دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

تحلیل همگرایی نیمه موضعی نوع کانترویچ برای روش نیوتن نا کامل

نگارنده

شعبان آقا میرزایی

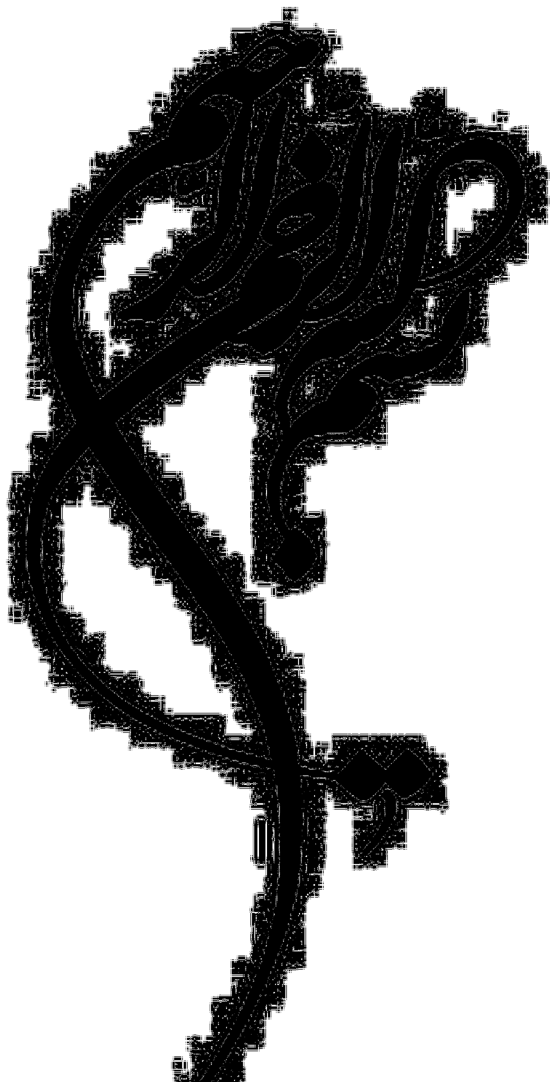
استاد راهنما

دکتر باقر کرامتی

استاد مشاور

دکتر محمد رضا صافی

اسفند ۹۰



تقدیم به :

پدرم به پاس سالها تلاش تا بیاموزم

مادرم به پاس دلسوزی ها تا بیاسایم

چکیده

تعداد قابل توجهی از مسائل کاربردی نیاز به حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی دارند. برای این منظور، یک تحلیل جدید از همگرایی نیمه موضعی، جهت ایجاد همگرایی روش ناکامل نیوتن، به منظور بدست آوردن جواب دستگاه معادلات غیر خطی در فضای باناخ، را ارائه می‌نماییم. این تحلیل بر پایه توابع بازگشتی استوار می‌باشد. افزایش سرعت همگرایی روش ناکامل نیوتن، با استفاده از شرط کنترل باقیمانده از دیگر اهداف این پایان نامه می‌باشد. مثال های عددی ارائه شده نشان می‌دهند که نتایج بدست آمده در این پایان نامه کاربردی و مؤ ثر می‌با شند.

واژه های کلیدی: روش نیوتن نا کامل، فضای باناخ، همگرایی نیمه موضعی، قضیه کانترویچ.

پیش گفتار

این پایان نامه شامل معرفی روش های جدید و مؤثری است که به حل دستگاه معادلات غیر خطی خواهد پرداخت. لذا هدف اصلی، بیان و تجزیه و تحلیل همگرایی نیمه موضعی نوع کانترویچ برای روش نا کامل نیوتن می‌باشد. بعلاوه حالاتی را بررسی می‌نماییم که در بهینگی و کمتر شدن میزان خطا نیز مؤثر می‌باشد.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد. در فصل اول، ابتدا به بیان تعاریفی پرداخته ایم که می‌تواند ما را در فهم بهتر این پایان نامه یاری نماید. در ادامه به توضیح اجمالی در مورد دستگاه معادلات خطی و روش های حل آن خواهیم پرداخت.

در فصل دوم دستگاه معادلات غیر خطی و برخی از روش های حل دستگاه را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در فصل سوم به بیان و بررسی معیار همگرایی نیمه موضعی نوع کانترویچ برای روش نا کامل نیوتن می‌پردازیم و قضیه معروف کانترویچ را بیان و اثبات نموده و معیار همگرایی نوع کانترویچ را برای مثال های عددی گوناگون مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در فصل چهارم این پایان نامه، یک تحلیل جدید از همگرایی نیمه موضعی روش نا کامل نیوتن، ارائه خواهیم نمود و معیار همگرایی جدیدی را معرفی و اثبات می‌نماییم. و در پایان به مقایسه عددی بین معیار های گفته شده در فصول سوم و چهارم و بررسی سرعت همگرایی این دو معیار خواهیم پرداخت.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف اولیه

در این فصل، تعاریف و قضایای مورد نیاز این پایان نامه ارائه می‌گردد.

تعریف ۱ (فضای متریک[۱]).

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع حقیقی d را بر $X \times X$ یک متریک بر X می‌نامیم، هر گاه به ازای هر x و y و z از X داشته باشیم:

۱) $d(x,y) \geq 0$؛

۲) $d(x,y) = 0$ اگر وفقط اگر $x = y$؛

۳) $d(x,y) = d(y,x)$؛

۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$، (نا مساوی مثلث).

فضای متریک را با (X,d) نمایش می‌دهند.

---

[۱] Metric space

تعریف ۲ (همگرایی دنباله).

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای متریک (X, d) باشد. گوییم این دنباله در X همگراست اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به قسمی که

$$n \geq M \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

به عبارت دیگر $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

تعریف ۳ (همگرایی یکنواخت).

فرض کنید x حد دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد. گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در میدان E به طور یکنواخت به x همگراست اگر

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists M \ni \forall n; \quad n \geq M, x \in E \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

تعریف ۴ (دنباله کشی).

دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را کُشی [۲] نامیم، اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر دو عدد طبیعی n و m، اگر $n, m \geq M$، آنگاه

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

---

[۲] Cauchy

تعریف ۵ (فضای متریک کامل).
فضای متریک (X,d) را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کُشی در X همگرا باشد.

تعریف ٦ (فضای خطی[۳]).
فرض کنید F میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. مجموعه ی X را یک فضای خطی می‌نامیم هرگاه عمل دوتایی $+$ و یا . از $X \times X$ به X موجود باشد به قسمی که به ازای هر x و y و z و هر α و β از F داشته باشیم:

۱) $x + y = y + x$؛

۲) $(x + y) + z = x + (y + z)$؛

۳) عضوی مانند $\circ$ از X وجود داشته باشد به قسمی که $x + \circ = x$. این عضو را صفر فضای خطی می‌نامیم.

۴) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$؛

۵) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$؛

٦) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$؛

۷) $\circ.x = \circ$ و $۱.x = x$.

عمل $+$ را جمع و عمل . را ضرب می‌نامیم.

تعریف ۷ اگر $F = \mathbb{R}$، آنگاه X را فضای خطی حقیقی و اگر $F = \mathbb{C}$، آنگاه X را فضای خطی مختلط گویند.

---
[۳] Lineary space

تعریف ۸ (عملگر خطی).

فرض کنید X و Y دو فضای خطی بر میدان F باشند، تابع $T: X \to Y$ را یک عملگر خطی از X به Y می‌نامیم هر گاه

الف) $T(x_1, x_2) = T(x_1) + T(x_2) \qquad \forall x_1 + x_2 \in X$؛

ب) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in F$؛

تعریف ۹ عملگر F از فضای باناخ[۴] X به فضای باناخ Y در $x = x^*$ پیوسته است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|_X = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|F(x_n) - F(x^*)\|_r = 0$$

قضیه ۱۰ اگر عملگر خطی T از فضای باناخ X به فضای باناخ Y در $x^* = 0$ پیوسته باشد، آنگاه روی هر نقطه x از فضای X پیوسته خواهد بود.

برهان: چون T در $x^* = 0$ پیوسته است، لذا خواهیم داشت:

$$T(0) = 0$$

از طرفی چون

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = 0$$

اگر دنباله $\{x_n\}$، $(n \geq 0)$ همگرا به x^* در X باشد، با قرار دادن $y_n = x_n = x^*$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$$

---

[۴] Banach space

با استفاده از فرض، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|T(x_n)\| &= \lim_{n\to\infty}\|T(x_n-x^*)\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|T(x_n)-T(x^*)\| = \circ\end{aligned}$$

□

تعریف ۱۱ (فضای نرم دار کامل).

هر گاه X نسبت به متر $d(x,y)=\|x-y\|$ کامل باشد، فضای نرم دار X را کامل می‌نامیم.

تعریف ۱۲ (فضای باناخ[۵]).

هر فضای نرمدار کامل را یک فضای باناخ گویند.

تعریف ۱۳ عملگر F از فضای باناخ X به فضای باناخ Y روی مجموعه A از X پیوسته لیپ شیتز است هر گاه یک ثابت $\circ<\gamma<\infty$ موجود باشد، به قسمی که

$$|f(x)-f(y)|\leq\gamma\|x-y\| \qquad \forall x,y\in A$$

تعریف ۱۴ (مشتق فرشه[۶]).

فرض کنیم عملگر F یک نگاشت از فضای باناخ X به فضای باناخ Y باشد و عملگر خطی کران دار L از X به Y موجود باشد به قسمی که:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to\circ}\frac{\|F(x_\circ+\Delta x)-F(x_\circ)-L(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=\circ$$

[۵] Banach space
[۶] Frechet

آنگاه F، مشتق پذیر فرشه روی $X_\circ$ نامیده می‌شود.

نکته ۱۵ اگر $F_۱$ و $F_۲$ مشتق پذیر فرشه در $x_\circ$ باشند، آنگاه داریم.

$$(F_۱ + F_۲)'(x_\circ) = F_۱'(x_\circ) + F_۲'(x_\circ)$$

تعریف ۱۶ (همگرایی موضعی[۷]).
در آنالیز عددی یک روش تکراری را به طور موضعی همگرا گویند هر گاه تقریبات متوالی تولید شده توسط آن روش، به یک جواب معادله همگرا باشند زمانیکه تقریب اولیه به اندازه کافی به جواب نزدیک باشد.

نکته ۱۷ روش های تکراری سیستم های معادلات غیر خطی مثل روش نیوتن معمولاً به صورت موضعی همگرا می‌باشند.

تعریف ۱۸ (نرم بردار).
فرض کنیم $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشند. نرم بردار $\underline{x}$، تابعی مانند $\|.\|$، پیوسته از عناصر x_i می‌باشد، به طوری که شرایط زیر را برقرار سازد.

۱) $\forall \underline{x} \neq \circ \qquad \|\underline{x}\| > \circ$؛

۲) $\underline{x} = \underline{\circ} \iff \|\underline{x}\| = \circ$؛

[۷] Localy convergence

۳) $\alpha \in \mathbb{R} \qquad \|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|\underline{x}\|;$

۴) $\forall x, y \qquad \|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|;$

۵) $\|-\underline{x}\| = \|\underline{x}\|;$

۶) $\|\underline{x}\| - \|y\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

نکته ۱۹ روابط زیر در نرم بردارها برقرار می‌باشند.

۱) $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$؛

۲) $\|\underline{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$؛

۳) $\|\underline{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$.

تعریف ۲۰ فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. آنگاه مشابه با تعریف نرم بردار، نرم ماتریس A را با $\|A\|$ نشان می‌دهیم و ویژگی‌های زیر را برقرار می‌سازد.

۱) $\|A\| \geq 0$؛

۲) $A = 0 \iff \|A\| = 0$؛

۳) $\alpha \in \mathbb{R} \qquad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|;$

۴) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

نکته ۲۱ فرض کنیم A یک ماتریس و $\|.\|$ نرم بردار باشد. در این صورت

$$\|A\|_p = \max_{\underline{x}\neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p}$$

در همه ویژگی های نرم ماتریس صدق می‌نماید، را نرم ماتریس وابسته به نرم بردار می‌نامند.

نکته ۲۲ روابط زیر در مورد نرم ماتریس A برقرار می‌باشند.

۱) $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$؛

۲) $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

تعریف ۲۳ (نرم فربینیوس[۸]).

فرض کنیم A یک ماتریس $m\times n$، در این صورت نرم فربینیوس ماتریس A به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\|A\|_f = \Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۲۴ (اعمال سطری مقدماتی).

این اعمال شامل موارد زیر می‌باشد.

۱) تعویض در سطر یا ستون؛

[۸] Ferbinous norm

۲) ضرب یک عدد در سطر یا ستون؛

۳) جمع دو سطر یا ستون.

تعریف ۲۵ (ماتریس جایگشت).

ماتریس غیر صفر p را ماتریس جایگشت گویند هر گاه اگر در هر سطر یا ستون تنها عنصر غیر صفر آن ۱ باشد. به این ترتیب اگر $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ یک جایگشت از $(1, 2, \cdots, n)$ باشد، آنگاه $p = \begin{pmatrix} e_{\alpha_1}^T \\ \vdots \\ e_{\alpha_n}^T \end{pmatrix}$، که در آن e_i، i امین ستون واحد می‌باشد. با پیش ضرب کردن p در ماتریس A، سطر ها طبق جایگشت $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ تعویض می گردند و به طور مشابه با پس ضرب کردن p در ماتریس A، ستون ها تعویض می گردند.

تعریف ۲۶ (محور یابی [۹] و انواع آن).

منظور از جابجایی سطر ها در روش حذفی گاوس را محور یابی گویند. که به دو صورت انجام می‌پذیرد:

الف) محور یابی جزئی [۱۰]؛

ب) محور یابی کلی [۱۱].

الف) محوریابی جزئی: جابجایی سطر محور با سطری که دارای بیشترین مقدار از نظر قدر مطلق در ستون محور می‌باشد. در این حالت ماتریس A به شکل زیر تجزیه می گردد:

$$U = MA$$

---

[۹] Pivoting
[۱۰] Partial pivoting
[۱۱] Complete pivoting

که M ماتریس پایین مثلثی جابه جا شده است و به صورت زیر بیان می گردد.

$$M = M_{n-1}P_{n-1}M_{n-2}P_{n-2}\cdots M_1P_1$$

و P یک ماتریس جایگشت می‌باشد.

ب) محور یابی کلی: جابجایی عنصر محوری با عنصری از ماتریسی که دارای بیشترین مقدار از لحاظ قدر مطلق می‌باشد. لذا با توجه به تعریف، ماتریس A به صورت زیر تجزیه می گردد:

$$A^{(k)} = M_kP_kA^{k-1}Q_k$$

که در آن

P_k: ماتریسی است که جایگشت سطری انجام می‌دهد.

Q_k: ماتریسی است که جایگشت ستونی انجام می‌دهد.

$$\begin{aligned} U = A^{(n-1)} &= M_{n-1}P_{n-1}A^{(n-2)}Q_{n-1} \\ &= M_{n-1}P_{n-1}M_{n-2}P_{n-2}M_{n-2}\cdots M_1P_1AQ_1Q_2\cdots Q_{n-1} \end{aligned}$$

فرض کنیم:

$$M = M_{n-1}P_{n-1}\cdots M_1P_1$$

$$Q = Q_1Q_2\cdots Q_{n-1}$$

در نتیجه می‌توان نوشت.

$$U = MAQ$$

حال اگر فرض نماییم $L = PM^{-1}$، لذا خواهیم داشت:

$$LU = PM^{-1}MAQ = PAQ$$

در واقع رابطه اخیر تجزیه ماتریس جایگشت شده سطری و ستونی A می‌باشد.

تعریف ۲۷ (پایداری روش حذفی گوس).

در محور یابی گرچه قدر مطلق مضربها کوچکتر از یک می‌باشد. امّا باز هم ممکن است ماتریس های تعدیل یافته به طور دلخواه روند افزایشی داشته باشند.پایداری روش حذفی گوس می‌تواند با اندازه گیری رشد عناصر $A^{(k)}$ به نحو بهتری قابل درک باشد. ابتدا پارامتری را تحت عنوان پارامتر رشد به شکل زیر بیان می‌داریم:

تعریف ۲۸ اگر $A^{(k)}$ ماتریس بدست آمده از روش حذفی گوس باشد و داشته باشیم:

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, n \qquad A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$$

آنگاه پارامتر پایداری به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\gamma = \frac{max\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\}}{\alpha}$$

که در آن

$$\alpha = max|a_{ij}|, \qquad \alpha_k = max|a_{ij}^{(k)}|, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

مثال ۲۹ پارامتر رشد را برای ماتریس زیر بدست آورید؟

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$