بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

برخی ویژگی‌های گروه‌های ۲-انگل نیرومند

توسط:
ثریا امیری

استاد راهنما:
دکتر اسداله فرامرزی ثالث

استاد مشاور:
دکتر پیمان نیرومند

شهریور ۱۳۹۳

تعهدنامه‌ی اصالت پایان نامه/رساله دانشگاه دامغان

اینجانب ثریا امیری دانش‌آموخته‌ی مقطع کارشناسی ارشد/ دکتری رشته‌ی ریاضی گرایش
دانشکده‌ی ریاضی، علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان به شماره دانشجویی ۹۱۴۴۳۰۰۴ که در تاریخ ۹۳/۶/۳۱ از
پایان‌نامه/ رساله ی تحصیلی خود تحت عنوان برخی ویژگی های گروههای ۲-انگل [illegible]
.... دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد و در موارد استفاده از نتایج دیگران به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

۳) در کلیه مراحل انجام این پایان نامه/ رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاق علمی رعایت شده است.

٤) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه دامغان، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٥) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه دامغان را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

٦) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه دامغان را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

۷) مسئولیت صحت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

نام ونام خانوادگی دانشجو: ثریا امیری

امضاء:

تاریخ: ۹۳/۷/۹

تمامی حقوق مادّی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات، کتاب و نرم افزار حاصل از انجام این پایان نامه/ رساله، متعلق به دانشگاه دامغان می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقرّرات مربوطه و ذکر منبع بلامانع است.

به نام خدا

برخی ویژگی‌های گروه‌های ۲-انگل نیرومند

توسط:

ثریا امیری

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر بهزاد صالحیان متی کلایی استادیار ریاضی محض گرایش گراف و ترکیبیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید حیدر جعفری استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشگاه صنعتی شاهرود (داور دوم)

دکتر نرگس تولائی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

تقدیم به پدر عزیزم

از تو هر چه می گویم باز هم کم می آورم

خورشیدی شدی و از روشنایی ات جان گرفتم

و در ناامیدی ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق

اکنون حاصل دستان خسته ات رمز موفقیتم شد، بر خودم تبریک می گویم که تو را دارم و دنیا با همه بزرگی اش مثل تو ندارد

و تو ای مادر

ای شوق زیبایی نفس کشیدن

ای روح مهربان هستی ام، تو رنگ شادی هایم شدی

و لحظه ها را با تمام وجود از من دور کردی و عمری خستگی ها را به جان خریدی تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی

سپاسگزاری

یارب دل پاک و جان آگاهم ده　　　آه شب و گریه سحرگاهم ده

در راه خود اول ز خودم بیخود کن　　　بیخود چو شدم ز خود به خود راهم ده

منت خدای را عزوجل، سپاس بر یکتای بی همتای

سپاس بر او که نگین کوثر مادرم و اسطوره ی بزرگی پدرم را بر من تقدیم کرد تا همیشه با نگاه کردن بر چشمان پر فروغ آن ها باز یادآور این نکته بر من باشند که زندگی در جریان است.

از صمیم قلب سپاسگزارم از

خانواده عزیزم

که شعر زندگی ام ترنم آهنگ مهربانی آنان است. آنانی که امروزم را مدیون سال ها مهر و عشق بی دریغشان هستم.

خدا را شاکرم که افتخار شاگردی استاد فرزانه ای چون جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی را داشته ام. به پاس الطاف بی دریغشان از خداوند متعال توفیق روزافزونشان را خواستارم.

از استاد مشاورم آقای دکتر پیمان نیرومند و داوران محترم آقایان دکتر بهزاد صالحیان و دکتر سید حیدر جعفری کمال تشکر و قدردانی را دارم.

هم چنین از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی خانم دکتر نرگس تولائی که در جلسه دفاعیه بنده حضور داشتند، متشکرم.

در پایان از دوستان عزیزم خانم ها افسانه پورعلی، فاطمه پرنده و زکیه جنتی به دلیل همراهی بی بدیلشان بسیار متشکرم و برایشان آرزوی سلامتی، موفقیت و شادکامی دارم.

چکیده

برخی ویژگی‌های گروه‌های ۲-انگل نیرومند

به وسیله‌ی:
ثریا امیری

در این پایان نامه به مطالعه گروه‌های ۲-انگل نیرومند می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که هر گروه ۲-انگل نیرومند ۳ مولدی، پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ است، موجب شگفتی است که این نتیجه زمانی که تعداد مولدها بیش از ۳ باشد، برقرار نیست، در واقع نشان می‌دهیم مثال‌های نقض مینیمال بسیاری وجود دارند، که تعداد مولدها بیش از ۳، ولی گروه پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ نیستند. سپس به رده بندی گروه‌های ۲-انگل نیرومند مینیمال که پوچتوان از کلاس ۳ هستند، می‌پردازیم. در این‌جا مینیمال بودن به این معنی است که هر بخش نیرومند محض آن پوچتوان از کلاس حداکثر دو باشد.

در نهایت نشان می‌دهیم که برای هر ۳-گروه نیرومند G با کلاس پوچتوانی ۳، $\gamma_3(G) \leq [G,G]^3$، که دراین‌صورت برای تقسیم مثال‌های نقض مینیمال در دو حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند.

(I) مثال‌های مینیمال G که $\gamma_3(G) < [G,G]^3$.

(II) مثال‌های مینیمال G که $\gamma_3(G) = [G,G]^3$.

که این‌جا فقط به بررسی مثال‌های مینیمال نوع (I) می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: گروه‌های نیرومند، گروه‌های ۲-انگل، گروه‌های مینیمال

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌های اختصاری

مرکز G	Z(G)
نرمال‌ساز K در G	$N_G(K)$
H زیرگروه مشخصه K است	$H\ char\ K$
N زیرگروه نرمال G است	$N \lhd G$
مرتبه عنصر g	$o(g)$
گروه خودریختی‌های G	$Aut(G)$
زیرگروه مشتق G	G'
مشتق مرتبه i ام G	$G^{(i)}$
زیرگروه جابه‌جاگر H و K	$[H,K]$
نمای G	$exp(G)$
مینیمال تعداد مولدهایG	$d(G)$
گروه درون‌ریختی‌های G	$Inn(G)$

پیشگفتار

گروه‌های نیرومند برای اولین بار توسط من [۱] و لوبوتزکی [۲] در سال ۱۹۸۷ ارائه گردید. آن‌ها در مقاله خود به بررسی و بیان خواص این گروه‌ها پرداختند و نشان دادند که بسیاری از زیرگروه‌های آن‌ها نیز نیرومند هستند. در فصل اول این پایان‌نامه به بیان برخی خواص جابه‌جاگرها و p-گروه‌های متناهی پرداخته و پس از آن گروه‌های انگل را معرفی می‌کنیم. گروه‌های انگل برای اولین بار در مقاله برنساید [۳] در [۵] معرفی شدند، که برنساید در این مقاله ثابت کرد، همه زیرگروه‌های از نمای ۳، موضعاً متناهی هستند و هم‌چنین نشان داد که این گروه‌ها ۲-انگل هستند. سپس در سال ۱۹۰۲ در [۶] اثبات کرد که هر گروه ۲-انگل در شرایط زیر صدق می‌کند

۱) $[x, y, z] = [y, z, x]$،

۲) $[x, y, z]^{۳} = ۱$.

اگرچه برنساید ثابت کرد که هر گروه ۲-انگل متناوب، موضعاً پوچتوان است ولی او موفق نشد نشان دهد که گروه‌های ۲-انگل پوچتوان از کلاس حداکثر ۳ هستند. هاپکینز [۴] در [۸] برای اولین بار نشان داد که این رده حداکثر ۳ است. بنابراین هر گروه ۲-انگل در شرط زیر نیز صدق می‌کند

۳) $[x, y, z, t] = ۱$.

در فصل دوم به مطالعه و بررسی گروه‌های نیرومند و خواص آن‌ها پرداخته و نشان می‌دهیم تعداد مولدهای مینیمال هر زیرگروه از یک گروه نیرومند حداکثر برابر تعداد مولدهای مینیمال خود گروه است. به‌طورکلی گروه‌های نیرومند رده خاصی از p-گروه‌هاست که ویژگی‌های آن بسیار شبیه گروه‌های

[۱] Mann

[۲] Lubotzky

[۳] Burnside

[۴] Hopkins

آبلی است با این تفاوت که زیرگروه هر گروه نیرومند، لزوماً نیرومند نیست.

در فصل سوم این پایان‌نامه به رده‌بندی گروه‌های ۲-انگل نیرومند می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که هر گروه ۲-انگل نیرومند ۳ مولدی پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ است. در واقع مثال‌های نقض مینیمال بسیاری وجود دارند، که تعداد مولدها بیش از ۳ ولی گروه پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ نیست. این‌جا مینیمال بودن به این معنی است که هر بخش نیرومند محض آن پوچتوان از کلاس حداکثر دو نیست.

هم‌چنین نشان می‌دهیم که برای هر ۳-گروه نیرومند G، $\gamma_3(G) \leq [G,G]^3$.

که برای تقسیم بندی مثال‌های نقض مینیمال به دو نوع زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

(I) مثال‌های مینیمال G که $\gamma_3(G) < [G,G]^3$،

(II) مثال‌های مینیمال G که $\gamma_3(G) = [G,G]^3$.

در این پایان‌نامه فقط با مثال‌های مینیمال نوع (۱) سروکار داریم. هدف اصلی ما این است که آن‌ها را به سه خانواده نامتناهی که رتبه یکی از آن‌ها پنج و رتبه دو خانواده دیگر، چهار است، تقسیم کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱-۱ جابجاگرها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۱.۱. جابه‌جاگر یک زوج مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای G، عبارت است از عضو

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ \in G.$$

به‌موجب این تعریف، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید $g_۱, g_۲ \in G$. در این صورت*

۱) $[g_۲, g_۱] = [g_۱, g_۲]^{-۱}$،

۲) $[g_۱, g_۲] = ۱$ *اگر وتنها اگر $g_۱$ و $g_۲$ جابه‌جایی پذیر باشند.*

اثبات. با استفاده از تعریف ۱.۱.۱، اثبات قضیه به سادگی حاصل می‌شود. □

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $H, K \leq G$. زیرگروه

$$\langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

از G را زیرگروه جابه‌جاگر H و K می‌نامند.

در این تعریف $\langle X \rangle$ نماد زیرگروه تولید شده با زیرمجموعه X از G است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، و $x_1, \ldots, x_n$ اعضایی از G باشند، جابه‌جاگر مرتبه n-ام $[x_1, \ldots, x_n]$، به استقرا چنین تعریف می‌شود

$$[x_1] = x_1, \quad [x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n], \quad (n > 2).$$

به‌ویژه؛ اگر $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = y$، آنگاه جابه‌جاگر $[x_1, \ldots, x_n]$ را با نماد $[x_{1,n-1}\, y]$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۵.۱.۱. *اگر x، y و z سه عضو دلخواه از G باشند، آنگاه اتحادهای زیر برقرارند.*

۱) $y^x = y[y, x]$.

۲) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$.

۳) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$.

۴) $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}} = [y, x][y, x, y^{-1}]$.

۵) $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}} = [y, x][y, x, x^{-1}]$.

۶) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ *(اتحاد هال- ویت)* [1].

اثبات. اثبات پنج قسمت اول به آسانی از تعریف ۱.۱.۱ حاصل می‌شود. برای اثبات قسمت (۶)، به [۱۵] مراجعه شود. □

لم ۶.۱.۱. *برای عدد صحیح مثبت n داریم*

$$[x^n, y] = [x, y]^{x^{n-1}}[x, y]^{x^{n-2}} \ldots [x, y]^x[x, y],$$

$$[x, y^n] = [x, y][x, y]^y \ldots [x, y]^{y^{n-1}},$$

$$(xy)^n \equiv x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}, \qquad (mod \gamma_3(G)).$$

اثبات. به [۴] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱.۱. مرکز گروه G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(G) = \{x \in G | xg = gx \quad \forall g \in G\}.$$

[1] Hall-Witt

حال به بیان خواصی از جابه‌جاگرها می‌پردازیم.

لم ۱.۱.۸. *فرض کنید H و K دو زیرگروه دلخواه از G باشند. دراین‌صورت*

۱) $[H,K]=[K,H]$.

۲) *اگر* $K_1 \leq K$، و $H_1 \leq H$، *آنگاه* $[H_1,K_1] \leq [H,K]$.

۳) *اگر* $H \trianglelefteq G$، *آنگاه* $[H,K] \leq H$.

۴) *اگر* $K \trianglelefteq G$، و $H \trianglelefteq G$، *آنگاه* $[H,K] \trianglelefteq G$.

۵) $[H,K] \leq K$، *اگر و تنها اگر* $H \leq N_G(K)$.

۶) *اگر* $K \leq H$، و $H \trianglelefteq G$، *آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه* $\frac{H}{K} \leq Z(\frac{G}{K})$، *آن است که* $[G,K] \leq H$.

۷) *اگر* θ *یک همریختی گروه* G *باشد، آنگاه* $[H,K]^\theta = [H^\theta, K^\theta]$.

اثبات. به [۷] و [۱۶] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۹. اگر $H_1, \ldots, H_n \leqslant G$، آنگاه زیرگروه جابه‌جاگر $[H_1, \ldots, H_n]$، را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم

$$[H_1, \ldots, H_n] = [[H_1, \ldots, H_{n-1}], H_n].$$

لم ۱.۱.۱۰. *(لم سه زیرگروه)* [۲] *فرض کنید* H, K *و* L *سه زیرگروه از* G *باشند و* $N \lhd G$. *در این صورت اگر دو زیرگروه از زیرگروه‌های* $[H,K,L]$، $[K,L,H]$، $[L,H,K]$ *زیرگروه* N *باشند، آنگاه سومی نیز چنین است.*

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. □

لم ۱.۱.۱۱. *فرض کنید* H *و* K *و* L *سه زیرگروه دلخواه از* G *باشند و* $X \subseteq G$، *دراین‌صورت*

۱) $[H,K] \trianglelefteq \langle H,K \rangle$.

۲) $[X,G] \trianglelefteq G$.

۳) *اگر* $[H,L] \trianglelefteq \langle H,K,L \rangle$، *آنگاه* $[HK,L]=[H,L][K,L]$.

۴) $[HK,G]=[H,G][K,G]$.

---

[۲] three subgroups lemma

۵) اگر H ، K و L سه زیرگروه نرمال G باشند، آنگاه $[HK, L] = [H, L][K, L]$.
۶) اگر H و K دو زیرگروه نرمال G باشند و $H \leq K[H, G]$ *، آنگاه به ازای هر* $l \geqslant ۱$ *، داریم*

$$H \leq K[H,_l G].$$

اثبات. به [۱۱] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید $H \leq G$. دراین‌صورت زیرگروه H از G را مشخصه در G گوییم، هرگاه به ازای هر $\tau \in Aut(G)$، $H^\tau \leq H$. واضح است که هر زیرگروه مشخصه G یک زیرگروه نرمال از G است.

۱-۲ سری‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دنباله $\{\gamma_n(G)\}_{n \geqslant ۱}$ از زیرگروه‌های G را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم

$$\gamma_۱(G) = G, \qquad \gamma_n(G) = [\gamma_{n-۱}(G), G], \qquad (n > ۱).$$

به آسانی به استقراء ثابت می‌شود که هر $\gamma_n(G)$ یک زیرگروه مشخصه از G است. به‌این‌ترتیب که به ازای هر $\tau \in Aut(G)$، داریم

$$\gamma_n(G)^\tau = [\gamma_{n-۱}(G), G]^\tau = [\gamma_{n-۱}(G)^\tau, G^\tau] = [\gamma_{n-۱}(G), G] = \gamma_n(G).$$

پس به ازای هر n طبیعی، $\gamma_n(G)\ char\ G$. بنابراین $\gamma_n(G) \trianglelefteq G$، و

$$\gamma_n(G) = [\gamma_{n-۱}(G), G] \leq \gamma_{n-۱}(G).$$

تعریف ۲.۲.۱. سری

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \ldots \leq G_r = G.$$

را سری نرمال G گوییم هرگاه به ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$. سری نرمال فوق را سری مرکزی G گوییم، هرگاه به ازای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$ ،

$$\frac{G_i}{G_{i-۱}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-۱}}).$$

تعریف ۳.۲.۱. سری

$$G=\gamma_1(G)\geq\gamma_2(G)\geq\ldots\geq\gamma_n(G)\geq\ldots$$

را سری مرکزی پایینی G گوییم.

حال سری دیگری را معرفی می‌کنیم که صعودی است. فرض کنید G یک گروه باشد. دنباله $\{Z_n(G)\}_{n\geqslant 0}$ از زیرگروه‌های G را با استقراء چنین تعریف می‌کنیم

$$Z_0(G)=1,\qquad \frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)}=Z(\frac{G}{Z_n(G)}),\qquad (n\geqslant 0).$$

واضح است $Z_1(G)=Z(G)$. به آسانی به استقراء ثابت می‌شود که هر $Z_n(G)$ یک زیرگروه مشخصه G است. بنابراین به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، $Z_n(G)\trianglelefteq G$. همچنین $Z_n(G)\leq Z_{n+1}(G)$، و سری

$$1=Z_0(G)\leq Z_1(G)\leq\ldots\leq Z_n(G)\leq\ldots$$

را سری مرکزی بالایی G گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. دنباله $\{G^{(n)}\}_{n\geqslant 0}$ از زیرگروه‌های G را چنین تعریف می‌کنیم

$$G^{(0)}=G,\qquad G^{(n)}=[G^{(n-1)},G^{(n-1)}],\qquad (n\geqslant 1).$$

طبق قرارداد، $G^{(1)}$، $G^{(2)}$ و $G^{(3)}$ را با G'، G'' و G''' نشان می‌دهیم.

سری

$$G\geq G'\geq G''\geq G'''\geq\ldots$$

را سری مشتق G گوییم و کوچکترین عدد صحیح نامنفی n را که به ازای آن $G^n=1$، طول سری مشتق نامیم و می‌نویسیم $l(G)=n$.

۱-۲-۱ گروه پوچتوان

گزاره ۵.۲.۱. *گروه G را پوچتوان گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند c وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\gamma_{c+1}(G)=1$ و یا عددی طبیعی مانند s موجود باشد، به‌طوری‌که $Z_s(G)=G$.*

اثبات. به [1] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۲.۱. عدد طبیعی c در گزاره فوق را کلاس پوچتوانی G نامیده و آن را با $cl(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۲.۱. *اگر G یک گروه پوچتوان و N زیرگروه نرمال غیربدیهی آن باشد، آنگاه*

$$N \cap Z(G) \neq ۱.$$

اثبات. به [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۸.۲.۱. *به ازای هر دو عدد طبیعی i و j داریم*

۱) $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] = \gamma_{i+j}(G)$،

۲) *اگر* $j \leqslant i$، *آنگاه* $[Z_i(G), \gamma_j(G)] \leq Z_{ij}(G)$،

۳) $\gamma_i(\gamma_j(G)) \leq \gamma_{ij}(G)$.

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه پوچتوان و M زیرگروه ماکسیمالی از G باشد، در این صورت* $M \trianglelefteq G$، و $|\frac{G}{M}| = p$، *که p یک عدد اول است.*

اثبات. به [۱] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۰.۲.۱. عدد طبیعی r را نمای گروه G نامیم، هرگاه کوچکترین عددی باشد که به ازای هر $g \in G$، $g^r = ۱$. نمای G را با نماد $exp(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. مقطع همه زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گوییم و آن را با نماد $\varphi(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، $\varphi(G) = G$ تعریف می‌کنیم. به وضوح می‌توان دید که $\varphi(G)$ زیرگروه مشخصه G است.

لم ۱۲.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و* $A \subseteq G$، و $B \subseteq \varphi(G)$. *در این صورت اگر* $G = \langle A, B \rangle$، *آنگاه* $G = \langle A \rangle$.

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچتوان است اگر و تنها اگر* $G' \leq \varphi(G)$.

اثبات. به قضیه [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید $H \leq G$، و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از خودریختی‌های G باشد. می گوییم H یک زیرگروه A ناوردای G است، اگر

$$\forall h \in H, \ \forall \alpha \in A, \quad h^{\alpha} \in H.$$

به عنوان مثال، هرگاه $A = 1$، آنگاه بدیهی است که هر زیرگروه G، A ناورداست.

قضیه ۱.۲.۱۵. *X را زیرمجموعه ای ناتهی از G و A را زیرمجموعه‌ای ناتهی از $Aut(G)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in A$، $x^{\alpha} \in \langle X \rangle$. در این صورت $\langle X \rangle$ یک زیرگروه A ناوردای G است.*

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱.۲.۱۶. *فرض کنید A زیرمجموعه‌ای نا تهی از $Aut(G)$ و H و K زیرگروه‌های A ناوردای G باشند. در این صورت $[H, K]$، نیز زیرگروه A ناوردای G است. به‌ویژه؛ گروه مشتق G' یک زیرگروه مشخصه G است.*

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم F یک گروه، X یک مجموعه و $\theta : X \longrightarrow F$ یک تابع باشد، دراین‌صورت (F, θ) را بر X آزاد گوییم هرگاه به‌ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \longrightarrow G$ یک همریختی منحصر به فرد $\beta : F \longrightarrow G$ موجود باشد، به‌طوری‌که $\alpha = \theta\beta$.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید G یک گروه، X یک مجموعه مولد برای G، و F یک گروه آزاد روی X باشد، به‌طوری‌که $G \cong F/R$، دراین‌صورت F/R را یک نمایش آزاد برای G می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۱۹. (قضیه فون دایک) [۳]. *فرض کنید X یک مجموعه، Y مجموعه‌ای از کلمات بر X، و G گروه تعریف شده به‌وسیله مولدهای $x \in X$، و روابط $w = e$، که $(w \in Y)$، باشد. هرگاه H یک گروه باشد، به‌طوری‌که $H = \langle X \rangle$، و H در تمام روابط $w = e$، صدق کند، آنگاه یک برو‌ریختی مانند $\alpha : G \longrightarrow H$، وجود دارد.*

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. □

[۳] Von Dyck's Theorem

قضیه ۲۰.۲.۱. *هرگاه $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی از گروه‌ها باشد، $N \trianglelefteq G$ و $M \trianglelefteq H$ و $f(N) \leq M$، آنگاه f یک همریختی مانند $\bar{f} : G/N \longrightarrow H/M$ با ضابطه $aN \longmapsto f(a)M$ القا می‌کند.*

اثبات. به [۹] مراجعه شود. □

قضیه ۲۱.۲.۱. *برای هر گروه G، گروه مشتق G' کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K از G است، به‌طوری‌که $\dfrac{G}{K}$ آبلی است.*

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. □

قضیه ۲۲.۲.۱. *هرگاه $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leq G$.*

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

گزاره ۲۳.۲.۱. *اگر به ازای هر $g \in G$، داشته باشیم $g^۲ = ۱$، آنگاه G یک گروه آبلی است.*

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

گزاره ۲۴.۲.۱. *فرض کنید $g \in G$ با $O(g) = n < \infty$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح m داریم*

$$O(g^m) = \frac{n}{(m,n)}.$$

که (m,n)، نماد بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

۱-۳ خواص اساسی از p-گروه‌های متناهی

فرض کنید p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه نامیم هرگاه مرتبه هر عضو آن توانی از p باشد. اگر به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم، $(xy)^p = x^p y^p$ آنگاه گروه G را p-آبلی گوییم. همچنین گروه آبلی G را یک p-گروه آبلی مقدماتی گوییم هر گاه مرتبه هر عضو آن، p باشد.

گزاره ۱.۳.۱. *اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه گروه متناهی G یک p-گروه است، اگروتنهااگر $|G|$ توانی از عدد اول p باشد.*

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. □