بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

آنتروپی متری و توپولوژیکی فرآیندهای تصادفی

مولف:

ساناز حجار پاکزاد

استاد راهنما:

دکترمحمدعلی ولی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا مولایی

تیرماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: ساناز حجار پاکزاد	امضاء:
استاد راهنما: دکترمحمدعلی ولی	امضاء:
استاد مشاور: دکتر محمدرضا مولایی	امضاء:
داور اول : دکتر محمد ابراهیمی	امضاء:
داوردوم: دکتر طیبه واعظی‌زاده	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر غلامرضا آقاملایی	امضاء:

تقدیم به

تقدیم به تو مادرم:

که معنی عشق در تمامی واژه‌های دنیایی.

تقدیم به تو پدرم:

که معنی بودن، خواستن و توانستن در سایه سار زمانی.

و تقدیم به تمامی عزیزان و دوستانی که تا به امروز، به بهار زندگی ام وسعت بخشیدند ودر قلبم جاودانه اند.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که هرگاه از او چیزی بخواهیم، عطا می کند و آنگاه که امیدی به او داشته ایم به امیدمان می رساند.

سپاس از بودن ها، همراهی وهمدلی هایی که تشویق وترغیبشان این اعتماد را در ما به وجود آورد که می توانیم بنویسیم، پس به یادشان می نویسیم.

از پدر و مادر مهربانم که همواره با مهربانی‌هایشان به من امید می‌دهند، از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر ولی که با راهنمایی‌های دلسوزانه مرا با دنیایی فراتر از ریاضیات معرفی کردند، از استاد گران‌قدرم جناب آقای دکتر مولایی که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر ابراهیمی و سرکار خانم واعظی زاده که زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول فرمودند تشکر می‌کنم.

مقدمه

آنتروپی از دو واژه‌ی $endone$ به معنی درون و $tropien$ به معنی تغییر گرفته شده است و اولین بار توسط کلاوزیوس [۱] فیزک دان آلمانی مطرح شد که به عنوان مفهومی برای انرژی‌ها، مخصوصا برای انرژی‌هایی که به گرمای بی فایده تبدیل می‌شوند به کار رفت، آنچه که امروزه قانون دوم ترمودینامیک می‌نامیم. بولتمن [۲] فیزیک دان استرالیایی و گیبس [۳] دانشمند امریکایی آنتروپی را وارد مکانیک‌های آماری کردند. شانون [۴] آنتروپی را در نظریه اطلاعات مطرح کرد و به عنوان اندازه اطلاعات در نظر گرفت. اولین بار کلموگراف [۵] آنتروپی را وارد سیستم‌های دینامیکی کرد و این نظریه توسط سینایی [۶] کامل شد که امروزه آن‌را به عنوان آنتروپی کلموگراف-سینایی می‌شناسیم.

آنتروپی را معمولا با معانی چون آشوب، بی‌نظمی و عدم قطعیت در نظر می‌گیرند. به طور کلی آنتروپی را میانگین عدم قطعیت مربوط به فرآیند یا سیستم تصادفی در واحد زمان در نظر می‌گیرند و در علوم مختلف از جمله فیزیک،شیمی و نظریه اطلاعات و... کاربرد

[۱] Clausius

[۲] Boltmann

[۳] Gibbs

[۴] Shannon

[۵] Kolmogorov

[۶] Sinai

دارد.

مثلا در نظریه اطلاعات، آنتروپی را به عنوان اندازه اطلاعات متغیر تصادفی است که انتظار می‌رود داشته باشد، در نظر می‌گیرند. هر چه شانس مشاهده‌ی رویداد تصادفی کمتر باشد ما اطلاعات بیشتری را از روی دادن آن به دست می‌آوریم و هر چه احتمال وقوع یک رویداد بیشتر باشد، ما اطلاعات کمتری را از وقوع آن کسب می‌کنیم زیرا از روی دادن آن تعجب نمی کنیم.

در این پایان نامه هدف ما بررسی آنتروپی متری وتولوژیکی فرآیندهای تصادفی و همچنین آنتروپی جایگشتی متری و توپولوژیکی فرآیندهای تصادفی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر است.به این منظور این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است که در فصل اول به بیان مفهوم آنتروپی می‌پردازیم، در فصل دوم تعاریف و قضایای مقدماتی که مورد نیاز فصل‌های بعدی می‌باشند، بیان می‌کنیم. همچنین در فصل سوم آنتروپی متری و توپولوژیکی فرآیندهای تصادفی را بیان نموده و به مقایسه‌ی آن‌ها با هم می‌پردازیم و در فصل چهارم آنتروپی جایگشتی متری و توپولوژیکی فرآیندهای تصادفی را بیان نموده و به بررسی ارتباط آن‌ها با هم و با آنتروپی متری و توپولوژیکی می‌پردازیم.

چکیده

ما در این پایان نامه ابتدا فرآیند تصادفی را معرفی می‌کنیم، سپس به بیان آنتروپی متری و توپولوژیکی فرآیندهای تصادفی حالت متناهی می‌پردازیم. به علاوه اگر فضای حالت مجموعه‌ای مرتب باشد، آن‌گاه آنتروپی متری و توپولوژیکی جایگشتی را بیان نموده و به مقایسه‌ی آن‌ها با هم می‌پردازیم.در واقع آنتروپی به عنوان میانگین عدم قطعیت مربوط به متغیر تصادفی یا آزمایش تصادفی تفسیر می‌شود. در انتها ثابت می‌کنیم که آنتروپی متری و متری جایگشتی یک منبع ارگودیک با هم مساویند.

کلمات کلیدی: فرآیندتصادفی، آنتروپی متری، آنتروپی توپولوژیکی.

فهرست مطالب

فصل ۱

اندیشه های پایا

۱.۱ سیستم های دینامیکی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی و $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ فرض کنید $f^t : \Omega \longrightarrow \Omega$ یک تابع باشد. زوج مرتب $(\Omega, \{f^t : t \in \mathbb{R}\})$ را یک سیستم دینامیکی با زمان پیوسته گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) اگر $t = \circ$، آنگاه f° همانی باشد،

۲) اگر $t, s \in \mathbb{R}$، آنگاه $f^s \circ f^t = f^{s+t}$.

در تعریف ۱.۱.۱، اگر به جای مجموعه $\mathbb{R}$ مجموعه $\mathbb{Z}$ را قرار دهیم، آنگاه یک سیستم دینامیکی با زمان گسسته داریم.

ما در این نوشتار دو نوع از سیستم های دینامیکی زمان گسسته را در نظر می‌گیریم:
۱.سیستم های دینامیکی پیوسته ۲.سیستم های دینامیکی حافظ اندازه .

تعریف ۲.۱.۱. یک سیستم دینامیکی پیوسته، دوتایی (M, f) است که M یک فضای توپولوژیکی و $f : M \to M$ یک نگاشت پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای اندازه $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ که Ω یک مجموعه متناهی، $\mathfrak{B}$ یک σ -جبرو $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک اندازه ی مثبت روی فضای اندازه پذیر $(\Omega, \mathfrak{B})$ است را یک فضای اندازه- متناهی نامند، هرگاه $\mu(\Omega) < \infty$.

اگر یک فضای اندازه- متناهی داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت $\mu(\Omega)$ را یک در نظر بگیریم یعنی $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ را یک فضای احتمال در نظر بگیریم. با این مفهوم ما می توانیم Ω را فضای تمام رویدادهای مقدماتی و $\mathfrak{B}$ را تمام خروجی هایی که ممکن است داشته باشیم و$\mu(B)$ را احتمال خروجی $B \in \mathfrak{B}$ در نظرگیریم. در سه تعریف زیر فضای $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ یک فضای احتمال در نظر گرفته شده است.

تعریف ۴.۱.۱. نگاشت اندازه پذیر $f : \Omega \to \Omega$ را حافظ اندازه μ و یا اصطلاحا اندازه‌ی μ را f-پایا می‌نامند، هرگاه برای هر $B \in \mathfrak{B}$، $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$.

تعریف ۵.۱.۱. اگر $f : \Omega \to \Omega$ یک نگاشت حافظ اندازه μ باشد، آنگاه $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, f)$ را یک سیستم دینامیکی حافظ اندازه می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, f)$ یک سیستم دینامیکی حافظ اندازه باشد، دراین‌صورت f ارگودیک است هرگاه

$$f^{-1}(B) = B, \quad B \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \mu(B) = 0 \quad or \quad \mu(B) = 1$$

همچنین سیستم دینامیکی $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, f)$ را ارگودیک می‌نامند.

۲.۱ آنتروپی آزمایش

یکی از خواص مهم فرایندهای تصادفی، عدم اطمینان از رخ دادن آنهاست که باعث ایجاد عدم قطعیت درباره‌ی روی داد تصادفی می‌شود که از آن به طور معمول با عنوان ریسک کردن یاد می‌کنیم. گرچه میزان عدم قطعیت برای حالتهای مختلف متفاوت است. به عنوان مثال اگر هوا ابری باشد و به احتمال $\frac{1}{2}$ باران بیاید، در این صورت اگر از ما سوال کنند امروز باران می آید یا نه با ریسک بسیار بالایی (عدم قطعیت بیشتر) باید بگوییم که باران می‌آید یا نه. ولی اگر آزمایش ما شامل مشخص کردن رنگ اولین کلاغی باشد که امروز می بینیم می توانیم تقریبا با اطمینان کامل با ریسک خیلی کم (عدم قطعیت بسیار کم) بگوییم کلاغ سیاه است هرچند ثابت شده کلاغ سفید هم وجود دارد.

در عین حال آزمایش هایی وجود دارند که از عدم قطعیت بالایی برخوردارند، مثلا انتخاب باهوش ترین فرد از میان یک جمع ۵۰۰ نفره که هیچ شناختی نسبت به آنها نداریم.

در یک آزمایش، پیشامد A را در نظر بگیرید از رخ دادن این پیشامد چه قدر تعجب می‌کنیم؟منطقی است که هر چه احتمال وقوع A کمتر باشد میزان تعجب ما، از رخ دادن این

پیشامد بیشتر می‌شود. به عنوان مثال پرتاب دو تاس را در نظر بگیرید هر گاه مطلع شویم که مجموع دو تاس ۷ باشد زیاد تعجب نمی‌کنیم، اما اگر پیشامد آمدن جفت ۶ باشد، تعجب ما بیشتر خواهد بود.

سعی می‌کنیم میزان تعجب از رخ دادن پیشامد A را با P کمی کنیم. این ویژگی که تنها به احتمال پیشامد A یعنی P بستگی دارد را با $H(P)$ نمایش داده می‌شود. میزان تعجب برای پیشامد با احتمال صفر تعریف نشده است.اصول موضوعه زیر برای تابع $H(P)$ که ($0 \leq P \leq 1$) برقرار است:

(۱) بدیهی است هیچ تعجبی از رخ دادن یک پیشامد با احتمال ($P = 1$) پیش نخواهد آمد، پس $H(1) = 0$.

(۲) از دو پیشامد A و B با احتمال‌های P_1 و P_2 که $P_1 \leq P_2$، رخ دادن پیشامد A با احتمال کمتر از پیشامد B، تعجب بیشتری در بر خواهد داشت، پس

$$P_1 \leq P_2 \Longrightarrow H(P_1) \geq H(P_2).$$

(۳) با افزایش یا کاهش جزیی در احتمال پیشامد مفروض A، کاهش یا افزایش در میزان تعجب ما از رخ دادن این پیشامد حاصل خواهد شد. به عبارت دیگر $H(P)$ تابعی پیوسته بر حسب P است.

(۴) دو پیشامد A و B با احتمال‌های P_1 و P_2 را در نظر بگیرید، اگر A و B مستقل باشند، آنگاه میزان تعجب از رخ دادن این پیشامد عبارت است از $H(P_1 P_2)$ که

$$H(P_1 P_2) = H(P_1) + H(P_2).$$

قضیه ۱.۲.۱. *اگر تابع $H(P)$ در اصول ۴ گانه‌ی فوق صدق کند، آنگاه $H(P) = c \log P$ که $c \in (0, \infty)$.*

برهان. داریم:

$$H(P^{۲}) = H(P.P) = ۲H(P) \Longrightarrow H(P^n) = nH(P) \quad n \in \mathbb{N}$$

با همین روند داریم:

$$H(P) = H(((P)^{\frac{۱}{n}})^n) = nH(P^{\frac{۱}{n}}) \Longrightarrow H(P^{\frac{۱}{n}}) = \frac{۱}{n}H(P) \quad n \neq ۰$$

پس برای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم: $H(P^x) = xH(P)$، حال از پیوسته بودن H نتیجه می‌شود که

$$H(P^x) = xH(P) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

حال قرار می‌دهیم

$$x = -\log P \quad \Longrightarrow \quad p = ۲^{-x}$$

$$H(p) = H(۲^{-x}) = H((۲^{-۱})^x) = xH(۲^{-۱}) = -c\log P$$

که $c = H(۲^{-۱})$

$\square$

فصل ۲

بررسی مباحثی از آنتروپی

در این فصل از مراجع [۶، ۵] استفاده شده است.

۱.۲ برخی تعاریف و قضایای مقدماتی برای آنتروپی افراز

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ یک فضای احتمال باشند، مجموعه‌ی

$$\xi = \{A_1, ..., A_n\} \subset \mathfrak{B}$$

تشکیل افراز متناهی برای Ω می‌دهد، اگر $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ و

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j.$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ یک فضای احتمال باشد. فرض کنید $\xi = \{A_1, .., A_n\}$ یک افراز متناهی برای Ω از اعضای $\mathfrak{B}$ باشند. در این صورت $\mathcal{A}[\xi]$ را به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\mathcal{A}[\xi] = \{\xi \text{ جبر متناهی تولید شده توسط اعضای } \sigma\} = \{\bigcup_{i=0}^{k} A_i : 0 \leq k \leq n\}.$$

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ یک فضای احتمال و $\psi \subseteq \mathfrak{B}$ یک زیر σ جبر باشد. دراین‌صورت $\xi(\psi)$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\xi(\psi) = \{A \in \psi \mid A \neq \emptyset, \nexists B \neq \emptyset;\ B \in \psi,\ B \subsetneq A\}$$

که تشکیل یک افراز برای Ω می‌دهد.

قضیه ۴.۱.۲. *فرض کنید $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ یک فضای احتمال باشد. در این صورت اگر $\psi \subseteq \mathfrak{B}$ یک زیر σ جبر متناهی باشد، آنگاه*

$$\mathcal{A}[\xi(\psi)] = \psi.$$

برهان. فرض کنید ψ یک زیر σ جبر باشد. چون $\xi(\psi) \subseteq \psi$ پس داریم:

$$\mathcal{A}[\xi(\psi)] \subseteq \mathcal{A}(\psi) = \psi$$

که تساوی آخر به این دلیل است که ψ خود یک σ جبر است.

برعکس: فرض کنید $\psi_i \in \psi$ دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) اگر وجود نداشته باشد $\psi_j \in \psi$ بطوریکه $\psi_i \supsetneqq \psi_j$؛ طبق تعریف $\psi_i \in \xi(\psi)$.

ب) فرض کنید وجود داشته باشد $\psi_j \in \psi$ بطوریکه $\psi_i \supsetneqq \psi_j$، دو حالت رخ می‌دهد.
حالت اول:

$$\psi_j \in \xi(\psi) \Longrightarrow \psi_j \in \mathcal{A}[\xi(\psi)].$$

حالت دوم: اگر $\psi_j \notin \xi(\psi)$ آنگاه وجود دارد $\psi_{j_2} \in \psi$ بطوریکه

$$\psi_{j_2} \subseteq \psi_j \subseteq \psi_i$$

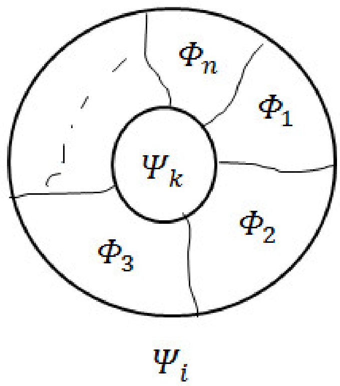
حال اگر $\psi_{j_2} \in \xi(\psi)$ که مسئله حل است. در غیر این صورت وجود دارد ψ_{j_3} بطوریکه

$$\psi_{j_3} \subseteq \psi_{j_2}$$

و چون ψ متناهی است این روند جایی متوقف می‌گردد. بنابراین وجود دارد k بطوریکه $\psi_k \in \xi(\psi)$ در این صورت ψ_i را می‌توان به صورت زیر در نظر بگیریم که $\varphi_i \in \xi(\psi)$، لذا داریم: (شکل ۱.۲)

$$\psi_i = (\bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i) \cup \psi_k \in \mathcal{A}\,\xi(\psi). \tag{۱.۲}$$

□



شکل ۱.۲: شکل برای ψ_i در رابطه (۱.۲)

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید ξ و η دو افراز متناهی از $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ باشند.دراین‌صورت $\xi \preccurlyeq \eta$ (η ظریف‌تر از ξ) اگر هر عضو ξ به صورت اجتماعی متناهی از اعضای η باشد.

به عبارتی برای هر $C \in \xi$ وجود داشته باشد $O_۱, O_۲, ..., O_m \in \eta$ بطوریکه $C = \bigcup_{i=۱}^{m} O_i$.

قضیه ۶.۱.۲. *اگر ξ و η دو افراز متناهی از $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ باشند، آنگاه*

$$\mathcal{A}(\xi) \subseteq \mathcal{A}(\eta) \Longleftrightarrow \xi \preccurlyeq \eta.$$

برهان. به وضوح برقرار است. □

قضیه ۷.۱.۲. *اگر A و φ دو زیرجبر متناهی باشند، آنگاه*

$$A \subseteq \varphi \Longleftrightarrow \xi(A) \preccurlyeq \xi(\varphi).$$

برهان. اگر $\xi(A) \preccurlyeq \xi(\varphi)$، آنگاه طبق قضیه ۶.۱.۲:

$$\mathcal{A}(\xi(A)) \subseteq \mathcal{A}[\xi(\varphi)],$$

درنتیجه با استفاده از قضیه ۴.۱.۲ داریم $A \subseteq \varphi$.

برعکس: فرض کنید $A \subseteq \varphi$ و $\psi \in \xi(A)$ نشان می‌دهیم که وجود دارد $D_n...D_۱$ در $\xi(\varphi)$ بطوریکه $\psi = \bigcup_{i=۱}^{n} D_i$.

چون $\psi \in \xi(A)$ پس $\psi \in A$ و $\varphi \subseteq A$ پس $\psi \in \varphi$ بنابراین

$$\psi \in \mathcal{A}(\xi(\varphi)).$$

لذا وجود دارد $D_۱$، ...، D_n در $\xi(\varphi)$ بطوریکه $\psi = \bigcup_{i=۱}^{n} D_i$. پس

$$\xi(A) \preccurlyeq \xi(\varphi).$$

$\square$

تعریف ۸.۱.۲. فرض کنید $\xi = \{A_۱, ..., A_n\}$ و $\eta = \{C_۱, ..., C_k\}$ دو افراز متناهی از Ω باشند. دراین‌صورت $\xi \vee \eta$ به صورت زیر است:

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap C_j\,;\, ۱ \leqslant i \leqslant n,\ ۱ \leqslant j \leqslant k\}$$

که تظریف مشترک دو افراز نامیده می‌شودو اگر A و φ دو زیرجبر متناهی از $\mathfrak{B}$ باشند، آنگاه $A \vee \varphi$ را کوچکترین زیر σ جبر از $\mathfrak{B}$ گویند که شامل A و φ است.

قضیه ۹.۱.۲. *اگر A و φ دوزیر σ جبر متناهی و ξ و η دو افراز متناهی باشند، آنگاه*

الف) $\xi(A \vee \varphi) = \xi(A) \vee \xi(\varphi)$،

ب) $\mathcal{A}(\xi \vee \eta) = \mathcal{A}(\xi) \vee \mathcal{A}(\eta)$.

برهان. الف) می‌دانیم که

$$\xi(A \vee \varphi) = \{D_j \in T \,|\, C_i \nsubseteq D_j, \forall C_i \in T\}$$

که در آن $T := \{A_i \cap \varphi_j \,|\, A_i \in A,\, \varphi_i \in \varphi\}$.

حال فرض کنید $A_i \in \xi(A)$ و $C_j \in \xi(\varphi)$ نشان می‌دهیم که

$$A_i \cap C_j \in \xi(A \vee \varphi).$$

برهان خلف: فرض کنید وجود داشته باشد $A'_i \in A$ و $C'_j \in \varphi$ بطوریکه