بسم اللّه الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی محض

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته محاسبات نرم-ساختارهای جبری منطقی

استلزام های فازی بازه ای-مقدار

مؤلف:

یعقوب حسینی زاده

استاد راهنما:

دکتر ماشاءالله ماشین چی

بهمن ماه ۱۳۹۳

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: یعقوب حسینی زاده	امضاء:
استاد راهنما: دکتر ماشاءالله ماشین چی	امضاء:
داور اول : دکتر اسفندیار اسلامی	امضاء:
داور دوم: دکتر آرشام برومند سعید	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده:	امضاء:
معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:	امضاء:

تقدیم به:

آستان آسمان دستان پر از ماه پدرم

به زلال چشمه چشمان چشم به راه مادرم

و عزیزانی که در صحیفه دلهاشان

چیزی جز مهر ندیدم...

تشکر و قدردانی

سپاس، بي نهايت هستي را كه حكمتش جهان مشمول و رحمتش بي پايان. سرآغاز فصل آموختنم، با نام و ياد تو بود، اي محبوب ترين معبود و پايانش را به اميد شروعي دوباره، با نامت آغاز مي كنم. حمد و سپاس بيكران از آن توست، كه لحظه لحظه هاي زيستن و آموختنم، هر آنچه از علم و اراده و عمل كه در وجودم وديعه نهادي و ياري همراهانم، همه از لطف و مهرباني بي دريغ تو سرشار است. چه زيباست ياري جستن از تو در تمامي كارها، كه بهترين ياري دهندگاني. چه با شكوه است توكل به تو، كه كفايت مي كني بندگانت را. آرامشي ابديست، آنگاه كه با ياد تو دلهايمان آرام مي گيرد.

خدايا:

ای که به غیر تو بی نیاز شوند و از تو بی نیاز نباشند

به تو رو آورند و از تو رو بر نتابند

از سر شور و شوق آهنگ تو کرده ام و با دلی مطمئن به تو امید بسته ام

تمنای من از تو هر چند زیاده باشد در برابر غنای تو ناچیز و اندک است

که دست عطایت از هر دستی گشاده تر و برتر است...

از اين جهت بر خود مي دانم از حمایت های بی دریغ خانواده ام که همواره در طول دوران تحصیل حامی و مشوق من بوده اند تشکر و قدردانی نمایم. هم چنین از راهنمایی‌های استاد گرانقدر و فرهیخته ام جناب آقاي دکتر ماشاءالله ماشین چی به عنوان استاد راهنما سپاسگزارم.

چکیده

این پایان نامه در چهار فصل تدوین شده است. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی از استلزام فازی [۱] ، نقیض فازی [۲] ، $K-$ عملگرها وخواص آنها را آورده ایم که در بحث های بعدی به دفعات مورد استفاده قرار می‌گیرند. در فصل دوم $D-$ استلزام فازی بازه ای-مقدار [۳] را بررسی می‌کنیم و در فصل سوم استلزام های فازی بازه ای-مقدار [۴] تولید شده از $K-$ عملگرها [۵] و استلزام های فازی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم روابط بین اصول استلزام فازی بازه ای-مقدار را بررسی می‌کنیم. بعلاوه در آخر این فصل تعدادی مسئله باز مطرح شده است.

کلید واژگان: استلزام فازی، استلزام های فازی بازه ای-مقدار، خودریختی های بازه ای [۶] ، $D-$ استلزام، $K-$ عملگر.

---

[۱] $Fuzzy\ Implication$

[۲] $Fuzzy\ Negation$

[۳] $Interval-valued\ Fuzzy\ D-Implication$

[۴] $Interval-valued\ Fuzzy\ Implications$

[۵] $K-operators$

[۶] $Interval\ Automorphisms$

مقدمه

واژه فازی [۷] در فرهنگ آکسفورد به معنای مبهم، گنگ، نادقیق، گیج، مغشوش، درهم و نامشخص آمده است. معانی دیگر مثل کرکی، درهم و برهم، پرزدار و نامعلوم از جمله معانی دیگر ذکر شده برای واژه فازی می باشد.

لطفی زاده استاد دانشگاه برکلی و مبدع مجموعه های فازی در پاسخ به این سوال که چرا کلمه فازی را برای این نظریه انتخاب کرده است، می‌گوید: من کلمه فازی را انتخاب کردم، چون احساس می‌کردم که این کلمه با بیشترین دقت آنچه را در این نظریه آمده است، توصیف می‌کند. من می‌توانستم کلمه محترمانه تری را که کمتر عوامانه باشد انتخاب کنم. مثلا در مورد کلمه های نرم، غیر دقیق، کدر و درهم و برهم و یا کشسان فکر کردم اما هیچکدام اینها آنچه را در ذهن من بود به دقت توصیف نمی‌کردند. پس در نهایت فازی را در این جایگاه قرار دادم [7].

از زمان اندیشیدن، انسان همواره واژه هایی چون خوب [۸]، بد [۹]، قوی [۱۰]، زیبا [۱۱] و جوان [۱۲] را بر زبان آورده است. برای نمونه واژه احمد جوان است را در نظر بگیرید. مشخص است که نمی‌توان مرز مشخصی برای جوان بودن در نظر گرفت. اما در بسیاری از علوم نظیر ریاضیات و منطق ریاضی فرض بر این است که مرزهای دقیقا تعریف شده ای وجود دارد مانند همه یا هیچ، مرد یا زن، سفید یا سیاه که در این علوم هر گزاره ای درست است یا نادرست.

---

[۷] $Fuzzy$

[۸] $Good$

[۹] Bad

[۱۰] $Strong$

[۱۱] $Beautiful$

[۱۲] $Young$

ریشه این نوع تفکر مبتنی بر نظام دو ارزشی سیاه وسفید(صفر و یک) به زمان ارسطو برمی‌گردد. منطق ارسطو اساس ریاضیات کلاسیک را تشکیل می‌دهد. بر اساس این منطق همه چیز تنها مشمول یک قاعده ثابت می‌شود که به موجب آن یک چیز درست است یا نادرست [۴].

نظریه مجموعه های فازی از قدیمی ترین و گسترده ترین مولفه گزارش شده از محاسبات نرم امروزی است. که با برنامه های کاربردی در سیستم های کنترل، تصمیم گیری، سیستم های هوشمند، الگو شناسی و... به طراحی و پردازش اطلاعات قابل انعطاف سیستم می پردازد. ریاضیات بازه ای یک نظریه ریاضی می‌باشد که هدف آن نمایش داده ها و پارامترهای ورودی نامشخص و کنترل اتوماتیک و دقیق اشتباهاتی که در محاسبات عددی بوجود می‌آید می‌باشد [22].

در نظریه مجموعه های فازی توابع استلزام معمولاً از $t-$ نرم ها [۱۳] و $t-$ هم نرم [۱۴] ها در چندین شکل مانند $S-$ استلزام ها [۱۵]، $R-$ استلزام ها [۱۶]، $QL-$ استلزام ها [۱۷] و $D-$ استلزام ها [۱۸] بدست می‌آیند. اهمیت استلزام های فازی تنها بخاطر استفاده از قانون "اگر... آنگاه " نیست بلکه به دلیل استفاده از استلزام های فازی در انجام استنتاج [۱۹] در استدلال تقریبی [۲۰] و کنترل فازی است که این دلیل اصلی برای جستجوی بیشتر مدل های مختلف برای نمایش این نوع از عملگرها است [22].

---

[۱۳] $t-norms$

[۱۴] $t-conorms$

[۱۵] $S-implications$

[۱۶] $R-implications$

[۱۷] $QL-implications$

[۱۸] $D-implications$

[۱۹] $Inferences$

[۲۰] $Approximate\ Reasoning$

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل که تحت عنوان پیشنیازها آمده است به بیان مفاهیم اولیه استلزام های فازی، نمایش بازه ای، نقیض فازی، نقیض استلزام های فازی بازه ای-مقدار، $K-$ عملگرها وبرخی خواص آنها می‌پردازیم.

۲.۱ معرفی استلزام های فازی

عملگر استلزام که با نماد $\longrightarrow$ نشان داده می‌شود، نقش مهمی را در منطق دو ارزشی ایفا می‌کند در مرحله اول از استلزام کلاسیک می‌توان سایر رابط های منطقی پایه در منطق دودویی را بدست آورد، مانند عملگرهای دوتایی "و ($\wedge$)"، "یا ($\vee$)" و "عملگر نقیض ($\neg$)" در مرحله دوم عملگر استلزام حالت مرکزی را در مکانیسم استنباط هر منطقی برقرار می‌کند، شبیه قاعده رفع مقدم [۱] (قیاس استثنا یی) و قاعده رفع تالی [۲] و قیاس فرضی [۳] در منطق کلاسیک. ارزش درستی برای استلزام کلاسیک بصورت جدول ۱ است:

جدول ۱ . جدول ارزش درستی برای استلزام کلاسیک

p	q	$p \longrightarrow q$
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۱

[۱] $Modes\ Ponens$

[۲] $Modes\ Tollens$

[۳] $Hypothetical\ Syllogism$

استلزام فازی تعمیمی از تابع $\longrightarrow$ درمنطق کلاسیک به منطق فازی است، همانگونه که یک نرم مثلثی [۴] و یک هم‌نرم مثلثی [۵] به ترتیب تعمیمی از ربط و فصل کلاسیک اند [2].

۳.۱ تعاریف و مثال ها

در مبحث استلزام می‌توانیم چندین تعریف از استلزام فازی داشته باشیم. در اینجا ما تعریف زیر را برای استلزام فازی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. [*18*]: *تابع* $I : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *یک استلزام فازی است اگر در شرایط مرزی زیر صدق نماید.*

$$I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1 \ , \ I(1,0) = 0$$

مثال ۲.۳.۱. [*24*]: *تابع* I *را بصورت زیر تعریف کنید:*

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad x \leq y \\ 1 - (1 - y + xy)(x - y) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

آنگاه I *یک استلزام فازی است.*

۴.۱ نقیض فازی

تعریف ۱.۴.۱. [*9*]،[*2*]: *تابع* N *با ضابطه* $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *را نقیض فازی گوییم، اگر نزولی باشد و در رابطه زیر صدق کند:*

$$N(0) = 1, N(1) = 0$$

---

[۴] $Triangular\ norm$

[۵] $Triangular\ conorm$

بعلاوه اگر N پیچشی [1] باشد، یعنی$x = N(N(x))$ برای هر$x \in [0,1]$، آنگاه N را نقیض فازی قوی گوییم.

مثال ۲.۴.۱. [16]،[2]: *N_λ با ضابطه $\lambda \in (-1,\infty)$, $N_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}$ یک نقیض فازی است که آن را نقیض سوگینو گویند.*

مثال ۳.۴.۱. [16]،[2]: *تابع N_0 با ضابطه $N_0(x) = 1 - x$ و تابع N_1 با ضابطه $N_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ نقیض فازی قوی هستند.*

تعریف ۴.۴.۱. [9]،[2]: *نقیض فازی N را اکید گوییم، اگر پیوسته و نزولی اکید باشد.*

مثال ۵.۴.۱. [16]،[2]: *N با ضابطه $N(x) = 1 - x^2$ و N با ضابطه $N(x) = 1 - \sqrt{x}$ نقیض های فازی اکیدهستند.*

تعریف ۶.۴.۱. [9]،[2]: *N_s را نقیض فازی قوی استاندارد گوییم، اگر*

$$N_s(x) = 1 - x \quad ,\forall x \in [0,1]$$

تذکر ۷.۴.۱. *برای مطالعه و دیدن خواص بیشتر می توان به بخش ۲.۱ مرجع [2] مراجعه کرد.*

۵.۱ اصول استلزام فازی

برای یک استلزام فازی هشت اصل مهم زیر را بیان می‌کنیم.

تذکر ۱.۵.۱. [9]: *فرض کنید تابع$I : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ یک استلزام فازی باشد،*

۱ : اگر I در رابطه زیر صدق کند

$$I(1,x) = x \quad ,\forall x \in [0,1]$$

[1] $Involutive$

گوییم، I در اصل عضو خنثی [۱] صدق می‌کند.

۲: اگر I در رابطه زیر صدق کند

$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z)) \quad , \forall (x, y, z) \in [0, 1]^3$$

گوییم، I در اصل تعویض [۲] صدق می‌کند.

۳: اگر I در رابطه زیر صدق کند

$$I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y \quad , \forall (x, y) \in [0, 1]^2$$

گوییم، I در اصل ترتیب [۳] صدق می‌کند.

۴: اگر برای I نقیض فازی N وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$N(x) = I(x, 0) \quad , \forall x \in [0, 1]$$

گوییم، I در اصل نقیض فازی قوی [۴] صدق می‌کند.

۵: اگر I در رابطه زیر صدق کند

$$I(x, y) \geq y \quad , \forall (x, y) \in [0, 1]^2$$

[۱] *Neutrality of Truth*

[۲] *Exchange Principle*

[۳] *Ordering Principle*

[۴] *Strong Fuzzy Negation Principle*

گوییم، I در اصل نتیجه مرزی [۵] صدق می‌کند.

۶: اگر I در رابطه زیر صدق کند

$$I(x,x) = ۱ \quad , \forall x \in [۰, ۱]$$

گوییم، I در اصل همانی [۶] صدق می‌کند.

۷: اگر برای I نقیض فازی N وجود داشته باشد که I در رابطه زیر صدق کند

$$I(x,y) = I(N(y), N(x)) \quad , \forall (x,y) \in [۰, ۱]^۲$$

گوییم، I در اصل عکس نقیض صدق می‌کند.

۸: استلزام فازی I را پیوسته [۷] گوییم، اگر در هر دو مولفه (x,y) پیوسته باشد.

مثال ۲.۵.۱. [16]: تابع I را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$I(x,y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x \leq y \\ ۱ - (۱ - y + xy)(x - y) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که تابع I اولاً یک استلزام فازی است و ثانیاً در شرط ۱ و ۸ − ۳ تذکر ۱.۵.۱ صدق می‌کند، زیرا که برای هر

$x, y \in [۰, ۱]$ داریم:

$$I(۱, ۱) = I(۰, ۱) = I(۰, ۰) = ۱ \;,\; I(۱, ۰) = ۰$$

---

[۵] *Consequent Boundary*

[۶] *Identity*

[۷] *Continuity*

بنابراین I یک استلزام فازی است. حال داریم:

$$I(۱, x) = x$$

$$I(x, y) = ۱ \iff x \leq y$$

$$N(x) = I(x, ۰) = ۱ - x$$

$$I(x, y) \geq y$$

$$I(x, x) = ۱$$

$$I(۱ - y, ۱ - x) = I(x, y)$$

و همچنین با توجه به ضابطه تابع واضح است که I یک تابع پیوسته است.

بنابراین I در شرایط ۱ و ۸ − ۳ صدق می‌کند.

مثال ۳.۵.۱. [16]: تابع I را با ضابطه زیر تعریف کنید

$$I(x, y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x < ۱ \\ y & \text{اگر} \quad x = ۱ \end{cases}$$

نشان می‌دهیم که I اولاً یک استلزام فازی است و ثانیاً در شرط ۲ از تذکر ۱.۵.۱ صدق می‌کند، یعنی

$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$$

داریم:

$$I(۱, ۱) = I(۰, ۱) = I(۰, ۰) = ۱ \;,\; I(۱, ۰) = ۰$$

بنابراین I یک استلزام فازی است. حال داریم:

$$I(y,z)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad y<۱ \\ z & \text{اگر} \quad y=۱ \end{cases}$$

و

$$I(x,I(y,z))=\begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x<۱, y<۱ \\ I(y,z) & \text{اگر} \quad y=۱, x=۱ \end{cases} \tag{۱.۱}$$

و همچنین داریم:

$$I(x,z)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x<۱ \\ z & \text{اگر} \quad x=۱ \end{cases}$$

$$I(y,I(x,z))=\begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x<۱, y<۱ \\ I(x,z) & \text{اگر} \quad y=۱, x=۱ \end{cases} \tag{۲.۱}$$

لذا از (۱.۱) و (۲.۱) داریم:

$$I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))$$

۶.۱ نمایش های بازه ای

تعریف ۱.۶.۱. [12]: *فرض کنید $\leqslant$ یک رابطه روی مجموعه U باشد در این صورت گوییم $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزئی است هرگاه:*

۱ : (خاصیت انعکاسی) *برای هر* $x\in U$ داشته باشیم $x\leqslant x$.

۲ : (خاصیت تعدی) *برای هر* $x,y,z\in U$ ، $x\leqslant y$, $y\leqslant z$ نتیجه دهد $x\leqslant z$.

۳ : (*خاصیت پادمتقارن*) *برای هر* $x, y \in U$ ، $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ *نتیجه دهد* $x = y$.

و همچنین فرض کنید U یک مجموعه و $\leqslant$ *یک رابطه ترتیب جزئی روی U باشد در این صورت* $(U, \leqslant)$ *را یک مجموعه جزئاً مرتب می‌نامیم.*

تعریف ۲.۶.۱. [1]: *مجموعه جزئاً مرتب* $(U, \leqslant)$ *را یک مشبکه* [۱] *می‌نامیم هرگاه هر دو عنصر آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین در* U *باشد.*

تعریف ۳.۶.۱. [12]: *مشبکه* $(U, \leqslant)$ *را کامل می‌نامیم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای سوپریمم و اینفیمم باشد.*

مثال ۴.۶.۱. [1]: *بازه بسته* $[0, 1]$ *و رابطه* $\leqslant$ *معمولی بر اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. آنگاه* $([0, 1], \leqslant)$ *یک مشبکه کامل است.*

مجموعه بازه ای-مقدار $\mathbb{U}$ را به صورت $\mathbb{U} = \{[a, b] | 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$ تعریف می‌کنیم که هر عضو از مجموعه $\mathbb{U}$ مانند $\mathbf{x}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{U} \quad , \quad \underline{x}, \overline{x} \in U_0$$

که درآن $\underline{x}$ و $\overline{x}$ بترتیب نقاط ابتدا و انتهای بازه می‌باشند. $\mathbf{x}$ را به صورت بازه بسته در نظر گرفته ایم زیرا که مقدار واقعی ممکن است روی هر کدام از نقاط درون یا ابتدا وانتهای بازه قرار بگیرد به همین خاطر بازه ها به صورت بسته در نظر گرفته می‌شوند. علاوه بر موارد فوق گاهی اوقات الزامی برای بدست آوردن یک مقدار دقیق نیست وفقط بدست آوردن محدوده ای برای جواب کافی است. در این حالت نیز از کمیت های بازه ای استفاده می‌شود [23]. لازم به ذکر است که در این پایان نامه بازه $[0, 1]$ را با U_0 نمایش می‌دهیم و منظور ما از $\mathbb{U}$ همان مجموعه بازه ای-مقدار می‌باشد.

---

[۱] *Lattice*

توابع تصویر [۲] $l, r : \mathbb{U} \longrightarrow U_\circ$ را با ضابطه های زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(\mathbf{x}) = \overline{x} \text{ ، } l(\mathbf{x}) = \underline{x}$$

برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ و $\underline{x}, \overline{x} \in U_\circ$.

ترتیب جزئی که روی مجموعه بازه ای-مقدار $\mathbb{U}$ برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ مفروض است به صورت زیر می‌باشد.

۱ : ترتیب حاصل ضربی [۳] : $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \Longleftrightarrow \underline{x} \leqslant \underline{y}\ ,\ \overline{x} \leqslant \overline{y}$

۲ : ترتیب شمول [۴]: $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \Longleftrightarrow \underline{x} \geqslant \underline{y}\ ,\ \overline{x} \leqslant \overline{y}$

گزاره ۱.۶.۵. [*18*]: *فرض کنید $\mathbb{U}$ یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه ترتیب جزئی معرفی شده در تعریف ۱.۶.۱ روی $\mathbb{U}$ باشد در این صورت $(\mathbb{U}, \leqslant)$ یک مشبکه کامل است.*

تعریف ۱.۶.۶. [*23*]: *هر عدد حقیقی $x \in U_\circ$ را می‌توان به صورت بازه $x = [x, x]$ نمایش داد که آن را یک بازه تباهیده [۵] می‌نامیم و با $\mathbf{x}_\mathbb{U}$ نمایش می‌دهیم یعنی اینکه $\mathbf{x}_\mathbb{U} = [x, x]$.*

تعریف ۱.۶.۷. [*23*]: *فرض کنید $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ ، گوییم $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ اگرو تنها اگر $\underline{x} = \underline{y}$ و $\overline{x} = \overline{y}$.*

تعریف ۱.۶.۸. [*23*]: *فرض کنید $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ ، گوییم $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ اگر وتنها اگر $\underline{x} \leqslant \underline{y}$ و $\overline{x} \leqslant \overline{y}$.*

تعریف ۱.۶.۹. [*23*]: *فرض کنید $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ ، گوییم $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$ اگر وتنها اگر $\underline{x} \geqslant \underline{y}$ و $\overline{x} \leqslant \overline{y}$.*

---

[۲] *Projection − functions*

[۳] *Product Order*

[۴] *Inclusion Order*

[۵] *Degenerate*