بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش : آنالیزعددی

عنوان :

بررسی انتقال حرارت هدایت غیرفوریه ای در سیستم مختصات کارتزین

استاد راهنما :

دکتر حجت ا... ادیبی

استاد مشاور :

دکتر سیف ا... سعدالدین

پژوهشگر :

زکیه رضوانی

پاییز ۱۳۹۰

تشکر و قدردانی

در سرزمین اندیشه زای تحصیل دانش آموختگان آنچه آموخته اند باید که بی دریغ تقدیم کنند. باشد که راهی برای آیندگان بگشایند تا آنچه را آغاز کرده اند دیگران به انجام برسانند. برای ادای حقی که بر گردن داریم وظیفه مان حکم می کند که پیشروان راستین خویش را بشناسیم و از اینکه دانش خویش را چراغ راه ما کرده اند سپاس بگزاریم. امید آنکه این کمترین ره آورد را دو ساله دانشگاه مورد قبول اهل فن قرار گیرد.

بخش حاضر به عنوان رساله دانشجویی نتیجه راهنمائی های ثمربخش استاد گرانقدر جناب آقای دکتر **حجت اله ادیبی** و ارشاد و رهنمود تمام و کمال استاد ارجمند جناب آقای دکتر **سیف اله سعدالدین** خدمت ناچیزی است که در اختیار علاقمندان قرار می گیرد.

به همین جهت بر خویش لازم می دانم که مراتب سپاس و تشکر خویش را به پیشگاه این عزیزان تقدیم نمایم و از همه بزرگوارانی که به نحوی اینجانب را یاور و همراه برای تحقیق و تنظبم این پایان نامه بوده اند ازجمله برادر عزیزم **دکتر محمد جواد رضوانی** سپاس گزارم.

سرانجام از همسر بزرگوارم که همه سختی ها را برای سرانجام کار دانشجوئیم متحمل شده اند تشکر و قدردانی می نمایم

به یقیین پایان نامه پایان کار یک دانشجوی طالب علم نیست بلکه آغازی است برای مطالعه و تحقیقی دیگر امید آنکه از این تجربه بر کشف معرفتها و مهارتهای دیگر نائل آئیم. از خدای بزرگ خواهانیم ما را کمک نماید تا چنان باشیم که رضایت او در آن باشد.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم که با دعاها و حمایتهای بی دریغشان مشوقم در کسب علم و دانش بوده اند و همسر عزیزم که با سعه صدر در تمامی مراحل زندگی مشترکمان همچون تکیه گاهی مرا یاری نموده است .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده

قانون ویژه حاکم در هدایت حرارتی کلاسیک، قانون فوریه است که مبتنی بر انتشار حرارت با سرعت نا محدود در قطعه می‌باشد؛ به بیان دیگر هر اغتشاش حرارتی که در یک نقطه ایجاد شود، به طور آنی بر تمام نقاط دیگر قطعه تاثیر می‌گذارد، ولی چون انرژی حرارتی توسط حرکت مولکولها از یک نقطه به نقطه دیگر با سرعت محدود منتشر می‌شود، نتیجه می‌گیریم که قانون هدایت حرارتی کلاسیک (فوریه ای) یک تقریب مرتبه پایین از یک رابطه بنیادی است. مثلاً در مواقعی که بخواهیم انتقال حرارت را در شروع زمان گذرا، در دماهای خیلی پایین (نزدیک صفر مطلق) یا در مواقعی که انرژی به صورت پالس های متمرکز انرژی آزاد می‌گردد بررسی نمائیم، محدود در نظر گرفتن سرعت انتشار حرارت ضرورت پیدا می‌کند. چون برای بعضی از حالات خاص این قانون نتایج نادرستی را ارائه می‌دهد، کاتانئو و ورنوت[1] قانون مزبور را تعمیم دادند، بطوریکه یک ترم زمانی به طرف چپ معادلهٔ فوریه اضافه گردید. با ادغام این رابطه با قانون بقای انرژی به معادله ای از نوع هیپربولیک می‌رسیم و با توجه به اینکه معادله موج نیز از نوع هیپربولیک است، این نوع هدایت حرارت، به هدایت حرارت موجی نیز مرسوم است.در این پایان نامه معادله انتقال حرارت غیرفوریه ای در سیستم مختصات کارتزین و در حالت گذرا با استفاده از تبدیلات انتگرالی و به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است برای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی گوناگون تبدیل انتگرالی بدست آمده و سپس توابع توزیع تحلیلی به صورت سری های نامتناهی حاصل شده است. انگیزه انجام این پایان نامه کار بررسی نمودن تبدیلات انتگرالی در مسائل صنعتی مختلف مرتبط با انتقال حرارت از قبیل گرمایش با منبع انرژی حرارتی متمرکز مانند پرتو لیزر، قوس پلاسما و پرتو الکترونیکی و نیز سرمایش در دمای بسیار پایین می باشد.

لغات کلیدی: انتقال حرارت فوریه ای، انتقال حرارت غیرفوریه ای، تبدیلات انتگرالی، توابع اشترم لیوویل، توابع متعامد

---

1 Cattaneo and Vernotte

فصل اول

مقدمه ای بر انتقال حرارت

۱-۱) انتقال حرارت هدایت فوریه ای

این قانون جزء قوانین اصلی و اساسی انتقال حرارت می باشد و بر مبنای مفهوم پیوستگی و قانون بقای انرژی پایه ریزی شده است. اساس این قانون به بهترین وجه با آزمایش زیر بیان می شود:

یک صفحه مسطح به ضخامت L که دو بعد دیگر آن بسیار بزرگ است را در نظر بگیرید. مساحت سطح صفحه را A می نامیم، T_1 و T_2 دمای سطوح دو طرف آن می باشند. به علت تفاوت دمایی بین دو طرف سطح، حرارت از میان صفحه عبور می نماید و طبق قانون دوم ترمودینامیک می دانیم که مسیر این جریان حرارت از سطح با دمای بالا به طرف سطح با دمای پایین است. طبق قانون اول ترمودینامیک در هدایت پایا، این جریان گرمایی با شدت ثابت عبور می کند. آزمایشات انجام شده با اجسام متفاوت نشان داده است که میزان انتقال حرارت (Q) مستقیما با اختلاف دمای (T_1-T_2) و مقدار مساحت صفحه (A) متناسب است و با ضخامت صفحه (L) نسبت معکوس دارد، یعنی:

$$Q \approx A\frac{T_1-T_2}{L} \qquad (۱-۱)$$

وقتی ثابت تناسب در رابطه (۱-۱) قرار داده می شود، این رابطه می تواند به صورت یک معادله در آید. یعنی:

$$Q = kA\frac{T_1-T_2}{L} \qquad (۲-۱)$$

ثابت تناسب (k)، که مقدار آن مثبت است، ضریب هدایت حرارتی ماده نام دارد و واحد آن (وات بر متر بر کلوین)، $(w/m^{\circ}K)$ در سیستم آحاد بین المللی SI است.

حال همان سطح مسطح را در نظر بگیرید و فرض کنید که دمای آن در نقطه x ، T_1 و در نقطه $x+\Delta x$، برابر T_2 باشد. شدت انتقال حرارت عبور نموده از میان صفحه، می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$Q = kA\frac{T_1-T_2}{(x)-(x+\Delta x)} \qquad (۳-۱)$$

چنانچه در این معادله $\Delta x \to 0$ باشد، در این صورت داریم:

$$Q = -kA \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \qquad (۱-۴)$$

حد این عبارت، تعریف مشتق درجه حرارت نسبت به محور xها است. بنابراین معادله (۱-۴) به صورت زیر در می آید:

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \qquad (۱-۵)$$

رابطه (۱-۵) قانون فوریه برای هدایت حرارتی دریک سیستم یک بعدی می باشد. مقدار حرارت منتقل شده در واحد زمان در واحد سطح، شار حرارتی نامیده می شود. واحد شار حرارتی، وات بر متر مربع در سیستم آحاد SI است. معادله (۱-۵) اکنون برحسب شار حرارتی به صورت زیر در می آید:

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{dT}{dx} \qquad (۱-۶)$$

حال اگر معادله (۱-۶) را در سه بعد بنویسیم، به معادله (۱-۷) می رسیم که فرم برداری قانون فوریه برای انتقال حرارت اجسام ایزوتروپیک است. در اجسام همگن، خواص جسم و همچنین ضریب هدایت حرارتی ماده در جهات مختلف یکسان می باشد. قانون فوریه این مطلب را بیان می کند که، انتقال حرارت از طریق هدایت در مسیر عمود بر سطوحی با دمای بالاتر به سطوحی با دمای پایین تر صورت می پذیرد. در حقیقت کاربرد این قانون برای محاسبه هدایت در اجسام جامد همگن بوده و کاربرد عملی آن برای مسائل متعدد است؛ که نیازمند اندازه گیری های آزمایشگاهی ضریب هدایت حرارتی در نمونه های جسم مورد نظر می باشد. معادله (۱-۷) در مسائل پایا، همانند قوانین معتبر ویژه‌ای می‌باشد که هرگز رد نشده اند.

فرض کنید جسم همگن باشد ، طبق قانون فوریه خواهیم داشت:

$$q = -k\nabla T \qquad (۱-۷)$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j + \frac{\partial T}{\partial z} k$$

در قانون کلاسیک فوریه، مشاهده می شود شار حرارتی رابطه ای خطی با گرادیان دما دارد. با قرار دادن رابطه بالا در معادله انرژی به معادله (۱-۸) می رسیم:

$$\nabla.(k\nabla T)+\dot{S}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱–۸)$$

معادله (۱–۸)، معادله عمومی انتقال حرارت هدایت برای اجسام همگن است. معادله (۱–۸) با در نظر گرفتن $\nabla k=0$ به معادله (۱–۹) تبدیل می شود، که به معادله بایو– فوریه[1] معروف است. در جـدول (۱–۱) می توان معادلات مختلف حاصل از معادله (۱–۹) را مشاهده نمود.

$$\nabla^2 T+\frac{\dot{S}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱–۹)$$

در معادله بالا α قابلیت پخش حرارتی ، ∇^2 اوپراتور لاپلاس، $\dot{S}$ تولید حرارت، c ظرفیت گرمایی ویژه و ρ دانسیته می باشد[۱].

جدول (۱–۱) معادلات مختلف حاصل از معادله بایو – فوریه[۲]

نام معادله	شرایط	معادله
بایو – فوریه	خواص ترموفیزیکی ثابت	$\nabla^2 T+\frac{\dot{S}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$
نفوذ	خواص ترموفیزیکی ثابت – عدم وجود منبع انرژی داخلی	$\nabla^2 T=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$
پواسون[2]	خواص ترموفیزیکی ثابت – حالت پایا	$\nabla^2 T+\frac{\dot{S}}{k}=0$
لاپلاس	خواص ترموفیزیکی ثابت – حالت پایا – عدم وجود منبع انرژی داخلی	$\nabla^2 T=0$

[1] Biot - Fourier
[2] Poisson

۱-۲) معادله بقای انرژی در سیستم مختصات کارتزین، استوانه ای و کروی

هدف اصلی تجزیه و تحلیل هدایت گرمایی در یک ماده ناشی از شرایط گرمایی تحمیل شده بر مرزهای آن است یعنی می‌خواهیم توزیع دما را که تغییرات دما بر حسب مکان در یک ماده را مشخص می‌سازد بدست آوریم با معلوم شدن توزیع دما، شار گرما در هر نقطه از این ماده یا روی سطح آن را می توان با استفاده از قانون فوریه محاسبه کرد.

اکنون روش توزیع دما را بررسی می‌کنیم برای این منظور از معادله بقای انرژی نیز استفاده می‌کنیم به این ترتیب که با تعریف حجم کنترلی دیفرانسیلی و مشخص ساختن فرآیند های انتقال انرژی، معادلات نرخ انتقال مربوطه را معرفی می‌کنیم. نتیجه، یک معادله دیفرانسیل خواهد بود که حل آن با توجه به شرایط مرزی، توزیع دما را در این ماده مشخص خواهد کرد.

ماده همگنی را در نظر می‌گیریم که گرادیان دما در آن وجود داشته باشد و توزیع دما، T(x,y,z) ، در مختصات کارتزین بیان شود برای استفاده از معادله انرژی ابتدا یک حجم کنترل بی نهایت کوچک (دیفرانسیلی) dx.dy.dz را تعریف می‌کنیم. قدم دوم مشخص کردن فرآیندهای انرژی در این حجم کنترل است که مبنای فرمولبندی قانون اول خواهد بود.

اگر گرادیان دما وجود داشته باشد انتقال هدایت گرمایی روی تمام سطوح کنترل رخ می‌دهد. نرخ هدایت گرمایی در جهت عمود بر سطوح کنترل در z, y, x را به ترتیب با q_z , q_y , q_x نشان می‌دهیم. نرخ هدایت از سطح روبرو را میتوان با بسط سریهای تیلور و صرف نظر کردن از جملات با درجه بالاتر بیان نمود:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{dx}dx \qquad (۱- الف)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{dy}dy \qquad (۱ـ ب)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{dz}dz \qquad (۱- ج)$$

معادله (الف) این نکته را بیان می‌کند که مولفه x نرخ انتقال گرما در x+dx برابر است با مقدار این مولفه در x به اضافه نرخ تغییر آن در جهت x ضربدر dx .

ممکن است در داخل ماده منبع انرژی نیز وجود داشته باشد که با نرخ تولید انرژی گرمایی در ارتباط است این عبارت به صورت زیر نشان داده می شود

$$\dot{E_g} = \dot{q}dxdydz \qquad (۱-۱۰)$$

که $q^{\cdot}$ نرخ تولید انرژی بر واحد حجم ماده (وات بر متر مکعب)، (w/m^3) است.

به علاوه ممکن است مقدار انرژی گرمایی داخلی ذخیره شده توسط ماده داخل حجم کنترل نیز تغییر کند بر حسب نرخ عبارت ذخیره انرژی برابر است با

$$\dot{E_{st}} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} dxdydz \qquad (۱-۱۱)$$

آخرین گام در اجرای روش نوشتن معادله بقای انرژی با استفاده از معادلات نرخ انتقال گرماست.

بر این اساس شکل کلی معادله بقای انرژی عبارت است از

$$\dot{E_{in}} + \dot{E_g} - \dot{E_{out}} = \dot{E_{st}} \qquad (۱-۱۲)$$

$\dot{E_{in}}$ انرژی ورودی، $\dot{E_g}$ انرژی تولید، $\dot{E_{out}}$ انرژی خروجی و $\dot{E_{st}}$ انرژی ذخیره شده می باشند.

با جایگذاری معادلات (۱-۱۰) و (۱-۱۱) داریم

$$q_\mathrm{x} + q_\mathrm{y} + q_\mathrm{z} + \dot{q}dxdydz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} dxdydz \qquad (۱-۱۳)$$

با جایگذاری معادلات (۱- الف)، (۱ـ ب)، (۱- ج) داریم:

$$-\frac{\partial \mathrm{q_x}}{\partial \mathrm{x}} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} dxdydz \qquad (۱-۱۴)$$

با توجه به معادله نرخ گرما :

$$q_\mathrm{x} = -KA\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱-۱۵)$$

داریم:

$$q_x = -k\ dy\ dz \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۱-۱۶)$$

$$q_y = -k\ dx\ dz\ \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_z = -k\, dx\, dy\, \frac{\partial T}{\partial z}$$

که در آنها برای بدست آوردن نرخ انتقال گرما، هر کدام از مولفه های شار گرما در سطح کنترل (دیفرانسیلی) مربوطه ضرب شده اند با جایگذاری معادلهای (۱-۱۴) ، (۱-۱۵)،(۱-۱۶) و تقسیم کردن کل معادله بر ابعاد حجم کنترل (dxdydz) معادله زیر به دست می آید

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}\right)+\dot{q}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} \qquad (۱۷-۱)$$

معادله (۱-۱۷) شکل عمومی پخش گرما در مختصات کارتزین است با حل آن توزیع دما T(x,y,z) به صورت تابعی از زمان بدست می آید

غالبا می توان با حالتهای ساده شده معادله (۱-۱۷) کار کرد. برای مثال اگر ضرایب هدایت گرمایی ثابت بماند معادله گرما عبارت خواهد بود از :

با تعریف α به عنوان ضریب پخش حرارت به صورت : $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ داریم:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{\mathrm{k}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}} \qquad (۱۸-۱)$$

معادله گرما در مختصات استوانه ای یا کروی نیز قابل بیان است حجم کنترل دیفرانسیلی برای این دو دستگاه در شکلهای زیر نشان داده شده اند

اگر قانون فوریه که به صورت (۱-۱۹)

$$q'' = -k\nabla \mathrm{T} = -\mathrm{k}(\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}+j\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}+\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}) \qquad (۱۹-۱)$$

نوشته شده است بر حسب مختصات استوانه ای بیان شود شکل عمومی بردار شار گرما و همچنین قانون فوریه به صورت زیر در می آید

$$q'' = -k\nabla \mathrm{T} = -\mathrm{k}(\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}+j\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \emptyset}+\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}}) \qquad (۲۰-۱)$$

که در آن

$$q''_r = -k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}} \quad , \quad q''_\emptyset = -\frac{k}{r}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \emptyset} \quad , \quad q''_z = -k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}} \qquad (۲۱-۱)$$

مولفه های شار گرما را به ترتیب در جهتهای شعاعی، محیطی، محوری بیان می کنند. با استفاده از موازنه انرژی در حجم کنترل دیفرانسیلی شکل عمومی معادله گرما در مختصات استوانه ای بدست می آید

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \emptyset}\left(k\frac{\partial T}{\partial \emptyset}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q^{\cdot}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۲۲-۱)$$

شکل عمومی بردار شار گرما و قانون فوریه در مختصات کروی به قرار زیر است

$$q''=-k\nabla T=-k(i\frac{\partial T}{\partial r}+j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \emptyset}) \qquad (۲۳-۱)$$

که در آن

$$q''_r=-k\frac{\partial T}{\partial r} \quad , \quad q''_\theta=-\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad , \quad q''_\emptyset=-\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \emptyset} \qquad (۲۴-۱)$$

مولفه های شار گرما به ترتیب در جهتهای شعاعی، قطبی و سمت الرأس هستند با اعمال موازنه انرژی برای حجم کنترل دیفرانسیلی شکل عمومی معادله گرما در دستگاه مختصات کروی بدست می‌آید [۳].

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \emptyset}(k\frac{\partial T}{\partial \emptyset})+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(k sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta})+q^{\cdot}=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۲۵-۱)$$

۱-۳) انتقال حرارت هدایت غیرفوریه ای

همانطوری که پیشتر اشاره شد، قانون حرارتی فوریه چنین پیش بینی می کند که حرارت با سرعت نامحدود در قطعه انتشار می یابد. علیرغم پیش بینی غیر واقعی که این قانون از نقطه نظر فیزیکی دارد، تقریب بسیار خوبی برای بیشتر کاربردهای مهندسی ارائه می دهد. با این وجود با مشاهدات تجربی صورت گرفته، مثال های نقضی نیز مشاهده شده است که با تئوری کلاسیک قابل توجیه نمی باشد و تئوری کلاسیک از توجیه این گونه مسائل و رفتاری که انتشار حرارت از خود نشان می دهد، عاجز است. از جمله پدیده بررسی انتقال حرارت هدایتی در زمان های بسیار کوتاه، بررسی پدیده انتقال حرارت هدایتی در دماهای خیلی پائین (نزدیک صفر مطلق)، مانند بررسی انتقال حرارت در

NaF در حدود دمای ۱۰ درجه کلوین [۴] یا Bi در دمای ۳.۴ درجه کلوین [۵] و یا در مواقعی که انرژی به صورت پالس های متمرکز در قطعه آزاد می گردد[۶]. در این گونه موارد محدود در نظر گرفتن سرعت انتشار موج حرارتی ضروری می باشد؛که از نمونه‌های بارز و کاربردی در این شرایط می توان به استفاده از منابع گرمایی با فرکانس بالا مانند لیزر [۷] و میکرو ویو در ذوب سطحی فلزات[۷]، جراحی به کمک لیزر برای پیش بینی دمای بافت بدن[۸]، وسایل الکترونیکی مانند مدارهای مجتمع [۹]، مهندسی هسته ای [۱۰] و مهندسی بیو مکانیک[۱۱] اشاره کرد.

پشکوف [۱۲]، سرعت موج حرارتی هلیومII را در دمای ۱.۴ درجه کلوین، ۱۹ متر بر ثانیه اندازه گیری نمود. مائور و تامسون [۶]، از مشاهدات تجربی به این نتیجه رسیدند که وقتی شار حرارتی از مرتبه ۱۱ یا بالاتر باشد، مدل انتقال حرارت هدایت فوریه ای که به تئوری کلاسیک موسوم است رد می شود.

کاتانئو [۱۳] و ورنوت [۱۴]، به طور مستقل مدل شار حرارتی تعمیم یافته ای را به صورت زیر ارائه دادند:

$$q+\tau\ \frac{\partial q}{\partial t}=-k\nabla T \qquad (۲۶-۱)$$

به طوریکه q، بردار شار حرارتی و τ ، زمان آسایش می باشد که به صورت $\frac{\alpha}{c^2}$ تعریف گردیده است. τ ، نشان دهنده زمان آسودگی یا پریود رشد برای آغاز جریان حرارتی که حاصل از اعمال گرادیان حرارتی بر روی قطعه است، می باشد.

رابطه (۱-۲۶) بیان می دارد که جریان حرارتی به صورت آنی شروع نمی گردد، بلکه بتدریج با تأخیر زمانی در هر المان رشد پیدا می کند. به طور مشابه، جریان حرارتی به طور آنی متوقف نخواهد شد، بلکه به تدریج با استهلاک گرادیان حرارتی، خود به خود مستهلک می شود. هرگاه $\tau\to 0$ $(c\to\infty)$ میل نماید، نتیجه آن انتشار آنی جریان حرارتی با سرعت انتشار نامحدود می باشد که با تئوری انتشار کلاسیک مبنی بر قانون فوریه تطابق دارد. هنگامی که دما نزدیک صفر مطلق باشد و یا قطعه دارای ساختمان داخلی کاملاً منظم باشد، ارتعاشات حرارتی ظاهر شده به صورت امواج با سرعت محدود منتشر می شوند.

با ادغام معادله (۱-۲۶) با قانون بقاء انرژی، به معادله زیر می رسیم:

$$\nabla.(k\nabla T+\tau\frac{\partial q}{\partial t})+\dot{S}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۲۷)$$

اگر جسم همگن باشد و $\nabla k = 0$ می توان از رابطه (۱-۲۷) رابطه (۱-۲۸) را نتیجه گرفت و اگر $\nabla q = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\dot{S}$ باشد می توان از رابطه (۱-۲۸) به رابطه (۱-۲۹) رسید که با انجام محاسبات به ترتیب ارائه شده، به فرم کلی قانون هدایت حرارت غیرفوریه ای خواهیم رسید:

$$k\nabla^2 T+\tau\frac{\partial}{\partial t}(\nabla q)+\dot{S}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۲۸)$$

$$k\nabla^2 T+\tau\frac{\partial}{\partial t}(-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\dot{S})+\dot{S}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۲۹)$$

$$\frac{k}{\rho c}\nabla^2 T+\frac{\tau}{\rho c}\frac{\partial}{\partial t}(-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\dot{S})+\frac{\dot{S}}{\rho c}=\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۳۰)$$

$$\frac{k}{\rho c}\nabla^2 T-\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\tau}{\rho c}\frac{\partial \dot{S}}{\partial t}+\frac{\dot{S}}{\rho c}=\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۳۱)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\alpha\nabla^2 T+\frac{\dot{S}}{\rho c}+\frac{\tau}{\rho c}\frac{\partial \dot{S}}{\partial t} \qquad (۱-۳۲)$$

معادله (۱-۳۲) کلی ترین فرم معادله هدایت حرارت غیرفوریه ای می باشد و با در نظر گرفتن این نکته که در اکثر مواقع جسم مورد نظر بدون منبع انرژی است، معادله (۱-۳۲) به معادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\alpha\nabla^2 T \qquad (۱-۳۳)$$

در چندین دهه گذشته، استفاده از این مدل در عرصه‌های مختلف مهندسی روز افزون شده است. همگانی شدن این مدل انتقال حرارت مدیون سادگی آن و در عین سادگی، کارایی آن می باشد[۱۵]. جهت برآورد تناسب هر یک از مدل های پارا بولیک (فوریه ای) و هیپربولیک (غیرفوریه ای) برای یک مسئله، لازم است که مرتبه ترم های سمت راست معادله (۱-۳۳) با هم مقایسه شوند[۶]. برای اینکه در یک مسئله مدل هیپربولیک مناسب باشد، باید[۶]:

$$\frac{\tau}{\alpha}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}>>\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۱-۳۴)$$

۱-۴) تاریخچه حل معادله انتقال حرارت غیرفوریه ای

از بدو پیدایش این تئوری، راه حل‌های بیشمار تحلیلی و عددی برای حالات مختلف ارائه شده است، که عمدتاً معطوف به حالت یک بعدی و دو بعدی به روش عددی می باشند. تعدادی از مقالات نیز معادلات این مدل را در حالت یک بعدی با استفاده از روش های تحلیلی بررسی کرده اند و تعداد بسیار معدودی از نوشته ها، به بررسی این معادلات در حالت سه بعدی پرداخته اند. معادلات انتقال حرارت غیرفوریه ای به علت انعکاس موج حرارتی و برهم کنش امواج، بدرفتار[3] بوده و حل عددی آن ها پیچیده می باشد[۱۷].

فرانکل و همکاران [۱۸] هدایت حرارت هیپربولیک را در یک صفحه محدود، تحت شار حرارتی دلخواه زمانی و تولید انرژی داخلی مورد مطالعه قرار داده و توزیع دما را برای شرایط مرزی پالس گرمایی مستطیلی بدست آورده اند. بارلتا و زانچینی [۱۹] و همچنین تانگ و اراکی [۷]، توزیع دما در یک صفحه با شرایط مرزی پالس گرمایی کاهنده نمایی را محاسبه کردند. بارلتا و زانچینی فرض کردند که پالس گرمایی مستقیماً بر سطح مرزی صفحه اعمال شده، اما تانگ و اراکی فرض نمودند صفحه تحت تشعشع لیزر قرار گرفته و انرژی پالس لیزر در ضخامت خیلی کوچکی از سطح مرزی جذب می شود که این اثر به صورت یک منبع تولید انرژی داخلی مدل شده است. تانگ و اراکی [۲۰]، همچنین عبدالحمید[۲۱] به ترتیب با استفاده از روش های تبدیل لاپلاس و تبدیل انتگرالی، هدایت حرارت غیر فوریه ای را در صفحه ای که یک مرز آن عایق بوده و مرز دیگرش تحت شار حرارتی پریودیک قرار گرفته، مطالعه کرده اند.

میخائیلوف و کوتا [۲۲] با استفاده از حل ارائه شده توسط تانگ و اراکی یک برنامه کامپیوتری ارائه کرده اند که توزیع دما را در حالت پایدار بدست می آورد. لین [۲۳]، اثرات هدایت غیر فوریه ای را در عملکرد فین مستطیلی که پایه آن تغییرات دمای کسینوسی دارد و انتهای آن عایق است، به صورت عددی مورد مطالعه قرار داده و نتایج بدست آمده را با نتایج حاصل از تئوری هدایت حرارت فوریه-ای مقایسه کرده است. تان و یانگ[۲۴] انتشار موج دما را در یک فیلم نازک که بر سطح آن پالس دمایی کاهنده نمایی اعمال شده، بررسی کردند. وو و چو[۲۵] توزیع دما را در یک صفحه مستطیلی

[3] ill-posed

با تولید انرژی داخلی که سطوح مرزی آن عایق بوده و یا در دمای ثابت قرار دارند، بدست آوردند. بارلتا و زانچینی [۲۶] نیز حل معادله سه بعدی هدایت حرارت هیپربولیک را در مختصات کارتزین و با شرایط مرزی شار حرارتی دلخواه زمانی، ارائه کرده اند. یانگ[۲۷] از یک روش ترتیبی[۴] برای حل معادلات غیرفوریه ای در حالت دو بعدی استفاده کرده است. ونگ[۲۸]، ساختار حل معادله هدایت حرارتی هیپربولیک را با استفاده از روش تفکیک متغیرها ارائه داد. چای و همکاران [۲۹]، فرم غیر خطی معادله هدایت حرارت غیرفوریه ای را با دو روش به صورت تحلیلی البته بدون یافتن ضرایب ثابت بدست آوردند. لواندوسکا و مالینوسکی[۱۵] این معادله را برای یک لایه نازک که از هر دو طرف گرم می شود، حل کردند. موسایی معادله هیپربولیک انتقال حرارت را برای محیط متناهی با یک منبع حرارتی دلخواه [۳۰] و شرایط اولیه دلخواه [۳۱] حل نمود. صالح و نیمر[۱۷] با استفاده از تبدیلات لاپلاس و بسته نرم افزاری متلپ[5] و سری تیلور، به حل معادله انتقال حرارت غیر فوریه ای در یک بعد همت گماردند.

در مقایسه با مقالات موجود در زمینه هدایت حرارت غیر فوریه ای در مختصات کارتزین، مطالعات کمتری در مختصات استوانه ای و کروی انجام گرفته که در ادامه به آن ها اشاره می شود. بارلتا و زانچینی [۳۲] توزیع دما و پدیده رزونانس را در استوانه توپر که حامل جریان برق متناوب است، مطالعه کرده اند. همچنین ایشان هدایت حرارت هیپروبولیک را در استوانه ای توپر که دمای سطح آن به صورت تابع پله واحد و یا تابع زمانی یکنواخت تغییر می کند[۳۳]، بررسی کرده اند. زانچینی و پلویرنتی [۳۴]، میدان دمای پایدار در یک استوانه توخالی که تحت شرایط مرزی پریودیک نوع اول و یا نوع دوم قرار گرفته را محاسبه کرده اند. در همان سال زانچینی و پلویرنتی [۳۵] حل تحلیلی معادله هدایت حرارت هیپربولیک را در استوانه ای توپر که بر سطح آن شار حرارتی پله واحد و یا پالس گرمایی کاهنده نمایی اعمال شده است، ارائه کرده اند. سعدالدین و ترابی [۳۹-۳۶] توزیع دمای ناشی از شار حرارتی ثابت با زمان را، به صورت تحلیلی برای یک استوانه با استفاده از شرط مرزی انتقال حرارت جابجایی بدست آورده اند. چو و همکاران [۱۶] تاثیر اشعه لیزر را بر روی بافت بدن با استفاده از مدل غیرفوریه ای در مختصات استوانه ای بررسی نمودند.

---

4 Sequential
5 MATLAP

۱-۵) روش های حل

یک روش کلاسیک برای حل مسائل انتقال حرارت از طریق هدایت، روش جداسازی متغیرها می‌باشد. این روش به عنوان یک راه موثر و ساده مورد استفاده قرار می گیرد. در این روش ابتدا متغیرها را از یکدیگر جدا کرده و میدان دما را با فرض شرایط مرزی ثابت و غیر وابسته به زمان محاسبه می کنیم. سپس برای وارد کردن شرایط مرزی متغیر با زمان (در صورت وجود) از قضیه دوهامل استفاده کرده و توزیع دما در حالت شرایط مرزی متغیر با زمان را بدست می آوریم. با این حال در بسیاری از موارد جداسازی متغیرها ممکن نمی باشد، که در این صورت به استفاده از دو روش تبدیلات انتگرالی و به ویژه روش تبدیل لاپلاس روی می آوریم.

روش تبدیل لاپلاس برای حذف مشتقات جزئی نسبت به زمان در شرایط مرزی و معادله دیفرانسیل استفاده می شود. در حقیقت این روش، روش بسیار خوبی برای حل مسائل یک بعدی است. هنگامی که مسائل دو یا سه بعدی غیر یکنواخت با تبدیلات لاپلاس حل شوند، مسئله ساده شده، مجدداً دارای مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای فضایی است.

در روش تبدیلات انتگرالی حذف مشتقات جزئی نسبت به مکان صورت می گیرد. به علت اینکه در ابتدای مسئله معادله ای برای محاسبه تبدیل معکوس ارائه می شود، در این روش مشکلات مربوط به معکوس گیری به شدتی که در روش تبدیل لاپلاس وجود دارد، کمتر است.

روش دیگری که می توان برای حل معادلات انتقال حرارت هدایت غیرفوریه ای بکار گرفت، استفاده از روش اغتشاشات می باشد. این روش در مواردی کاربرد دارد که معادلات بدست آمده برای انتقال حرارت در جسم غیر خطی باشند. در این روش می بایست یک پارامتر اغتشاش که معمولاً آنرا با ε نمایش می دهیم در نظر گرفته شود. در این صورت می توان جواب معادله (۱-۲۰) را بصورت زیر نوشت:

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \varepsilon^4 T_4 + ... \qquad (۳۵-۱)$$

که در معادله بالا T_0 جواب مرتبه صفر، T_1 جواب مرتبه یک، T_2 جواب مرتبه دو، و به همین ترتیب T_n جواب مرتبه nام می باشد[۱].

۱-۶) کاربرد عملی

روش (EDM) : Electrical discharje mechaning یا (EDM) یک روش مخصوص در ماشینکاری است که برای ساخت قطعه و قالب با استفاده از انرژی حرارتی متمرکز مورد استفاده قرار می گیرد در این روش از هر فلز سخت و محکم به واسطه اعمال حرارت متمرکز که عبارت از اعمال حرارت زیاد در یک سطح مقطع کوچک می باشد استفاده می شود. در روش EDM اعمال حرارت زیاد باعث افزایش دما به صورت موضعی در قطعه و ذوب و تبخیر شدن فلز سخت در آن موضع می‌شود. تحلیل انتقال حرارت در داخل فلز تحت ماشین کاری EDM از روش انتقال حرارت غیرفوریه ای نتیجه نزدیک به واقعیتی را نسبت به روش انتقال حرارت فوریه ای ارائه می نماید. سعدالدین و ترابی [۳۷] انتقال حرارت هدایت غیرفوریه ای در روش EDM را به روش تحلیلی مورد بررسی قرار داده اند.

۱-۷) هدف کلی

هدف کلی از این پایان نامه بدست آوردن تابع توزیع دما در مختصات سه بعدی x و y و z و بر حسب دما می باشد. بدین منظور از روش تحلیلی بر مبنای تبدیلات انتگرالی استفاده می شود.