دانشکده ریاضی
گروه محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض-گرایش جبر

عنوان

$p-$گروه‌های توانمند و کران‌هایی برای ضربگر $c-$پوچ‌توان آن‌ها

استاد راهنما
دکتر بهروز مشایخی فرد

نگارنده
آسیه دلاور

زمستان ۱۳۹۲

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی

عنوان: p–گروه‌های توانمند و کران‌هایی برای ضربگر c–پوچ‌توان آن‌ها

نام نویسنده: آسیه دلاور

استاد راهنما: دکتر بهروز مشایخی فرد

دانشکده: ریاضی گروه: محض	رشته تحصیلی: ریاضی محض–گرایش جبر
تاریخ تصویب: ۹۱/۹/۱	تاریخ دفاع: ۹۲/۱۱/۵
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۱۱۵

چکیده : در این پایان‌نامه، p–گروه‌های توانمند را مطالعه می‌کنیم. هم‌چنین نامساوی‌هایی را برای مرتبه، نما و تعداد مولدهای ضربگر c–پوچ‌توان (پایای بئر نسبت به چندگونای گروه‌های پوچ‌توان از رده حداکثر $c \geqslant 1$) p–گروه‌های توانمند، مورد بررسی قرار می‌دهیم، که در واقع تعمیمی از نتایج لوبوتسکی و مان [۱۲] به ضربگر c–پوچ‌توان می‌باشد. سپس با ارائه‌ی چند مثال، دقت نتایج و بهبود بعضی از نامساوی‌های قبل نشان داده می‌شود.

واژگان کلیدی: جابه‌جاگر پایه‌ای، پایای بئر، چندگونا، ضربگر c–پوچ‌توان، p–گروه منظم، p–گروه توانمند، زیرگروه نشانده شده‌ی توانمند

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : p−گروه‌های توانمند و کران‌هایی برای ضربگر c−پوچ‌توان آن‌ها

اینجانب آسیه دلاور دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی دانشگاه فردوسی نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر بهروز مشایخی فرد متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی " و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

مفهوم ضربگر شور اولین بار در سال ۱۹۰۴ توسط شور [1] مطرح شد. که با به‌دست آمدن ویژگی‌های جالبی از این مفهوم، اهمیت آن در نظریه‌ی گروه‌ها روشن گردید.

بئر[2] در سال ۱۹۴۵، مفهوم پایای بئر یک گروه را معرفی کرد، که تعمیمی از ضربگر شور است. با ورود این مفهوم، ضربگر پوچ‌توان (پایای بئر نسبت به چندگونای گروه‌های پوچ‌توان) مورد توجه بسیاری قرارگرفت.

در سال ۱۹۸۷ [۱۲] لوبوتسکی[3] و مان[4]، نامساوی‌هایی برای ضربگر شور یک p−گروه توانمند معرفی کردند. آن‌ها کران‌هایی برای مرتبه، نما و تعداد مولدهای ضربگر شور یک p−گروه توانمند d−مولدی به صورت زیر ارائه دادند:

$$d(M(G)) \leqslant \binom{d}{۲},$$
$$exp(M(G)) \leqslant exp(G),$$
$$|M(G)| \leqslant p^{\binom{d}{۲}e}; \quad exp(G) = p^e.$$

در سال ۱۹۹۷ [۱۶] مشایخی و مقدم، فرمولی صریح برای ضربگر c−پوچ‌توان یک گروه آبلی متناهی بیان کردند.

[1] I. Schur [2] R. Baer [3] A. Lubotzky [4] A. Mann

در سال ۲۰۰۳ [۱۷] کیوانفر، مشایخی و مقدم، ساختمان ضربگر $c-$پوچ‌توان رده‌ی مشخصی از گروه‌ها را تحت برخی شرایط به‌دست آوردند.

در سال ۲۰۰۷ [۱۳] مشایخی و محمدزاده، بعضی از نتایج لوبوتسکی و مان را به ضربگر پوچ‌توان تعمیم دادند و کران‌های بالایی برای مرتبه، نما و تعداد مولدهای ضربگر $c-$پوچ‌توان یک $p-$گروه توانمند $d-$مولدی به صورت زیر ارائه کردند:

$$d(M^{(c)}(G)) \leqslant \chi_{c+1}(d),$$
$$exp(M^{(c)}(G)) \mid exp(G),$$
$$|M^{(c)}(G)| \leqslant p^{\chi_{c+1}(d)e}; \quad exp(G) = p^e.$$

این پایان‌نامه از چهارفصل تشکیل شده است:

فصل اول پیش‌نیازهاست که شامل چهار بخش است. در این فصل، برخی مفاهیم مقدماتی را مرور خواهیم کرد. هدف ما فراهم آوردن اصطلاحات، نمادها و مقدماتی است که در فصل‌های بعد مورد نیاز است. در بخش اول مفاهیم جابه‌جاگر، سری مرکزی بالایی، سری مرکزی پایینی، سری مشتق و گروه پوچ‌توان را به همراه برخی از خواص مهم آن‌ها مرور می‌کنیم. در بخش دوم نمایش آزاد گروه‌ها و گروه آبلی آزاد را تعریف کرده و چند قضیه اساسی و مهم در باب گروه‌های آبلی با تولید متناهی بیان می‌کنیم. در بخش سوم مفهوم بسیار مهم جابه‌جاگر پایه‌ای را مطالعه کرده، سپس به کمک آن نتایجی جالب و اساسی در شناخت گروه‌ها به‌دست می‌آوریم. در بخش چهارم ابتدا دو مفهوم زیرگروه‌های لفظی و حاشیه‌ای را ارائه می‌دهیم که اولین بار در سال ۱۹۴۰، توسط هال[۱] معرفی شده‌اند. بعد از آن مفهوم چندگونا و پایای بئر و در ادامه شکل ساده‌تری را برای پایای بئر یک گروه نسبت به چندگونای گروه‌های آبلی و پوچ‌توان بیان خواهیم کرد که به ترتیب ضربگر شور و ضربگر پوچ‌توان نامیده می‌شوند.

[۱] M. Hall

فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول با توجه به اهمیت p–گروه‌ها به خصوص p–گروه‌های متناهی در نظریه گروه‌ها، به بررسی خواص مهمی از آن‌ها می‌پردازیم و در ادامه p–گروه‌های منظم را که دسته‌ی مهمی از p–گروه‌های متناهی هستند، معرفی می‌کنیم. هدف از بخش دوم؛ مطالعه و بررسی رده‌ی خاصی از p–گروههای متناهی، به نام p–گروه‌های توانمند است. این مفهوم برای اولین بار توسط مان و لوبوتسکی در سال ۱۹۸۷ ارائه گردید. آن‌ها در مقاله‌ی خود به بررسی و بیان خواص این p–گروه‌ها پرداختند و نشان دادند بسیاری از زیرگروه‌های آن‌ها نیز توانمند هستند؛ هم‌چنین ثابت کردند اگر H یک زیرگروه دلخواه از p–گروه توانمند G باشد، آن‌گاه تعداد مولدهای کمین H حداکثر برابر با تعداد مولدهای کمین G می‌باشد. در سال ۲۰۰۲ [۲۳]، ویلسون[۱]، نشان داد که اگر G یک p–گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $G^p = G^{\{p\}}$، آن‌گاه G مشمول در یک گروه توانمند است. در این بخش نشان می‌دهیم که اگر G یک p–گروه توانمند باشد، آن‌گاه $G^p = G^{\{p\}}$. هم‌چنین یک p–گروه توانمند دارای یک پایه می‌باشد که هر عضو گروه به‌طور منحصربه فرد توسط اعضای این پایه قابل بیان است. مرجع اصلی این بخش، [۱۲] می‌باشد.

در فصل سوم کران‌هایی را برای مرتبه، نما و تعداد مولدهای ضربگر c–پوچ‌توان p–گروه توانمند معرفی می‌کنیم که در واقع تعمیمی از کران‌هایی است که مان و لوبوتسکی در [۱۲] در مورد ضربگر شور ارائه دادند. مرجع اصلی این فصل، [۱۳] می‌باشد.

در فصل چهارم با ارائه مثال‌هایی از گروه‌ها و محاسبه‌ی دقیق تعداد مولدها، مرتبه و نمای ضربگر c–پوچ‌توان آن‌ها، برخی از کران‌های مطالعه شده در فصل قبل را با کران‌های به‌دست آمده‌ی قبلی مقایسه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این نتایج بعضی از نامساوی‌های قبل را بهبود می‌بخشند.

[۱] L. E. Wilson

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ جابه‌جاگرها و گروه پوچ‌توان

در این بخش به تعریف جابه‌جاگر و گروه پوچ‌توان و ارائه‌ی خواص مهمی از آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و x و y عناصر دلخواه گروه G باشند. جابه‌جاگر[۱] x و y و مزدوج[۲] x توسط y را به ترتیب با نمادهای $[x,y]$ و x^y نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy,$$

$$x^y=y^{-1}xy.$$

در حالت کلی فرض کنید x_1، x_2، ... و x_n عناصری دلخواه از گروه G باشند. در این صورت جابه‌جاگر ساده[۳] از وزن n و مرتب شده از چپ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Big[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\Big]=\Big[[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}],x_n\Big].$$

به ویژه اگر $x=x_1$ و $y=x_n=\ldots=x_2$، آن‌گاه جابه‌جاگر $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ را با نماد $[x,_{n-1}y]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. *([۱۹]) فرض کنید x_1، x_2، ... و x_n عناصری دلخواه و متمایز از گروه G باشند، در این صورت $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ را از وزن[۴] یک روی هر متغیر x_i، که $1\leqslant i\leqslant n$، می‌نامیم.*

حال اگر یکی از متغیر ها، مثلاً x_j، t بار تکرار شده باشد، آن‌گاه $[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ را از وزن t روی x_j و از وزن یک روی x_i، $1\leqslant i\leqslant n$ و $i\neq j$، می‌گوییم.

مثال ۳.۱.۱. *فرض کنید x و y دو عنصر دلخواه از گروه G باشند. در این صورت $[x,y,x]$ از وزن یک روی y و از وزن دو روی x می‌باشد.*

---

[۱] commutator [۲] conjugate [۳] simple commutator [۴] weight

گزاره ۴.۱.۱. *فرض کنید x، y و z عناصری دلخواه از گروه G باشند. در این صورت اتحادهای زیر برقرارند:*

۱) $x^y = x[x,y],$

۲) $(x^{-1})^y = (x^y)^{-1},$

۳) $xy = yx[x,y],$

۴) $[x,y]^{-1} = [y,x],$

۵) $[x,y]^z = [x,y][x,y,z],$

۶) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z],$

۷) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z,$

۸) $[x,y^{-1}] = ([x,y]^{-1})^{y^{-1}},$

۹) $[x^{-1},y] = ([x,y]^{-1})^{x^{-1}},$

۱۰) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1,$

۱۱) $[y,x,z^y][z,y,x^z][x,z,y^x] = 1.$

تساوی های ۱۰ و ۱۱ به اتحاد هال-ویت[1] *معروف هستند.*

برهان. به ۵.۱.۵ صفحه ۱۲۳ از [۱۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنید X و Y دو زیر مجموعه (نه لزوماً زیرگروه) از گروه G باشند. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر*[2] *X و Y و زیرگروه مزدوج*[3] *X توسط Y را با نمادهای $[X,Y]$ و X^Y نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$[X,Y] = \langle [x,y] \,|\, x \in X, y \in Y \rangle,$$

$$X^Y = \langle x^y \,|\, x \in X, y \in Y \rangle.$$

[1] Hall–Witt Identity [2] commutator subgroup [3] conjugate subgroup

در حالت کلی فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n زیرمجموعه‌هایی دلخواه از گروه G باشند. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n] = \Big[[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}], X_n\Big],$$

به ویژه اگر $X_1 = X$ و $X_2 = \ldots = X_n = Y$، آن‌گاه زیرگروه جابه‌جاگر $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ را با نماد $[X, {}_{n-1}Y]$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۶.۱.۱. *از تعریف ۵.۱.۱ چنین برمی‌آید که $[X, Y] = [Y, X]$.*

لم ۷.۱.۱. *(لم سه زیرگروه[1]) فرض کنید H، K و L سه زیرگروه دلخواه از G و N یک زیرگروه نرمال از G باشند. در این صورت اگر دو زیر گروه از سه زیرگروه $[H, K, L]$، $[K, L, H]$ و $[L, H, K]$ در زیرگروه N باشند، آن‌گاه زیرگروه سوم نیز چنین است.*

برهان. به ۱۰.۱.۵ صفحه ۱۲۶ از [۱۹] مراجعه کنید. □

لم ۸.۱.۱. *فرض کنید H، K و L سه زیرگروه دلخواه از G باشند. در این صورت:*

(۱) $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$،

(۲) اگر $[H, L] \trianglelefteq \langle H, K, L \rangle$، آن‌گاه $[HK, L] = [H, L]\,[K, L]$،

(۳) $[HK, G] = [H, G]\,[K, G]$

(۴) اگر H، K و L سه زیرگروه نرمال G باشند، آن‌گاه $[HK, L] = [H, L]\,[K, L]$،

(۵) اگر H و K دو زیرگروه نرمال G باشند و $K\,[H, G] \leqslant H$، آن‌گاه به ازای هر $l \geqslant 1$ داریم $H \leqslant K\,[H, {}_l G]$.

[1]three subgroup Lemma

برهان. به لم های ۱.۱۲ و ۱.۱۷ از [۱۰] و لم ۱.۱۹ از [۱۱] مراجعه کنید.

□

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و $G_{\circ} = \{e\} \leqslant G_{1} \leqslant \ldots \leqslant G_{n} \leqslant G_{n+1} \leqslant \ldots$ یک زنجیر از زیرگروه‌های آن باشد. زنجیر فوق را سری مرکزی[۱] گوییم، هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leqslant Z(\frac{G}{G_{i+1}})$.*

تعریف ۱۰.۱.۱. *گروه G را گروه پوچ‌توان[۲] نامیم هرگاه دارای یک سری مرکزی به صورت زیر باشد:*

$$G_{\circ} = \{e\} \leqslant G_{1} \leqslant \ldots \leqslant G_{t} = G.$$

طول کوتاه‌ترین چنین سری مرکزی را ره‌ی پوچ‌توانی[۳] گروه G گوییم و با نماد $cl(G)$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۱۱.۱.۱. *به راحتی می‌توان نشان داد که هر گروه آبلی یک گروه پوچ‌توان است ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست، یعنی هر گروه پوچ‌توان لزوماً آبلی نیست. به عنوان مثال Q_{8} گروهی پوچ‌توان و غیر آبلی است.*

تعریف ۱۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. $\gamma_i(G)$ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\gamma_{1}(G) = G, \qquad \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G].$$

واضح است که $\gamma_i(G) \trianglelefteq G$. به راحتی می‌توان نشان داد که $\frac{\gamma_{i+1}(G)}{\gamma_i(G)} \leqslant Z(\frac{G}{\gamma_i(G)})$، بنابراین سری $\ldots \geqslant \gamma_i(G) \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{2}(G) = G' \geqslant \gamma_{1}(G) = G$ یک سری مرکزی است که آن را سری مرکزی پایینی[۴] برای G گوییم. $\gamma_i(G)$، $i-$امین جمله سری مرکزی پایینی نامیده می‌شود. کوچک‌ترین عدد طبیعی k که $\gamma_{k+1}(G) = 1$ باشد، طول سری مرکزی پایینی G گفته می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. $i-$امین مرکز G[۵] را با نماد $Z_i(G)$ نشان می‌دهیم که*

[۱] central series [۲] nilpotent group [۳] nilpotent class [۴] lower central series [۵] i *th* central of G

به طور استقرایی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_0(G) = \{e\}, \qquad Z_1(G) = Z(G).$$

اگر $Z_{i-1}(G)$ تعریف شده باشد و $Z_{i-1}(G) \trianglelefteq G$، آن‌گاه $Z_i(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{Z_i(G)}{Z_{i-1}(G)} = Z(\frac{G}{Z_{i-1}(G)}).$$

به راحتی می‌توان نشان داد $Z_i(G) \trianglelefteq G$ بنابراین سری

$$Z_0(G) = \{e\} \leq Z_1(G) = Z(G) \leq \ldots \leqslant Z_i(G) \leq \ldots$$

یک سری مرکزی است که آن را سری مرکزی بالایی[1] *برای G گوییم.*

کوچک‌ترین عدد طبیعی k که $Z_k(G) = G$ باشد، طول سری مرکزی بالایی G نامیده می‌شود.

لم ۱۴.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه، H یک زیرگروه و N یک زیرگروه نرمال در G باشند به طوری که $N \subseteq H$. در این صورت $\frac{H}{N} \leqslant Z(\frac{G}{N})$ اگروتنهااگر $[H,G] \leqslant N$.*

برهان. فرض کنیم $[h,g]$ مولدی دلخواه از زیرگروه جابه‌جاگری $[H,G]$ باشد. در این صورت با توجه به این که $\frac{H}{N} \leqslant Z(\frac{G}{N})$ است، $[\frac{H}{N}, \frac{G}{N}] = N$. بنابراین $[h,g]N = N$ یعنی $[h,g] \in N$ لذا $[H,G] \leqslant N$. به طریق مشابه از $[H,G] \leqslant N$ می‌توان نتیجه گرفت $\frac{H}{N} \leqslant Z(\frac{G}{N})$. □

لم ۱۵.۱.۱. *فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. در این صورت به ازای هر $i \geqslant 1$، $x \in Z_i(G)$ اگروتنهااگر به ازای هر $g_1, g_2, \ldots, g_i \in G$ داشته باشیم $[x, g_1, g_2, \ldots, g_i] = 1$.*

برهان. به استقرا روی i به راحتی ثابت می‌شود. □

[1] upper central series

گزاره ۱۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و $\{e\} = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$ یک سری مرکزی آن باشد، در این صورت:

(۱) $G_i \leqslant Z_i(G)$ و $\gamma_{i+1}(G) \leqslant G_{n-i}$،

(۲) طول سری مرکزی پایینی و طول سری مرکزی بالایی G با هم برابرند.

برهان. به ۹.۱.۵ صفحه ۱۲۵ از [۱۹] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه، H و K دو زیرگروه، N زیرگروه نرمالی از G و i و j دو عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leqslant \gamma_{i+j}(G),$

۲) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leqslant \gamma_{ij}(G),$

۳) $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leqslant Z_{j-i}(G); \qquad j \geqslant i,$

۴) $Z_i(\frac{G}{Z_j(G)}) = \frac{Z_{i+j}(G)}{Z_j(G)},$

۵) $\gamma_i(\frac{G}{N}) = \frac{\gamma_i(G)N}{N},$

۶) $Z_i(\frac{G}{N}) \geqslant \frac{Z_i(G)N}{N},$

۷) $Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K),$

۸) $\gamma_i(H \times K) = \gamma_i(H) \times \gamma_i(K).$

برهان. به ۱۱.۱.۵ صفحه ۱۲۶ از [۱۹] و بخش ۲ از [۸] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. $i-$امین زیرگروه مشتق[۱] G را با نماد $G^{(i)}$ نشان داده و به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G^{(0)} = G, \qquad G^{(i)} = \left[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}\right].$$

[۱] i *th* derived subgroup

در این صورت زنجیر

$$G^{(0)} = G \geqslant G^{(1)} = G' \geqslant \ldots \geqslant G^{(n)} \geqslant \ldots$$

را سری مشتق[۱] G می‌نامیم.

کوچک‌ترین عدد طبیعی k که $G^{(k)} = \{e\}$ باشد را طول سری مشتق گوییم و با نماد $l(G)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۱۹. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت:*

(۱) $G^{(i)} \leqslant \gamma_{2^i}(G)$،

(۲) اگر G یک گروه پوچ‌توان از رده‌ی پوچ‌توانی c باشد، آن‌گاه $l(G) \leqslant [log_2 c] + 1$.

برهان. به ۱.۵.۱۲ صفحه ۱۲۶ از [۱۹] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۱.۲۰. *فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد. در این صورت:*

(۱) H را زیرگروه پایای کامل[۲] گوییم هرگاه نسبت به همه‌ی درون ریختی‌های G، پایدار باشد یعنی به ازای هر $\varphi \in End(G)$، $\varphi(H) \subseteq H$ که با نماد $H \overset{f}{\trianglelefteq} G$ نشان می‌دهیم.

(۲) H را زیرگروه مشخصه[۳] گوییم هرگاه نسبت به همه‌ی خودریختی‌های G، پایدار باشد یعنی به ازای هر $\varphi \in Aut(G)$، $\varphi(H) \subseteq H$ که با نماد $H \overset{c}{\trianglelefteq} G$ نشان می‌دهیم.

(۳) H را زیرگروه نرمال[۴] گوییم هرگاه نسبت به همه‌ی خودریختی‌های داخلی G، پایدار باشد یعنی به ازای هر $\varphi \in Inn(G)$، $\varphi(H) \subseteq H$ که با نماد $H \trianglelefteq G$ نشان می‌دهیم.

[۱]derived series [۲]fully invariant [۳]characteristic [۴]normal

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند به طوری که $H \subseteq K$. در این صورت:*

(۱) *اگر H زیرگروه پایای کامل در G باشد، آن‌گاه H زیرگروه مشخصه در G است.*

(۲) *اگر H زیرگروه مشخصه در G باشد، آن‌گاه H زیرگروه نرمال در G است.*

(۳) *اگر H زیرگروه پایای کامل در K و K زیرگروه پایای کامل در G باشند، آن‌گاه H زیرگروه پایای کامل در G است.*

(۴) *اگر H زیرگروه مشخصه در K و K زیرگروه مشخصه در G باشند، آن‌گاه H زیرگروه مشخصه در G است.*

(۵) *اگر H زیرگروه مشخصه در K و K نرمال در G باشد، آن‌گاه H زیرگروه نرمالی در G است.*

برهان. به ۶.۵.۱ از [۱۹] مراجعه کنید. □

گزاره ۲۲.۱.۱. *(فرمول هال-پترسکو[۱]) فرض کنید x و y دو عنصر دلخواه از G باشند، $H = \langle x, y\rangle$ و $K = \langle x, [x, y]\rangle$. در این صورت به ازای هر $n \geqslant ۱$، داریم:*

(۱) $x^n y^n = (xy)^n c_۲^{e_۲} \dots c_{n-۱}^{e_{n-۱}} c_n^{e_n}$، *که به ازای* $۲ \leqslant i \leqslant n$، $c_i \in \gamma_i(H)$ *و* $e_i = \binom{n}{i}$.

(۲) $[x^n, y] = [x, y]^n d_۲^{r_۲} \dots d_{n-۱}^{r_{n-۱}} d_n^{r_n}$، *که به ازای* $۲ \leqslant j \leqslant n$، $d_j \in \gamma_j(K)$ *و* $r_j = \binom{n}{j}$.

برهان. به صفحه ۳۵۵ از [۳] مراجعه کنید. □

تبصره ۲۳.۱.۱. *درگزاره قبل اگر $[x, y]$ با x و y جابه‌جا شود، آن‌گاه*

$$(xy)^n = x^n y^n \, [y, x]^{\frac{n(n-۱)}{۲}}.$$

[۱] Hall–Petrescu Formula

برهان. چون $[x,y]$ با x و y جابه‌جا می شود، پس $\gamma_3(H) = 1$ و با توجه به نمادگذاری‌های گزاره‌ی قبل خواهیم داشت $c_i = 1$ به ازای $i > 2$. بنابراین $x^n y^n = (xy)^n c_2^{e_2} = (xy)^n \ [x,y]^{\frac{n(n-1)}{2}}$ و به عبارت دیگر $(xy)^n = x^n y^n \ [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □

قضیه ۲۴.۱.۱. *(قانون مدولی ددکیند[1])*

فرض کنید H، K و L زیرگروه‌هایی از یک گروه باشند که $K \subseteq L$. در این صورت:

$$L \cap HK = (L \cap H)K.$$

برهان. بدیهی است که $(L\cap H)K \subseteq HK$ و $L \cap H \subseteq L$. از طرفی بنا به فرض $K \subseteq L$ است پس $(L \cap H)K \subseteq L$ و بنابراین

$$(L \cap H)K \subseteq L \cap HK.$$

حال فرض کنید $x \in L \cap HK$، پس $x \in L$ و $x \in HK$ لذا $h \in H$ و $k \in K$ وجود دارند به طوری که $x = hk$. از این که $x \in L$ و $k^{-1} \in K \subseteq L$ است، داریم $h = xk^{-1} \in L$، بنابراین $h \in L \cap H$ در نتیجه $x \in (L \cap H)K$. لذا

$$L \cap HK \subseteq (L \cap H)K.$$

□

تعریف ۲۵.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت کوچک‌ترین عدد طبیعی که تمام عناصر G به توان آن، عنصر همانی شوند را نما[2] ی گروه G می‌نامیم و با $exp(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، آن‌گاه گروه G را از نمای نامتناهی می‌گوییم.*

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که اگر G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه $exp(G) | |G|$ و هم‌چنین به

[1] Dedekind modular Law [2] exponent

ازای هر عنصر $g \in G$، $exp(G) \mid o(g)$.

لم ۲۶.۱.۱. *اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه هر گروه از مرتبه $p^۲$، آبلی است.*

برهان. به صفحه ۱۰۹ از [۲۷] مراجعه کنید. □

۲.۱ نمایش آزاد گروه‌ها

فرض کنید G یک گروه باشد. می‌دانیم هر گروه تصویر همریختی از یک گروه آزاد است (با توجه به ۵.۱.۲ از [۱۹]). پس گروه آزاد F وجود دارد به طوری که $\pi : F \longrightarrow G$ یک بروریختی است. بنا به قضیه اول یکریختی داریم $G \cong \frac{F}{ker\pi}$. معمولا $ker\pi$ را با R نشان می‌دهیم و $G \cong \frac{F}{R}$ را یک نمایش آزاد[۱] برای گروه G می‌نامیم.

اگر F گروه آزاد روی مجموعه‌ای مانند X باشد و زیرمجموعه‌ی Y از F را بتوان یافت به طوری که R بستار نرمال Y در F باشد یعنی $R = \langle Y \rangle^F$، آن‌گاه $G = \langle X | Y \rangle$ را یک نمایش[۲] گروه G می گوییم که X مجموعه مولد[۳] ها و Y مجموعه رابط[۴] ها برای G در این نمایش نامیده می‌شوند.

اگر $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_m\}$ ، آن‌گاه

$$G = \langle x_۱, x_۲, \ldots, x_n | y_۱ = ۱, y_۲ = ۱, \ldots, y_m = ۱ \rangle$$

نمایش دیگری برای G است، که $(۱ \leqslant i \leqslant m) y_i = ۱$، یک رابطه[۵] برای G در این نمایش می‌باشد.

مثال ۱.۲.۱. *یک گروه دوری متناهی از مرتبه n را به صورت $\langle a \mid a^n \rangle$ و یا به صورت $\langle a \mid a^n = ۱ \rangle$ نمایش می‌دهند یعنی* $Z_n = \langle a \mid a^n = ۱ \rangle$.

مثال ۲.۲.۱. *گروه دوری نامتناهی را به صورت $\langle a \mid \phi \rangle$ نمایش می‌دهند یعنی* $\mathbb{Z} = \langle a \mid \phi \rangle$.

[۱] free presentation [۲] presentation [۳] generator [۴] relator [۵] relation

تعریف ۳.۲.۱. یک پایه[۱] از یک گروه آبلی F، زیرمجموعه X از F است به طوری که $F = \langle X \rangle$ و برای عناصر متمایز $x_۱, x_۲, \ldots, x_k \in X$ و $n_i \in \mathbb{Z}$ $(۱ \leqslant i \leqslant k)$، اگر $\sum_{i=۱}^{k} n_i x_i = ۰$ باشد، آن‌گاه $n_i = ۰$.

گروه آبلی F را یک گروه آبلی آزاد[۲] گوییم در صورتی که یک پایه‌ی ناتهی داشته باشد.

مثال ۴.۲.۱. (۱) $\mathbb{Z}$ یک گروه آبلی آزاد با پایه $\{۱\}$ است.

(۲) Z_n گروه آبلی آزاد نیست.

لم ۵.۲.۱. *اگر F گروه آبلی آزاد با پایه‌ی ناتهی X باشد، آن‌گاه F به صورت جمع مستقیم n نسخه از $\mathbb{Z}$ است که n عدد اصلی X می‌باشد، یعنی*

$$F \cong \underset{n}{\oplus} \sum \mathbb{Z} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}.$$

برهان. به قضیه ۱.۱ صفحه ۷۱ از [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۶.۲.۱. *هر دو پایه از یک گروه آبلی آزاد، عدد اصلی یکسان دارد.*

برهان. به قضیه ۲.۱ صفحه ۷۲ از [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۷.۲.۱. اگر X یک پایه برای گروه آبلی آزاد F باشد، آن‌گاه عدد اصلی X را رتبه[۳] F می‌نامیم، به عبارت دیگر $rank(F) = r(F) = |X|$

قضیه ۸.۲.۱. *(قضیه اساسی گروه‌های آبلی با تولید متناهی)*

فرض کنید G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد. در این صورت اعداد صحیح مثبت و منحصربه فردی (نه لزوماً متمایز) مانند $m_۱$، $m_۲$، ... و m_t وجود دارند به طوری که $۱ < m_۱$، $m_۱ \mid m_۲ \mid \ldots \mid m_t$ و

$$G \cong Z_{m_۱} \oplus Z_{m_۲} \oplus \ldots \oplus Z_{m_t} \oplus F,$$

[۱] basis [۲] free abelian group [۳] rank

که F گروه آبلی آزاد است.

برهان. به قضیه ۱.۲ صفحه ۷۶ از [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد. در این صورت اعداد صحیح مثبت α_1، α_2، $\ldots$ و α_k و اعداد اول p_1، p_2، $\ldots$ و p_k (نه لزوما متمأیز) وجود دارند به طوری که*

$$G \cong Z_{p_1^{\alpha_1}} \oplus Z_{p_2^{\alpha_2}} \oplus \ldots \oplus Z_{p_k^{\alpha_k}} \oplus F,$$

که F گروه آبلی آزاد است.

برهان. به قضیه ۲.۲ صفحه ۷۶ از [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۰.۲.۱. *(قضیه اساسی گروه‌های آبلی متناهی)*

فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی ناصفر باشد. در این صورت اعداد صحیح مثبت منحصربه فردی، (نه لزوماً متمایز) مانند m_1، m_2، $\ldots$ و m_t وجود دارند به‌طوری که $1 < m_1$، $m_i \mid m_{i+1}$، و $i = 1, 2, \ldots, t-1$

$$G \cong Z_{m_1} \oplus Z_{m_2} \oplus \ldots \oplus Z_{m_t}.$$

برهان. به قضیه ۲.۱۴ صفحه ۱۸۰ از [۲۴] مراجعه کنید. □

۳.۱ جابه‌جاگرهای پایه‌ای

در این بخش مفهوم بسیار مهم جابه‌جاگر پایه‌ای[۱] را تعریف می‌کنیم و به کمک آن قضایای اساسی در گروه‌ها به‌دست می‌آوریم.

[۱] basic commutator