بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

نامساوی های هرمیت-هادامارد ماتریسی

نگارش

زینب حسن زاده

استاد راهنما

دکتر علی بارانی

استاد مشاور

دکتر مجتبی قاسمی کمالوند

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

آذر ماه ۱۳۹۲

همه امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس ها یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

تقدیم به

همسر عزیزم به پاس قدردانی و سپاس که قلبی آکنده از عشق و معرفت را و نیز محیطی سرشار از سلامت، امنیت و آرامش را برایم فراهم آورده است، و تقدیم به فرزند دلبندم آرتمیس که در تمام این مدت ناملایمات دوران تحصیل مرا با صبر و شکیبایی پذیرفته اند و اگر به این سبب در فراهم آوردن اسباب آرامش آنان کوتاهی کرده ام امید بخشش دارم و سپاسگزار وجود مقدسشان هستم.

تقدیر و تشکر

ستایش بی حد، خدای را زیبد که هستی او، اول است، بی آنکه پیش از او اول و ابتدایی باشد، و آخر است، بی آنکه پس از او آخر و انتهایی باشد. آن ذاتی که ناتوان است از دیدنش، دیده ی بینندگان و عاجز است از وصفش، تصورات توصیف کنندگان.

خداوندا! ستایش و حمد و ثنایم را مخصوص و خالص حضرتت گردان در هر یک از حالاتم، تا شاد نباشم به نعمت هایی که در دنیا به من عطا کرده ای، و محزون نگردم از آنچه محرومم کرده ای و قلبم را آگاه ساز به خداترسی و نفسم را به طاعتت مشغول دار و از هر کار دیگر که بر من پیش آید، باز دار تا هرگز چیزی که غضب تو در آن است، دوست نداشته باشم و ناپسندم نباشد آنچه محبوب توست.

یقینا هیچ اثری بدون زحمت و مشورت و رایزنی شکل نمی گیرد، این پایان نامه نیز حاصل عنایت، توجه و نظارت جناب آقای دکتر علی بارانی به عنوان استاد راهنما، که تمام مدت در مقطع کارشناسی ارشد با سعه ی صدر و در کمال صداقت و با رویی گشاده از تجربیات علمی و اخلاقی خودشان ما را بهره مند نموده و استاد مشاورم جناب آقای دکتر مجتبی قاسمی می باشد. لذا بر خود لازم می دانم که مراتب سپاس خود را از استاد راهنمای بزرگوارم و همچنین استاد مشاورم به جهت راهنمایی و زحماتشان در امر پایان نامه و از جناب آقای دکتر امیر قاسم غضنفری که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده گرفته اند و نیز از جناب آقای دکتر محمود شکوری به انجام رسانم. اگر بخواهم از تک تک اساتیدی که در محضرشان کسب علم نموده ام نام ببرم بدون شک جا و فرصت دیگری می طلبد و چه بسا به سبب یاری نکردن ذهن بعضی از بزرگان از قلم بمانند و این امر از ادب به دور است، با این وجود بر خود لازم می دانم سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که یاریگر من در امر تحصیل بوده اند.

خصوصا پدر و مادر عزیزم و همچنین خانواده ی همسرم که اگر زحمات آنان نبود گذراندن این مهم در زندگیم کاری بس دشوار بود.

زینب حسن زاده آذر ماه ۱۳۹۲.

فهرست مطالب

چکیده

نام خانوادگی: حسن زاده **نام:** زینب
عنوان پایان‌نامه: نامساوی های هرمیت-هادامارد ماتریسی
استاد راهنما: دکتر علی بارانی **استاد مشاور:** دکتر مجتبی قاسمی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی:** آذر ماه ۱۳۹۲ **تعداد صفحه: ۱۱۵**
کلید واژه ها: نامساوی های هرمیت-هادامارد، توابع محدب، توابع عملگر محدب، روش موند-پیکاریک،مقادیر ویژه
چکیده:ابتدا چند نامساوی عملگری و ماتریسی از نوع هرمیت-هادامارد ارائه می دهیم و نوعی در برگیرنده را برای توابع محدب یکنوا روی ماتریس ها پیدا می کنیم. آن گاه روش موند-پیکاریک را برای به دست آوردن نوعی عملگر برای توابع محدب به کار می بریم. هم چنین برخی کاربردها را ارائه می دهیم. در نهایت نامساوی هرمیت-هادامارد را برای توابع عملگر محدب، نگاشت های خطی مثبت و عملگرهایی را که روی فضای هیلبرت متناهی البعد عمل می کنند، به دست می آوریم.

پیش گفتار

نامساوی هرمیت-هادامارد نقش مهمی در نظریه ی توابع محدب به عهده دارد و یک شرط لازم و کافی برای یک تابع فراهم می کند تا در یک بازه از اعداد حقیقی محدب باشد. نامساوی اساسی زیر ابتدا توسط هرمیت در سال ۱۸۸۱ به دست آمد، اما در هیچ یک از متون ریاضی به این نتیجه اشاره نشد و به عنوان نامساوی هرمیت به طور وسیع انتشار نیافت، اما در سال **۱۸۸۳** در یک ژورنال مقدماتی منتشر شد و به طور مستقل توسط هادامارد در سال **۱۸۹۳** به اثبات رسید. "بکنباخ" [۱] متخصص برجسته در تاریخ و نظریه ی توابع محدب بیان می کند که این نامساوی به وسیله ی هادامارد در سال **۱۸۹۳** ثابت شده است. در سال **۱۹۷۴** "میترینوویچ" [۲] نوشته هرمیت را در یک مجله ی ریاضی پیدا کرد، چون نامساوی مذکور به نامساوی هادامارد معروف شده بود، این نامساوی اکنون به عنوان نامساوی هرمیت-هادامارد ثبت شده است. در این اثر نامساوی هرمیت-هادامارد به صورت زیر می باشد:

$$(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_{0}^{1} f(t)dt \leq (y-x)\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

که f یک تابع محدب روی بازه ی $[x,y]$ است و یک بر آورد دو طرفه از تابع مقدار میانگین را تخمین می زند. هر گاه f روی بازه ی $[a,b]$ از یک فضای خطی محدب باشد، به آسانی می توان مشاهده کرد که رابطه

Beckenbach[۱]

Mitrinovic[۲]

بالا هم ارز نامساوی دو گانه ی زیر است:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \int_{۰}^{۱} f(ta+(۱-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲}.$$

نامساوی فوق چندین کاربرد در آنالیز غیر خطی و هندسه فضاهای باناخ دارد. طی دهه های اخیر چندین تعمیم جالب و فرمول هایی که در این نامساوی صدق می کنند، برای توابع f در چارچوب های گوناگون به دست آمده اند. ریاضیدانان متعددی اخیرا به نامساوی فوق پرداخته اند، از جمله آن ها می توان به "دراگومیر" [۳] اشاره کرد که مقالات فراوانی از وی در ژورنال های مختلف ریاضی منتشر شده است. اخیرا دراگومیر نوعی عملگر از این نامساوی ها را برای توابع عملگر محدب ارائه داده است. در حقیقت آنالیز ماتریس ها در این حیطه فعالیت دارد، که بعضی نامساوی های نرمی یا ماتریسی جالب از نامساوی های عددی معادل خودشان به دست می آیند. به طوری که ممکن است این نامساوی ها برای عملگر هایی که روی فضای هیلبرت متناهی البعد عمل می کنند، برقرار باشند. در این مورد عملگرهای خودالحاقی (ماتریس های هرمیتی) را می توان در نظر گرفت، که یک تعمیم از اعداد حقیقی می باشند.

در این پایان نامه هدف این است، که تعمیمی از نامساوی مذکور روی فضاهای هیلبرت ارائه دهیم.

به طور کلی این پایان نامه را در قالب سه فصل بیان می کنیم:

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیمی پرداخته ایم که در دو فصل بعد به آن ها نیاز داریم. در بخش اول مفاهیمی در ارتباط با نرم ها، ماتریس ها، نامساوی هرمیت-هادامارد، C^*-جبرها و توابع محدب بیان شده است و در بخش دوم عملگر ها، چند جمله ای ها روی یک عملگر کراندار، نامساوی هایی برای توابع محدب، قضیه موند-پیکاریک و توابع عملگر محدب چند متغیره آمده است.

در فصل دوم، تعمیم جدیدی از نامساوی هرمیت-هادامارد برای توابع محدب ارائه می دهیم. در بخش نخست، تحدب را روی تابع ماتریسی $g(A) = f(det(A))$ بررسی می کنیم. در نهایت نوع جدیدی از نامساوی مذکور را برای تابع $g(t) = f(det(A(t)))$ بررسی می کنیم.

در فصل آخر که دو بخش می باشد، چندین نامساوی عملگر و ماتریسی از نوع هرمیت-هادامارد ارائه می دهیم. در بخش اول نمونه ای که در برگیرنده توابع محدب یکنوا روی ماتریس ها است را اثبات می کنیم.

---

[۳] S. S. Dragomir

آن گاه از روش موند-پیکاریک برای به دست آوردن نوعی عملگر برای توابع محدب استفاده می کنیم. و در نهایت نامساوی هرمیت-هادامارد را برای توابع عملگر محدب، نگاشت های خطی مثبت و عملگرهایی که روی فضای هیلبرت عمل می کنند، به دست می آوریم.

مقاله اصلی در این پایان نامه، در [۲۱] آمده است.

و در آخر واژه نامه انگلیسی به فارسی و کتاب نامه ی مورد استفاده در این پایان نامه آمده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایایی است که در فصل های بعد این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند و از دو بخش تشکیل یافته است. در بخش اول به یادآوری مطالبی در خصوص ماتریس ها و پس از آن فضای ضرب داخلی، فضاهای هیلبرت، نرم ها و نرم های ماتریسی، توابع محدب و نامساوی هرمیت-هادامارد می پردازیم. بخش دوم که مطالب اساسی درباره ی عملگرها را دارا می باشد، از چهار قسمت تشکیل یافته است. در قسمت اول مطالبی در رابطه با عملگر های خطی و کراندار، عملگرهای مثبت و توابع عملگر محدب را بیان نموده ایم. پس از آن چند جمله ای ها روی یک عملگر کراندار، نامساوی هایی برای توابع عملگر محدب و توابع محدب چند متغیره را بیان نموده ایم. هم چنین بعضی قضایای مورد نیاز را با اثبات آورده ایم و اثبات بعضی قضایا را ارجاع داده ایم. مطالب و اثبات قضایای این فصل را می توانید در ([۱۳], [۱۲], [۵], [۱]) ببینید.

۱.۱ تعاریف ی از توابع محدب و محدب ماتریسی و نامساوی هرمیت-هادامارد

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و بعضی قضایا که در فصل های بعد کاربرد دارند، می پردازیم.

۱.۱.۱ تعاریف اولیه و نرم های ماتریسی

تعریف ۱.۱.۱. اسکالر λ را یک مقدار ویژه [۱] ماتریس $n \times n$، A گوییم هر گاه بردار $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$ موجود باشد، به طوری که $Au = \lambda u$. بردار u را یک بردار ویژه [۲] متناظر با مقدار ویژه λ گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه همه ی مقادیر ویژه ماتریس A را طیف [۳] A گوییم و آن را با $\sigma(A)$ یا $S_p(A)$ نمایش می دهیم. عدد حقیقی مثبت $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$ را شعاع طیفی A گوییم.

نتیجه ۱.۱.۱. ماتریس $n \times n$، A تکین است اگر وفقط اگر $0 \in S_p(A)$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱. (فضای برداری) : V را یک فضای برداری روی میدان F می نامیم، هرگاه تابع

$f : F \times V \longrightarrow V$ با ضابطه ی $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ دارای خواص زیر باشد:

۱. $(\alpha, \beta \in F, \quad x \in V)$ $\quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$؛

۲. $(\alpha \in F, \quad x_1, x_2 \in V)$ $\quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$؛

۳. $(\alpha, \beta \in F, \quad x \in V)$ $\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$؛

۴. $(x \in V)$ $\quad 1 \cdot x = x$.

[۱] Eigen value

[۲] Eigen vector

[۳] Spectrum

در اینجا ابتدا از نمادهای $M_n(\mathbb{C})$ و $M_n(\mathbb{R})$ به ترتیب برای همه ی ماتریس ها با درایه ها ی مختلط و حقیقی مقدار استفاده می شود. هر جا به اختصار از نماد M_n استفاده شد، منظور همان ماتریس ها با درایه ها ی مختلط می باشد.

با فرض این که A, B متعلق به $M_n(\mathbb{R})$ یا $M_n(\mathbb{C})$ باشند، آن گاه:

ماتریس A متقارن است هرگاه $A^T = A$؛

ماتریس A متقارن-کج است هرگاه $A^T = -A$؛

ماتریس A هرمیتی است هرگاه $A^* = A$؛

ماتریس A هرمیتی-کج است هرگاه $A^* = -A$؛

ماتریس A نرمال است هرگاه $A^*A = AA^*$؛

ماتریس A متعامد است هرگاه $AA^T = I$؛

ماتریس A یکانی است هرگاه $A^*A = I$؛

ماتریس A معین مثبت [۴] است هرگاه برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax > ۰$ باشد؛

ماتریس A نیمه معین مثبت [۵] است هرگاه برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax \geq ۰$ باشد.

هر گاه $A, B \in M_n$ باشند، آن گاه:

۱. $A + A^*$، AA^* و A^*A همه برای هر $A \in M_n$ هرمیتی هستند.

۲. هر گاه A هرمیتی باشد، آن گاه A^k برای هر $(k = ۱, ۲, ...)$ هرمیتی است. هر گاه A غیر تکین نیز باشد، آن گاه $A^{-۱}$ نیز هرمیتی است.

۳. هر گاه A, B هرمیتی باشند، آن گاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $\alpha A + \beta B$ هرمیتی است.

۴. برای هر $A \in M_n$، $A - A^*$ هرمیتی کج است.

۵. هر گاه A, B هرمیتی کج باشند، آن گاه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $aA + bB$ هرمیتی کج است.

[۴] Positive definite

[۵] Positive semidefinite

۶. هر گاه A هرمیتی باشد، بنابراین iA هرمیتی کج است.

۷. هر گاه A هرمیتی کج باشد، آن گاه iA هرمیتی است.

۸. هر ماتریس $A \in M_n$ می تواند به شکل زیر نوشته شود که،

$$A = \frac{۱}{۲}(A + A^*) + \frac{۱}{۲}(A - A^*) = H(A) + S(A),$$

که $H(A)$ قسمت هرمیتی و $S(A)$ قسمت هرمیتی کج A گفته می شود.

۹. هر گاه A هرمیتی باشد، درایه های قطر اصلی حقیقی هستند.

اثبات دو قضیه ی زیر را می توانید در [۱۲] ببینید.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید $A \in M_n$ هرمیتی باشد، در این صورت

۱. برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، x^*Ax حقیقی است.

۲. همه ی مقادیر ویژه ی A حقیقی هستند.

۳. برای هر $S \in M_n$، S^*AS هرمیتی است.

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه طیفی برای ماتریس های هرمیتی). فرض کنید $A \in M_n$ باشد. در این صورت A هرمیتی است، اگر و فقط اگر ماتریس یکانی $U \in M_n$ و ماتریس قطری حقیقی $\Lambda \in M_n$ وجود داشته باشند، به طوری که $A = U\Lambda U^*$ باشد و A حقیقی و هرمیتی است، اگر و فقط اگر ماتریس متعامد حقیقی $P \in M_n$ موجود باشد، به طوری که $A = P\Lambda P^T$ باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان (حقیقی یا مختلط) F باشد. تابع $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم است، هر گاه برای هر $x, y \in V$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\|x\| \geq ۰$؛

۲. $\|x\| = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰$؛

۳. $\|cx\| = |c|\|x\|$ برای هر اسکالر $c \in F$؛

۴. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تابعی که در شرایط بالا به جز شرط دوم صدق کند، یک نیم نرم نامیده می شود.

تعریف ۵.۱.۱. فضای نرم دار V، یک فضای برداری است که یک نرم روی آن تعریف شده باشد. فضایی که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد یک فضای نرم دار کامل یا فضای باناخ [۶] است.

فرض کنید X و Y فضاهایی برداری و نرم دار روی میدان اسکالر F باشند. $B(X,Y)$ را فضای همه ی نگاشت های خطی و کراندار (پیوسته) از X به Y در نظر می گیریم. $B(X,Y)$ یک فضای برداری نرم دار است که با نرم زیر معرفی می شود،

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; x \in X, \|x\| \leq ۱\}.$$

$B(X)$ را به جای $B(X,X)$ به کار می بریم. $B(X,F)$ که با X^* نشان داده می شود، فضای دوگان X نام دارد. عناصر فضای دوگان، تابعک های خطی پیوسته می باشند. هر گاه Y کامل باشد، $B(X,Y)$ کامل است. به ویژه فضای دوگان X^* همواره کامل است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد. تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow F$ ضرب داخلی است، هر گاه برای هر $x,y,z \in V$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\langle x,x \rangle \geq ۰$؛

۲. $\langle x,x \rangle = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰$؛

۳. $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$؛

۴. $\langle cx,y \rangle = c\langle x,y \rangle$ برای هر اسکالر $c \in F$؛

[۶] Banach space

۵. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

اثبات قضیه زیر را می توان در [۱۲] مشاهده نمود.

قضیه ۳.۱.۱. (نامساوی کشی-شوارتز [۷]): هر گاه $\langle .,.\rangle$ ضرب داخلی روی فضای برداری V و روی میدان حقیقی یا مختلط F باشند، آن گاه

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

برای هر $x,y \in V$ برقرار است. برابری زمانی اتفاق می افتد که x,y وابسته خطی باشند، یعنی برای هر $\alpha \in F$، $x=\alpha y$ یا $y=\alpha x$ باشد.

نتیجه ۲.۱.۱. هر گاه $\langle .,.\rangle$ روی V یک ضرب داخلی باشد، آن گاه $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی V است.

تعریف ۷.۱.۱. فضای ضرب داخلی V را فضای هیلبرت [۸] می نامیم، هر گاه V نسبت به نرم تولید شده توسط یک ضرب داخلی کامل باشد. فضای هیلبرت را معمولا با H نمایش می دهیم.

مثال ۱.۱.۱. $\mathbb{C}^n$ را با ضرب داخلی معمولی به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1} + ... + x_n\overline{y_n}, \tag{1.1}$$

که در آن $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n) \in C^n$ یک فضای ضرب داخلی است. هم چنین با نرم

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2},$$

که به وسیله ی ضرب داخلی تولید می شود، یک فضای نرم دار کامل و در نتیجه فضای هیلبرت می باشد.

تعریف ۸.۱.۱. تابع $|||.||| : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم ماتریسی است، هر گاه برای هر $A,B \in M_n$ شرایط زیر برقرار باشند:

---

[۷] Cauchy-Schwarz inequality

[۸] Hilbert space

۱. $|||A||| \geq ۰$؛

۲. $|||A||| = ۰ \Longleftrightarrow A = ۰$؛

۳. $|||cA||| = |c||||A|||$ برای اسکالرهای مختلط c؛

۴. $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$ (خاصیت زیر جمعی)؛

۵. $|||AB||| \leq |||A|||.|||B|||$ (خاصیت زیر ضربی).

توجه کنید که ویژگی های $(۱ - ۴)$ با نرم برداری معادل هستند. یک نرم روی ماتریس ها یک تابع است که در شرایط فوق صدق کند. مفهوم نیم نرم هم با حذف شرط دوم تعریف می شود.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\|.\|$ یک نرم روی $\mathbb{C}^n$ باشد. $|||.|||$ (نرم ماتریسی) را روی M_n با

$$|||A||| := \max_{\|x\|=۱} \|Ax\|,$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. نرم $|||.|||$ روی M_n برای هر ماتریس $A \in M_n$ و هر ماتریس یکه $U, V \in M_n$ به طور یکانی پایا گفته می شود، هر گاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$|||UAV||| = |||A|||.$$

از جمله نرم های به طور یکانی پایا، k-نرم های کی فن هستند که با $\|.\|_k$ نشان داده می شوند. k-نرم های کی فن از $\|.\|_k : \mathbb{C}_{p\times p} \to \mathbb{R}$ می باشند و به صورت $\|A\|_k = \sum_{i=۱}^{k} S_i(A)$ تعریف می شوند، به طوری که $S_۱(A) \geq ... \geq S_n(A)$ و مقادیری تکین از A می باشند.

هدف اصلی نمایش نتیجه زیر است، که برای مشاهده ی اثبات آن به [۱] مراجعه شود.

قضیه ۴.۱.۱. (کی فن [۹]) فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}_{n\times n}$، در این صورت $\|A\| \leq \|B\|$ برای نرم های به طور

[۹] Ky Fan

یکانی پایا برقرار است، اگر و فقط اگر برای هر $k = ۱, ۲, ..., n$، $\|A\|_k \leq \|B\|_k$ باشد.

مثال ۲.۱.۱. نرم های l_p برای $p = ۱, ۲, \infty$ نمونه هایی از نرم های برداری هستند. برای تشخیص این که نرم ماتریسی هستند، کافی است شرط آخر بررسی شود:

۱. نرم $l_۱$ را برای هر $A \in M_n$ به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\|A\|_۱ = \sum_{i,j=۱}^{n} |a_{ij}|,$$

که یک نرم ماتریسی است، زیرا

$$\begin{aligned}
\|AB\|_۱ = \sum_{i,j=۱}^{n} \left| \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| &\leq \sum_{i,j,k=۱}^{n} |a_{ik}b_{kj}| \\
&\leq \sum_{i,j,k,m=۱}^{n} |a_{ik}b_{mj}| = \left(\sum_{i,k=۱}^{n} |a_{ik}| \right) \left(\sum_{j,m=۱}^{n} |b_{mj}| \right) \\
&= \|A\|_۱ \|B\|_۱.
\end{aligned}$$

اولین نامساوی از نامساوی مثلث نتیجه می شود ونامساوی دوم با اضافه کردن جملات اضافی به مجموع حاصل می شود.

۲. نرم اقلیدسی یا $l_۲$ نرم نیز برای $A \in M_n$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$\|A\|_۲ = \left(\sum_{i,j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}},$$

که یک نرم ماتریسی است، زیرا

$$\|AB\|_۲^۲ = \sum_{i,j=۱}^{n} \left| \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^۲ \le \sum_{i,j=۱}^{n} \left(\sum_{k=۱}^{n} |a_{ik}|^۲ \right) \left(\sum_{m=۱}^{n} |b_{mj}|^۲ \right)$$
$$= \left(\sum_{i,k=۱}^{n} |a_{ik}|^۲ \right) \left(\sum_{m,j=۱}^{n} |b_{mj}|^۲ \right) = \|A\|_۲^۲ \|B\|_۲^۲.$$

این نامساوی، نامساوی کشی-شوارتز است. زمانی که در ماتریس ها به کار می رود نرم فروبینیوس، نرم شور، یا نرم اشمیت- هیلبرت نامیده می شود. اکنون توجه کنید که هر گاه $A = [a_۱ a_۲ ... a_n] \in M_n$ باشد، جملات آن به صورت بردارهای ستونی $a_i \in \mathbb{C}^n$ نوشته می شوند. در این صورت

$$\|A\|_۲^۲ = \|a_۱\|_۲^۲ + ... + \|a_n\|_۲^۲.$$

از این رو نرم $l_۲$ روی $\mathbb{C}^n$ هنگامی که $U \in M_n$ و U یکه باشد به طور یکانی پایاست، یعنی

$$\|UA\|_۲^۲ = \|Ua_۱\|_۲^۲ + ... + \|Ua_n\|_۲^۲ = \|a_۱\|_۲^۲ + ... + \|a_n\|_۲^۲ = \|A\|_۲^۲.$$

برای هر $A \in M_n$ از این که $\|A^*\|_۲ = \|A\|_۲$، زمانی که $U, V \in M_n$ و U, V یکه هستند، نتیجه می گیریم که

$$\|UAV\|_۲ = \|AV\|_۲ = \|V^* A^*\|_۲ = \|A^*\|_۲ = \|A\|_۲.$$

بنابراین نرم $l_۲$ روی M_n به طور یکانی پایاست.

۳. نرم l_∞ برای $A \in M_n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|A\|_\infty = \max_{۱ \le i,j \le n} |a_{ij}|,$$