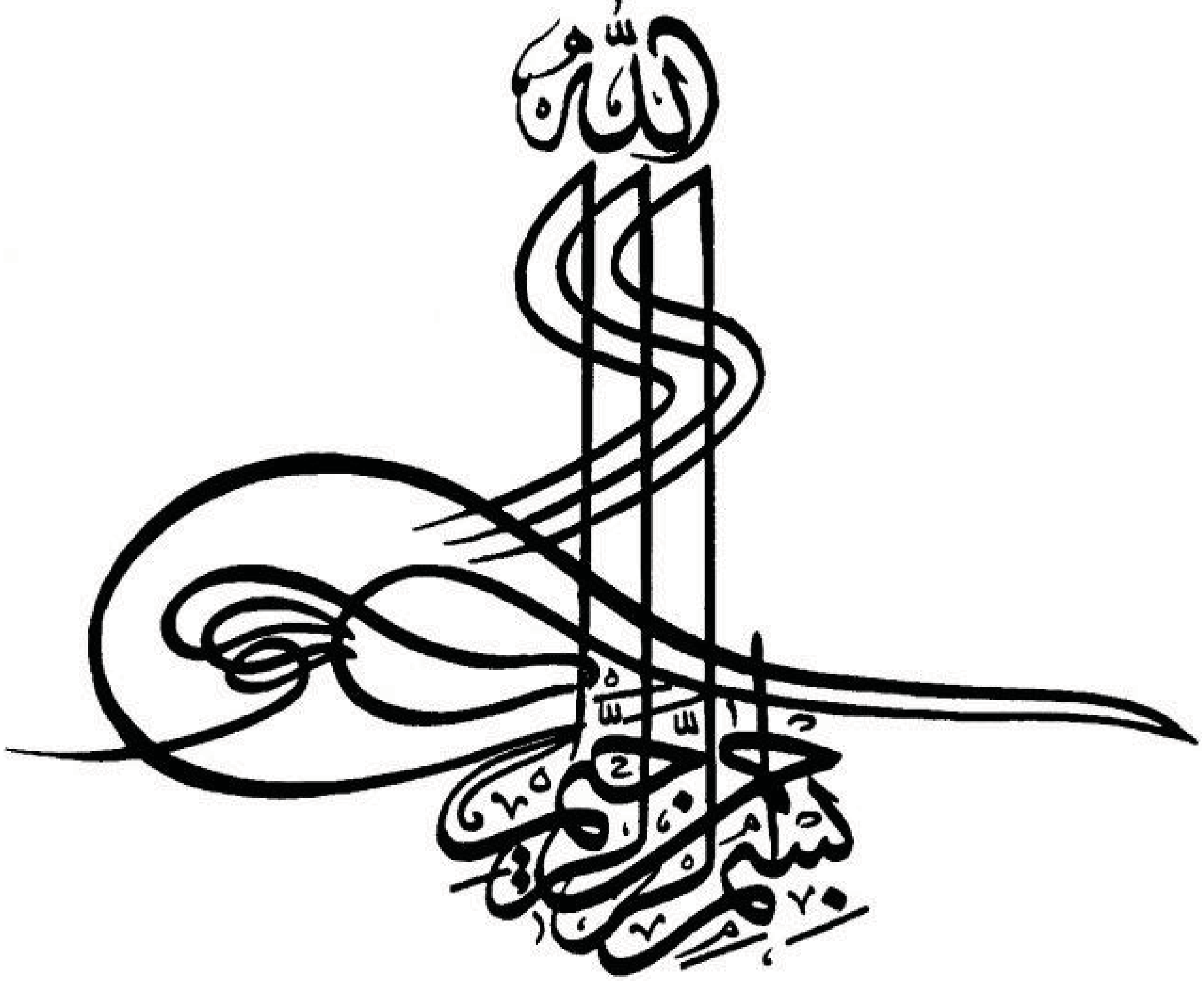
بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی

عنوان:

جواب‌های موج منفرد معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحی آب با استفاده از روش هیروتا، روش تانژانت- کتانژانت هایپربولیک و روش تابع نمایی

استادان راهنما:

دکتر عبداله برهانی‌فر
دکتر جمال صفار اردبیلی

استاد مشاور:

دکتر صدیف احدپور

پژوهشگر:

ندا کاردان

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و کسانی که دوستشان می دارم

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت. به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌توقع، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استادان راهنمای فرزانه‌ی خود، جناب آقای **دکتر عبداله برهانی فر** و **دکتر جمال صفار اردبیلی** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای **دکتر صدیف احد پور** که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.

از استاد گرانقدرجناب آقای **دکتر محمد ضارب نیا** که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبّل فرمودند، سپاسگذاری می‌کنم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. همچنین از تمامی دوستان دوران تحصیل که همواره یار و همدمم بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

خدایا چنان کن سرانجام کار تو خشنود باشی و ما رستگار.

ندا کاردان

شهریور ۱۳۹۳

نام خانوادگی: کاردان نام: ندا

عنوان پایان‌نامه:
جواب‌هاي موج منفرد معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحي آب با استفاده از روش هیروتا، روش تانژانت ـ کتانژانت هایپربولیك و روش تابع نمایي

استادان راهنما: دکتر عبداله برهانی فر، دکتر جمال صفار اردبیلی
استاد مشاور: دکتر صدیف احدپور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: رياضي کاربردی گرایش: آنالیز عددی
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۱۳۹۳/۶/۸ تعداد صفحات: ۸۹

چکیده

هدف این پایان‌نامه به دست آوردن جواب‌هاي موج منفرد معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحي آب با استفاده از روشهاي دوخطی هیروتا، تانژانت ـ کتانژانت هایپربولیک و تابع نمايي مي‌باشد که از روش دوخطی هیروتا برای به دست آوردن جواب‌هاي سولیتون چندگانه براي معادله‌ی به طور کامل انتگرال‌پذیر به فرم معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحی آب استفاده شده است. از روش تانژانت ـ کتانژانت هایپربولیك برای به دست آوردن جواب‌هاي یک سولیتون استفاده خواهد شد. هم چنین، از روش تابع نمايي برای به دست آوردن جواب‌هاي موج سیار با ساختار فیزیکي مجزا براي ارزیابي معادله‌ی غیر خطي استفاده مي‌شود.

کلیدواژه‌ها: روش دوخطي هیروتا؛ روش تانژانت ـ کتانژانت هایپربولیك؛ روش تابع نمایی؛ جواب‌هاي سولیتون چندگانه؛ معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحي آب.

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

پیشگفتار

بسیاری از مسائل فیزیک و ریاضی را می‌توان به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی [۱] یا معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزیی [۲] فرمول بندی کرد، با توجه به اینکه به دست آوردن جواب دقیق برای بسیاری از این مساله‌ها سخت و وقتگیر و حتی در بعضی موارد غیر ممکن است، به این خاطر حل عددی مورد توجه قرار می‌گیرد.
کلارکسون [۳] و منسفیلد [۴] معادله‌ی تعمیم یافته‌ی موج سطحی آب $(GSWW)$ [۵] را به شکل زیر معرفی کرده‌اند.

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u u_t - \beta u_x \int^{x} u_t dx + u_x = 0$$

که α و β ثابت‌های غیر صفر هستند. برای این معادله دو حالت خاص فرض می‌شود.

۱. $\alpha = \beta$ که در این حالت $GSWWI$ نامیده می‌شود.

۲. $\alpha = 2\beta$ و در این حالت نیز $GSWWII$ نامیده می‌شود.

آبلوویتز [۶] این معادله را در حالت خاص $\alpha = 4, \beta = 2$ بررسی کرده است. (آبلوویتز، ۱۹۷۴)
همچنین هیروتا [۷] و ساتسوما [۸] نیز این معادله را در حالت $\alpha = \beta = 3$ بررسی کرده‌اند. (هیروتا، ساتسوما، ۱۹۷۶)
در این پایان‌نامه معادله $GSWW$ به صورت تحلیلی به روشهای گوناگون مانند روش هیروتا [۹]، روش تابع نمایی [۱۰] و روش تانژانت‌ـ کتانژانت هایپربولیک [۱۱] حل شده است.

---

[۱] Ordinary differenttial equation
[۲] Partial differenttial equation
[۳] Clarkson
[۴] Mansfield
[۵] generalized shallow water wave equation
[۶] Ablowitz
[۷] Hirota
[۸] Satsuma
[۹] Hirota’ s bilinear method
[۱۰] Exp-function
[۱۱] Tanh-coth method

این پایان‌نامه بر اساس تبیین مطالب ذکر شده، به صورت زیر تنظیم شده است.
در فصل اول این پایان‌نامه تعاریف و مفاهیم اولیه، مربوط به بحث امواج که در فصل‌های بعد مورد استفاده است را یادآوری می‌کنیم.
در فصل دوم روش‌های تحلیلی و تقریبی برای معادله‌ی مشتقات جزیی را بررسی می‌کنیم.
در فصل سوم به تشریح کامل روش و حل معادله‌ی $GSWW$ می‌پردازیم.
در فصل چهارم به حل معادله‌ی $GSWW$ با استفاده از روش تقریبی ارائه شده در فصل دوم می‌پردازیم و در نهایت با جواب‌های دقیق فصل سوم به مقایسه پرداخته ایم.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مفاهیم فیزیکی

امروزه بسیاری از دانشمندان به اهمیت علوم غیر خطی برای درک صحیح‌تری از طبیعت واقفند. یافتن حل‌های موجی در معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی، نقش مهمی را در مطالعه‌ی پدیده‌های فیزیکی غیر خطی بازی می‌کنند. مدل‌ها و پدیده های موجی غیر خطی همواره در علوم مختلف و بالاخص در علم مهندسی ظاهر می‌شود، از قبیل دینامیک سیالات، فیزیک پلاسما، فیبر نوری غیر خطی، فیزیک حالت جامد و علوم زیستی. در واقع انتشار و خواص امواج غیر خطی کاملاً متفاوت از انتشار امواج خطی می‌باشند و غیر خطی بودن نقش پر اهمیتی در پدیده‌های موجی ایفا می‌کند. در چند دهه‌ی اخیر فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان فعالیت‌های مهمی در این راستا انجام داده‌اند. بسیاری از دستاوردهای جدید برای حل معادلات غیر خطی مذکور به همراه مزایا و اشکالاتی پیشنهاد شده‌اند، از قبیل روش‌های تحلیلی که بطور چشم‌گیری در سال‌های اخیر گسترش یافته اند. روش‌های جدید و قدرتمندی برای توصیف این امواج به زبان ریاضی ابداع شده و بیش از یکصد معادله بدست آمده است که امواج منفرد می‌توانند جواب‌های آنها باشند. هر چند اکتشاف اولیه آنها از روی امواج بلند آب صورت گرفت، لیکن امواج انفرادی و سولیتون ها را در میدان‌ها و زمینه‌های گوناگون علمی و فنی مورد مطالعات و تحقیقات وسیع نظری و تجربی قرار داده‌اند، بطوریکه امواج منفرد در حوزه‌های طبیعی نظیر جوّ، اقیانوس‌ها، فیزیک پلاسما و تارهای نوری غیر خطی و همچنین در دستگاه‌های عصبی موجودات زنده مشاهده شده‌اند، در زیست شناسی سولیتون‌ها در فرایند انتقال انرژی توسط پروتئین‌های آلفا هلیکس مشارکت می‌نمایند، طبیعت غیر خطی نیروهای بین اتم‌ها می‌تواند به تشکیل امواج انفرادی یا سولیتون‌ها منجر می‌شود. دیگر اینکه سولیتون‌ها نقش تکنولوژیکی مهمی در ارتباطات راه دور به عهده گرفته‌اند. پایداری این شکل و مصونیت این امواج در برابر این آشفتگی‌ها، آنها را حامل‌های ایده آلی برای سیگنال‌های راه دور ساخته است.

۱.۱.۱ امواج منفرد(سولیتون)

در بسیاری از حوزه‌های مهندسی و فیزیک، غیر خطی بودن ممکن است منجر به بروز پدیده‌هایی با پیامدهای جدید شود، یکی از این پدیده‌ها خلق سولیتون هاست. سولیتون به دسته خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله‌ی غیر خطی موج گفته می‌شود که با شکل، ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. البته توافق عام بر سر تعریف سالیتون وجود ندارد و در منابع مختلف سالیتون را به صورت‌های متفاوت تعریف می‌کنند.

امواج در محیط‌های گوناگون، امواج صوت، امواج آب، امواج الکترومغناطیسی و بسیاری از انواع دیگر جملگی از قوانین واحدی پیروی می‌کنند، دامنه بسامد و سرعت امواج با معادلات ساده‌ای به خواص انتشار مربوط می‌شوند. در میان انواع غیر عادی‌تر موج و همچنین انواعی که توصیف ریاضی آنها دشوارتر است، امواجی هستند که آنها را امواج منفرد می‌نامند. امواج تناوبی تکرار می‌شوند و برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌های آنها به صورت قطاری بی پایان، یکدیگر را تعقیب می‌کنند. موج منفرد چنانکه از نامش برمی‌آید فقط شامل یک برآمدگی یا یک فرورفتگی است که به صورت انفرادی حرکت می‌کنند.

تا دهه‌ی ۱۹۶۰ به نظر می‌رسید که در امواج منفرد چیزهای عجیب و غریب دیگری وجود ندارد، اما بعد، کشف غیر منتظره‌ای رخ داد، نورمن زابوسکی [۱] از آزمایشگاه‌های بل و مارتین کروسکال [۲] از دانشگاه پرینستون مشغول مطالعه‌ی تغییرات حرکت این امواج از طریق شبیه سازی‌های کامپیوتری بودند که نتایج آزمایش‌های آنها منجر به طرح این پرسش شد که اگر دو موج منفرد با هم برخورد کنند چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ انتظار می‌رفت برخوردی شبیه به برخورد دو اتومبیل یا دو هواپیما باشد. اما چیزی که در شبیه سازی مشاهده شد این بود که امواج منفرد از میان یکدیگر عبور کردند و با همان شکل و هویت قبلی سالم از طرف دیگر بیرون آمدند. برخورد فقط فاز نسبی این دو موج را تحت تاثیر قرار می‌داد، یعنی امواج نسبت به موضعی که در وضعیت بدون برخورد اشغال می‌کردند قدری جابجا می‌شدند. امواج منفرد چنان همدوستی و پایداری چشمگیری را به نمایش گذاشتند که به نظر می‌رسید بیشتر ذرات ماده باشند تا شبیه امواج. به همین مناسبت، زابوسکی

[۱] Zabusky
[۲] Kurskal Martin

و کروسکال به پیروی از این رسم که ذرات بنیادی در فیزیک با کلمات مختوم به اُن نامگذاری می‌شوند (مانند پروتون) این امواج را سالیتون نامیدند. هم اکنون از تارهای نوری به طور وسیعی در مخابرات استفاده می‌شود، منبع نورانی مورد استفاده در تارهای نوری، لیزرهای نیمه هادی هستند که اطلاعات را به صورت کدهای صفر و یک در محیط منتقل می‌کنند. این پالس‌ها به شکل قطاری از امواج در داخل تار حرکت می‌کنند و دارای سرعت انتقال بالا هستند. تحقیقات روی لیزرهای سولیتونی هم اکنون ادامه دارد. لیزرهای سولیتونی قابلیت تولید و ارسال پالس‌هایی با پهنای زمانی کمتر از لیزرهای نیمه هادی دارند و میرایی آنها در محیط بسیار ناچیز است. در حال حاضر ایجاد یک سیستم تار نوری با سیگنال موج منفرد برای استفاده بعدی در اقیانوس اطلس در دست انجام است.

۲.۱.۱ جواب موج منفرد(سولیتون)

یک جواب موج منفرد یا سالیتون جوابی برای هر معادله‌ی موج است که سه ویژگی زیر را دارا باشد:

۱ـ با گذشت زمان شکل آن تغییر نکند. (موج‌های معمولی با گذشت زمان پخش می‌شوند و سرعت آن‌ها کاهش می‌یابد).

۲ـ در منطقه‌ای از فضا محدود باشد. (در امواج متناوب، برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌ها به صورت قطاری بی پایان یکدیگر را دنبال می‌کنند، در حالی که یک سولیتون تنها شامل یک برآمدگی یا یک فرورفتگی است).

۳ـ بعد از برخورد با سولیتون دیگر شکل خود را حفظ کند. (بر خلاف موج‌های معمولی که بعد از برخورد با هم ترکیب می‌شوند، دو موج سولیتون بعد از برخورد بدون هیچ برهم کنشی از یکدیگر عبور می‌کنند و موج بزرگ‌تر از موج کوچک‌تر سبقت می‌گیرد).

۳.۱.۱ تعریف ساده در فیزیک کلاسیک

برخی از جواب‌های معادله موجی که غیر خطی باشند، می‌توانند خاصیت‌های زیر را داشته باشند:

۱ . با حرکت بسته موج، شکل و سرعت آن تغییر نکند.

۲. بقای شکل و سرعت مجانبی حتی پس از برخورد چند بسته موج با هم حفظ گردد.

در فیزیک کلاسیک به جواب‌هایی که خاصیت ۱ را داشته باشند موج انفرادی می‌گویند. اگر جواب علاوه بر خاصیت ۱ خاصیت ۲ را نیز دارا باشد آن را سولیتون می‌نامند.

۴.۱.۱ عملگر دو خطی (D ـ عملگر) هیروتا

فرض کنید $S : C^n \to C$ یک فضای توابع مشتق پذیر باشد، آنگاه (D ـ عملگر) هیروتا که $D : S \times S \to S$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(D_t^n D_x^m)\{f.g\} = (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'})^n(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})^m\{f(x,t).g(x',t')\}\mid_{x'=x,t'=t}$$

۵.۱.۱ اندازه حرکت

فرض کنید جسمی دارای جرم m ، با سرعت ثابت v در حال حرکت است. در این صورت $p = m \times v$ ، را اندازه‌ی حرکت (تکانه) جسم مفروض گوییم.

۶.۱.۱ نسبت پراکندگی

نسبت پراکندگی یک موج، رابطه‌ی بین انرژی و اندازه‌ی حرکت آن است.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، مدل‌های توانمندی برای توصیف و بیان بسیاری از پدیده‌ها می‌باشند. اکثر مسائل مهندسی در زمینه‌های الکتریسیته و مغناطیس، دینامیک سیالات، ترمودینامیک، انتقال حرارت، ائرودینامیک (علم مربوط به حرکت گاز ها و هوا یا اجسام در آنها) و... می تواند با معادلات مشتقات جزئی تعریف شوند.

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله متشکل از دو یا چند متغیر مستقل توام با متغیر وابسته و مشتقات جزئی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی گوییم هرگاه متغیر وابسته و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شوند. معادله‌ی دیفرانسیل که خطی نباشد، معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی را شبه خطی گوییم هرگاه معادله نسبت به بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله، خطی باشد.

مثال ۱.۲.۱. *معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:*

$$u_{xxt} + u_{xx} - u^{۲} = ۰$$

با دقت در معادله‌ی بالا و در نظر گرفتن تعریف‌های فوق، ملاحظه می‌شود که معادله‌ی بالا یک معادله‌ی شبه خطی است و واضح است که خطی نمی‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱. مرتبه یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. ۱.عمومی‌ترین شکل معادلات با مشتقات جزئی خطی و شبه خطی از مرتبه اول را می توان به ترتیب زیر نوشت:
خطی

$$p_{۱}(x,y)z_x + p_{۲}(x,y)z_y + p_{۳}(x,y)z(x,y) = R(x,y)$$

شبه خطی

$$p_{۱}(x,y)z_x + p_{۲}(x,y)z_y = R(x,y,z)$$

۲.به طور مشابه، عمومی‌ترین شکل معادلات با مشتقات جزئی خطی و شبه خطی از مرتبه دوم برای دو متغیر مستقل را می‌توان به صورت زیر نوشت:
خطی

$$a(x,y)z_{xx}+b(x,y)z_{xy}+c(x,y)z_{yy}+d(x,y)z_x+e(x,y)z_y+f(x,y)z=g(x,y)$$

شبه خطی

$$a(x,y)z_{xx}+b(x,y)z_{xy}+c(x,y)z_{yy}+D(x,y,z,z_x,z_y)=0$$

تعریف ۶.۲.۱. یک معادله دیفرانسیل همگن نامیده می‌شود هرگاه تمام جملات معادله شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن باشد. در غیر این صورت، آن را ناهمگن می‌نامیم.