌های کراندار $C_b(G)$ فشرده ضعیف نسبی هستند، هرگاه فشرده‌ی دنباله‌ای ضعیف نسبی باشند.

بعدها در سال ۱۹۵۶، ابرلین نشان داد که فضای $\mathrm{wap}(G)$، یک مجموع مستقیم از فضای توابع متناوب تقریبی روی G و فضای $w_\circ(G) = \{f \in \mathrm{wap}(G) : m \mid f \mid = \circ\}$ است؛ یعنی

$$\mathrm{wap}(G) = \mathrm{ap}(G) \oplus w_\circ(G).$$

فضاهای $\mathrm{ap}(G)$ و $\mathrm{wap}(G)$، C^*-زیرجبرهای یکدار و جابجایی از $C_b(G)$ و در نتیجه از فضای $L^\infty(G)$ هستند.

وانگ در سال ۱۹۶۹ در [۳۳] نشان داد که $\mathrm{wap}(G) \subseteq LUC(G)$ و بنابراین

$$\mathrm{ap}(G) \subseteq \mathrm{wap}(G) \subseteq LUC(G) \subseteq C_b(G) \subseteq L^\infty(G).$$

و همچنین

$$C_\circ(G) \subseteq \mathrm{wap}(G).$$

برکل در سال ۱۹۷۰ در [۶] ثابت کرد که $\mathrm{wap}(G) = C_b(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد. همچنین وی نشان داد هرگاه G یک گروه آبلی غیرفشرده و فشرده‌ی موضعی باشد، آنگاه

$$C_\circ(G) \subsetneqq w_\circ(G).$$

گرنیرر در سال ۱۹۷۲ در [۲۰] نشان داد که $\mathrm{wap}(G) = UC(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.
برگوند در سال ۱۹۸۹ در [۲] نشان داد که $C_\circ(G) \subseteq \mathrm{ap}(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد. بنابراین اگر G فشرده باشد، آنگاه

$$C_\circ(G) = \mathrm{ap}(G) = \mathrm{wap}(G) = UC(G) = C_b(G).$$

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ، $\mathcal{A}^*$ دوگان آن و $B_{\mathcal{A}}$، گوی یکه‌ی بسته‌ی آن باشد. برای $f \in \mathcal{A}^*$ و $a \in \mathcal{A}$، تابعک خطی $f \cdot a \in \mathcal{A}^*$ را برای هر $b \in \mathcal{A}$ به صورت $(f \cdot a)(b) = f(ab)$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$H(f) := \{f \cdot a : a \in B_{\mathcal{A}}\},$$

تابعک خطی f را روی $\mathcal{A}$ متناوب تقریبی (متناوب تقریبی ضعیف) می‌نامیم هرگاه بستار $H(f)$ در $\mathcal{A}^*$، فشرده (فشرده‌ی ضعیف) باشد. فضای توابع متناوب تقریبی روی $\mathcal{A}$ را با $\mathrm{ap}(\mathcal{A})$ و فضای توابع متناوب تقریبی ضعیف روی $\mathcal{A}$ را با $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. $\mathrm{ap}(\mathcal{A})$ و $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ زیرفضاهای بسته از $\mathcal{A}^*$ هستند و

$$\mathrm{ap}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{wap}(\mathcal{A}).$$

ارتباط بین تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف و نمایش جبرهای باناخ در سال ۱۹۷۶ و ۱۹۷۷ توسط یانگ در [۳۴]، و در سال ۱۹۸۱ توسط کایسر در [۲۳] مورد بررسی قرار گرفت. کارهای متعدد دیگری نیز در سال‌های اخیر روی تابعک‌های متناوب تقریبی روی جبرهای باناخ انجام شده است؛ برای مثال در سال ۲۰۱۰ توسط دیلز در [۱۰] و در سال ۱۹۹۲ توسط دانکن در [۱۶] و در سال ۱۹۸۳ توسط لائو در [۲۵] را می‌بینیم.

از جمله در سال ۲۰۱۰ داوز در [۱۲] به مطالعه‌ی تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبر گروهی اندازه‌ی $M(G)$ پرداخت. و نشان داد که $\mathrm{wap}(M(G))$ یک C^*-زیرجبر از $M(G)^* = C_\circ(G)^{**}$ است.

هدف این پایان‌نامه که شامل چهار فصل است، معرفی و مطالعه‌ی تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبرهای باناخ و کاربرد آن روی جبرهای گروهی است.

فصل اول، به بیان مختصری از تعاریف و نتایجی در آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی اختصاص دارد که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، فضای تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی جبر باناخ $\mathcal{A}$؛ یعنی $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ را معرفی و مطالعه می‌کنیم و رابطه‌ی بین $\mathrm{wap}(\mathcal{A})$ و نمایش روی جبرهای باناخ را بررسی می‌کنیم. بویژه شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آن شرایط $\mathrm{wap}(\mathcal{A}) = \mathrm{ap}(\mathcal{A})$ و برخی ویژگی‌های موروثی $\mathrm{ap}(\mathcal{A})$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه فضای تابعک‌های متناوب تقریبی و فضای تابعک‌های متناوب تقریبی ضعیف روی برخی از جبرهای باناخ را به عنوان نمونه بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، فضای توابع متناوب تقریبی ضعیف روی گروه G؛ یعنی $\mathrm{wap}(G)$ را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\mathrm{wap}(L^1(G)) = \mathrm{wap}(G)$. در ادامه با استفاده از این قضیه، نتایجی را روی $L^1(G)$ به دست می‌آوریم.

در فصل چهارم، جبرهای هاف فون نویمن جابه‌جایی را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $M(G)^*$ یک جبر هاف فون نویمن جابه‌جایی است. در ادامه با توجه به این قضیه که $\mathrm{wap}(L^1(G))$ یک C^*-زیرجبر از $L^\infty(G)$ است، نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{wap}(M(G))$ یک C^*-زیرجبر از $M(G)^* = C_\circ(G)^{**}$ است.

فصل ۲

پیش‌نیازها

۱.۲ مفاهیم کلی

در این فصل، به طور مختصر تعاریف و نتایجی از آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. توپولوژی هاسدورف τ روی X را محدب موضعی گوییم، اگر یک پایه از همسایگی‌های محدب در صفر داشته باشد. فضای برداری X را همراه با این توپولوژی یک فضای محدب موضعی می‌نامیم، اگر نگاشت‌های $(x,y) \mapsto x+y$ از $X \times X$ به X و $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ از $\mathbb{C} \times X$ به X تحت این توپولوژی پیوسته باشند. در این حالت دوگان X متشکل از تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را با X^* نمایش می‌دهیم. به علاوه مقدار تابعک $f \in X^*$ در $x \in X$ را با $f(x)$ یا $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهیم.

قبل از تعریف زیر یادآوری می‌کنیم که، زیرمجموعه‌ی C از یک فضای توپولوژیک برداری مانند X را متعادل گوییم، هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ با $|\alpha| \leq 1$ داشته باشیم

$$\alpha C \subseteq C.$$

زیرمجموعه‌ی C از یک فضای محدب موضعی مانند X را جاذب گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ بتوان اسکالر $t = t_x$ را پیدا نمود به طوری که

$$x \in tC.$$

تعریف ۲.۱.۲ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $P : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را یک نیم‌نرم گوییم، هرگاه

(الف)$(x, y \in X) \qquad P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

(ب)$(\alpha \in \mathbb{C}, x \in X) \qquad P(\alpha x) =\mid \alpha \mid P(x)$

حال اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ محدب و جاذب باشد، آنگاه تابعک مینکوسکی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_A : X \longrightarrow [\circ, +\infty]$$
$$P_A(x) = \inf\{t > \circ \ : \ x \in tA\}$$

شرط جاذب بودن A باعث می شود اینفیمم فوق وجود داشته باشد.

اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ محدب، جاذب و متعادل باشد، آنگاه P_A نیم‌نرم است.

یک خانواده‌ی $\mathcal{P}$ از نیم‌نرم‌ها روی یک فضای توپولوژیک برداری مانند X را جداساز گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ با $x \neq y$ بتوانیم $p \in \mathcal{P}$ بیابیم به گونه‌ای که $p(x) \neq p(y)$.

هرگاه X یک فضای برداری محدب موضعی و $\mathcal{B}$ یک پایه‌ی محدب موضعی برای X باشد به طوری که همگی اعضای آن متعادل نیز باشند، آنگاه به هر $v \in \mathcal{B}$ تابعک P_v را نظیر می‌کنیم. در این صورت

(الف) برای هر $v \in \mathcal{B}$ داریم $v = \{x \in X : P_v(x) < ۱\}$

(ب) خانواده‌ی $\{P_v : v \in \mathcal{B}\}$ یک خانواده‌ی جداساز از نیم‌نرم‌های پیوسته روی X است.

حال اگر $\mathcal{P}$ یک خانواده‌ی جداساز از نیم‌نرم‌ها روی فضای برداری X باشد، برای هر $P \in \mathcal{P}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی

$$v(P, n) = \{x \in X : P(x) < \frac{۱}{n}\}$$

را در نظر گرفته، و قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{B} = \{C : \text{ها است}\ v(P,n)\ \text{ها اشتراک متناهی از}\ C\}$$

در این صورت $\mathcal{B}$ یک پایه‌ی محدب موضعی برای یک توپولوژی τ روی X تشکیل می‌دهد. اعضای این پایه متعادل هستند، و با این توپولوژی، X به یک فضای محدب موضعی تبدیل می‌شود.

حال اگر با یک فضای محدب موضعی با پایه‌ی $\mathcal{B}_۱$ شروع کنیم، قرار دهیم $\mathcal{P} = \{P_v : v \in \mathcal{B}_۱\}$ و با این $\mathcal{P}$

پایه‌ی $\mathcal{B}$ را بسازیم، آنگاه $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنیم X یک فضای خطی نرم‌دار باشد.

(الف) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است. این توپولوژی محدب موضعی را با $\sigma(X, X^*)$ یا ω نمایش می‌دهیم.

(ب) نگاشت $K_X : X \longrightarrow X^{**}$ را با ضابطه‌ی $x \longmapsto \hat{x}$ تعریف می‌کنیم که در آن برای هر $f \in X^*$ داریم $\hat{x}(f) = f(x)$. توجه کنیم که K_X خطی و طولپاست. لذا یک به یک نیز هست. در حالتی که K_X پوشا باشد، X را بازتابی می‌نامیم. معمولاً $\hat{x}$ را به طور ساده با x نمایش می‌دهیم.

(ج) منظور از توپولوژی ضعیف* روی X^*، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانواده‌ی $K_X(X)$ را پیوسته می‌سازد. این توپولوژی محدب موضعی را با $\sigma(X^*, X)$ یا ω^* نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. همچنین فرض کنیم M یک زیرفضای E و N یک زیرفضای E^* باشد. $M^\perp$ و ${}^\perp N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M^\perp := \{\lambda \in E^* : \langle \lambda, x \rangle = 0, \ \text{برای هر}\ x \in M\},$$
$${}^\perp N := \{x \in E : \langle x, \lambda \rangle = 0, \ \text{برای هر}\ \lambda \in N\}.$$

واضح است که $M^\perp$ و ${}^\perp N$ به ترتیب زیرفضاهایی از E^* و E هستند.

گزاره ۴.۱.۲ فرض کنیم E یک فضای باناخ و M یک زیرفضای E و N یک زیرفضای E^* باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(الف) ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}^{\|\cdot\|}$.

(ب) $({}^\perp N)^\perp = \overline{N}^{w^*}$.

برهان . به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. ■

گزاره ۵.۱.۲ فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار و M زیرفضای خطی و بسته‌ای از آن باشد. در این صورت نگاشت $\rho : \frac{E^*}{M^\perp} \longrightarrow M^*$ تعریف شده به صورت $\rho(\lambda + M^\perp) = \lambda\mid_M$ برای $\lambda \in E^*$، یک یکریختی طولپا است.

برهان . به صفحه‌ی ۸۹ از [۸] مراجعه کنید. ■

گزاره ۶.۱.۲ فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار و M زیرفضای خطی و بسته‌ای از آن باشد. همچنین فرض کنیم $q : E \longrightarrow \frac{E}{M}$ نگاشت متعارف خارج‌قسمتی باشد. در این صورت $\rho(\lambda) = \lambda \circ q$ یک یکریختی

طولپا از $(\frac{E}{M})^*$ به $M^\perp$ است.

برهان . به صفحه‌ی ۸۹ از [۸] مراجعه کنید. ■

در ادامه مجموعه‌ی توابع خطی و کران‌دار از فضای نرم‌دار E به فضای نرم‌دار F را با $B(E,F)$ نمایش می‌دهیم. اگر $E=F$، آنگاه $B(E,E)$ را به طور خلاصه با $B(E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۲ اگر E و F دو فضای نرم‌دار باشند، آنگاه به هر $T\in B(E,F)$ یک تبدیل خطی منحصر به فرد $T^*\in B(F^*,E^*)$ نظیر می‌شود به طوری که برای هر $x\in E$ و هر $y^*\in F^*$، $\langle y^*,Tx\rangle=\langle T^*y^*,x\rangle$. عملگر T^* با این ویژگی را الحاق عملگر T می‌نامیم.

گزاره ۸.۱.۲ فرض کنیم E و F دو فضای باناخ باشند و $T\in B(E,F)$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

(الف) برای هر $U\in B(E,F)$ و $\alpha\in\mathbb{C}$ داریم $(\alpha T+U)^*=\alpha T^*+U^*$.

(ب) $T^{**}|X=T$.

(ج) $\| T^* \|=\| T \|$.

(د) برای هر فضای باناخ H و هر $S\in B(F,H)$ داریم $(S\circ T)^*=T^*\circ S^*$.

(ه) نگاشت $T^*:(F^*,\sigma(F^*,F))\longrightarrow(E^*,\sigma(E^*,E))$ پیوسته است.

برهان . به قضیه‌ی ۴.۱.۴ از [۸] مراجعه کنید. ■

قضیه ۹.۱.۲ فرض کنیم E و F فضاهای باناخ باشند و $T\in B(E,F)$. آنگاه شرایط زیر هم‌ارز هستند.

(الف) عملگر T، فشرده‌ی ضعیف است.

(ب) عملگر T^*، فشرده‌ی ضعیف است.

(ج) عملگر $T^*:(F^*,\sigma(F^*,F))\longrightarrow(E^*,\sigma(E^*,E^{**}))$ پیوسته است.

برهان . به قضیه‌ی A.۳.۵۶ در [۹] مراجعه کنید. ■

گزاره ۱۰.۱.۲ (هان-باناخ). فرض کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و F یک زیرفضای خطی E باشد و $\mu\in F^*$. در این صورت $\lambda\in E^*$ وجود دارد که $\mu=\lambda\mid_F$ و $\| \mu \|=\| \lambda \|$.

برهان . به قضیه‌ی ۱۶.۵ از [۲۸] مراجعه کنید. ■

در لم زیر، گوی یکه‌ی بسته‌ی فضای نرم‌دار E را با B_E نمایش می‌دهیم.

لم ۱۱.۱.۲ (گلدشتاین). فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت B_E در $B_{E^{**}}$، چگال ضعیف * است.

برهان . به قضیه‌ی ۱۶.۲ از [۵] مراجعه کنید. ■

گزاره ۱۲.۱.۲ (قضیه‌ی نگاشت باز). فرض کنیم B_E و B_F گوی‌های یکه‌ی باز از فضاهای باناخ E و F باشند. در این صورت برای هر تبدیل خطی کران‌دار Λ از E به روی F، یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\Lambda(B_E) \supset \delta B_F.$$

برهان . به قضیه‌ی ۵.۹ از [۲۷] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۳.۱.۲ فرض کنیم E یک فضای خطی و $A \subseteq E$ ناتهی باشد. پوش محدب A، که با $\text{co}(A)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0, x_i \in A \right\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۲ فرض کنیم X، Y، Z فضاهای برداری و B یک نگاشت از $X \times Y$ به Z باشد. در این صورت به هر $x \in X$ و $y \in Y$ نگاشت‌های

$$B_x : Y \longrightarrow Z, \qquad B_y : X \longrightarrow Z$$

را نسبت می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$B_x(y) = B(x, y) = B_y(x).$$

نگاشت B دوخطی است هرگاه هر B_x و هر B_y خطی باشد.

اگر X، Y، Z فضاهای توپولوژیک برداری باشند به طوری که هر B_x و هر B_y پیوسته باشد، آنگاه B را منفک پیوسته می‌نامیم. واضح است که اگر B پیوسته باشد، آنگاه منفک پیوسته است.

تعریف ۱۵.۱.۲ فرض کنیم E و F دو فضای خطی نرم‌دار باشند.

(الف) منظور از یک فرم دوخطی روی $E \times F$ نگاشت دوخطی $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ است. B را کران‌دار می‌نامیم هرگاه عدد $M \geq ۰$ موجود باشد به طوری که

$$| B(x,y) | \leq M \parallel x \parallel \parallel y \parallel \qquad (x \in E, y \in F).$$

گردایه‌ی همه‌ی فرم‌های دوخطی کران‌دار روی $E \times F$ را با $BL(E,F)$ نمایش می‌دهیم.

(ب) برای هر $x \in E$ و $y \in F$، حاصلضرب تانسوری x و y را به عنوان عضوی از $BL(E^*, F^*)$ با $x \otimes y$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x \otimes y)(\lambda, \mu) = \lambda(x)\mu(y) \qquad (\lambda \in E^*, \mu \in F^*).$$

(ج) فضای خطی تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$ در $BL(E^*, F^*)$ را حاصلضرب تانسوری جبری E و F می‌نامیم و آن را با $E \otimes F$ نمایش می‌دهیم.

(د) نرم تانسوری تصویری روی $E \otimes F$ را با $\parallel \cdot \parallel_\pi$ نمایش می‌دهیم و برای هر $z \in E \otimes F$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\parallel z \parallel_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=۱}^{n} \parallel x_i \parallel \parallel y_i \parallel : z = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i, x_i \in E, y_i \in F, n \geq ۱ \right\}.$$

در این صورت $\parallel \cdot \parallel_\pi$ یک نرم ضربی روی $E \otimes F$ است. در واقع، برای هر $x \in F$ و $y \in E$ داریم

$$\parallel x \otimes y \parallel_\pi = \parallel x \parallel \parallel y \parallel .$$

(ه) منظور از حاصلضرب تانسوری تصویری E و F، کامل شده‌ی $(E \otimes F, \parallel \cdot \parallel_\pi)$ است که آن را با $E \hat{\otimes} F$ نمایش می‌دهیم.

(و) فضای خطی $E \otimes F$ را به عنوان زیرفضایی از $B(E^*, F)$ در نظر می‌گیریم. اگر $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i$ باشد، آنگاه عملگر با بعد متناهی زیر را القاء می‌کند

$$E^* \longrightarrow F, \qquad \mu \longmapsto \sum_{i=۱}^{n} \langle \mu, x_i \rangle y_i.$$

فضای خطی $E \otimes F$ یک نرم طبیعی از $BL(E^*, F^*)$ به ارث می‌برد. این نرم را نرم تانسوری تزریقی

نامیده و با $\| \cdot \|_\varepsilon$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ داریم

$$\| u \|_\varepsilon = \sup \left\{ | \sum_{i=1}^n \lambda(x_i)\mu(y_i) | : \lambda \in E^*, \| \lambda \| \leq 1, \mu \in F^*, \| \mu \| \leq 1 \right\}.$$

بویژه داریم

$$\| x \otimes y \|_\varepsilon = \| x \| \| y \| .$$

(ی) منظور از حاصلضرب تانسوری تزریقی E و F کامل شده‌ی $(E \otimes F, \| \cdot \|_\varepsilon)$ است که آن را با $E \check{\otimes} F$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۱.۲ اگر E، F و H فضاهای خطی نرم‌دار باشند، آنگاه برای یک نگاشت دوخطی $\Phi : E \times F \longrightarrow H$ یک نگاشت خطی یکتای $\Psi : E \otimes F \longrightarrow H$ وجود دارد به طوری که

$$\Psi(x \otimes y) = \Phi(x, y) \qquad (x \in E, y \in F).$$

برهان . به قضیه‌ی ۶ فصل ۶ از [۳] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱۷.۱.۲ نگاشت $\Phi_\Upsilon \longmapsto \Upsilon$ از $(E \hat{\otimes} F)^*$ به روی $BL(E, F)$ یک یکریختی خطی طولپا است.

برهان . ابتدا فرض کنیم $\Upsilon \in (E \hat{\otimes} F)^*$. بوضوح برای این Υ یک $\Phi_\Upsilon \in BL(E, F)$ وجود دارد به طوری که

$$\| \Phi_\Upsilon \| \leq \| \Upsilon \|,$$

حال اگر $\Phi \in BL(E, F)$ ، طبق قضیه‌ی قبل یک تابعک خطی یکتای Υ روی $E \otimes F$ وجود دارد به طوری که

$$\Upsilon(x \otimes y) = \Phi(x, y) \qquad (x \in E, y \in F),$$

در این صورت

$$| \Upsilon(\sum_i x_i \otimes y_i) | = | \sum_i \Phi(x_i, y_i) | \leq \| \Phi \| \sum_i \| x_i \| \| y_i \|,$$

و بنابراین برای $u \in E \otimes F$ داریم

$$| \Upsilon(u) | \leq \| \Phi \| \| u \|_{\pi},$$

پس Υ یک گسترش یکتا به یک عضو از $(E\hat{\otimes}F)^*$ مانند $\tilde{\Upsilon}$ دارد؛ یعنی

$$\| \tilde{\Upsilon} \| \leq \| \Phi \|$$

و $\Phi = \Phi_{\tilde{\Upsilon}}$ و اثبات کامل می‌شود. ■

نتیجه ۱۸.۱.۲ بوضوح نگاشت $T_\Phi \longmapsto \Phi$ که

$$(T_\Phi(x))(y) = \Phi(x, y) \qquad (x \in E, y \in F)$$

یک یکریختی طولپا از $BL(E, F)$ به روی $B(E, F^*)$ است، و لذا

$$(E\hat{\otimes}F)^* \cong B(E, F^*).$$

در ضمن به طریق مشابه اثبات می‌شود که $(E\hat{\otimes}F)^* \cong B(F, E^*)$.

تعریف ۱۹.۱.۲ مجموعه‌ی D را جهت‌دار می‌نامیم اگر رابطه‌ای مانند $\geq$ روی D موجود باشد به طوری که $(D, \geq)$،

(الف) متعدی باشد؛ یعنی اگر $\alpha \geq \beta$ و $\beta \geq \gamma$، آنگاه $\alpha \geq \gamma$.

(ب) ارشمیدسی باشد؛ یعنی برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\gamma \in D$ موجود باشد که $\gamma \geq \alpha$ و $\gamma \geq \beta$.

منظور از یک تور در مجموعه‌ی X تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن D یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. معمولاً با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f : D \longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به طور ساده با (x_α) نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم D و E دو مجموعه‌ی جهت‌دار باشند. تور $(y_\beta)_{\beta \in E}$ یک زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ است اگر تابعی مانند $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد که

(الف) برای هر $\beta \in E$ داشته باشیم $y_\beta = x_{g(\beta)}$.

(ب) برای هر $\alpha \in D$، $\beta \in E$ موجود باشد به طوری که برای هر $\gamma \in E$ با شرط $\gamma \geq \beta$ داشته باشیم $g(\gamma) \geq \alpha$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. تور (x_α) در X به x_0 همگرا است اگر به ازای هر همسایگی