دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

طبقه‌بندی H–ماتریس‌های تعمیم‌یافته و محکی تکراری برای شناسایی آنها

مهدی حمزه نژاد

استاد راهنما:

دکتر مجید ادیب

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

$H-$ماتریس‌ها در روش‌های تکراری حل دستگاه‌ها به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند و در زمینه‌های بسیاری از جمله اقتصاد، نقش کاربردی از خود نشان داده‌اند. شناخت ماتریس‌هایی که جزو این دسته از ماتریس‌ها قرار می‌گیرند و راهی که بتوان این دسته از ماتریس‌ها را شناسایی کرد، مساله‌ای است که در این پایان‌نامه مورد توجه قرار داده‌ایم. در این پایان‌نامه به کمک برنامه‌ریزی خطی الگوریتمی برای تشخیص $H-$ماتریس بودن یا نبودن یک ماتریس ارایه می‌کنیم و زیردسته‌های جدیدی از $H-$ماتریس‌ها را معرفی می‌کنیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

تا کنون تعداد قابل توجهی از زیردسته‌های $H-$ماتریس‌ها شناسایی شده‌اند. ماتریس‌های اکیدا قطری غالب جزو این دسته از ماتریس‌ها می‌باشند. در سال ۱۹۳۷ استروفسکی به معرفی دسته‌ای خاص از ماتریس‌ها به نام ماتریس‌های استروفسکی پرداخت[۸، ۶]. این ماتریس‌ها زیردسته $H-$ماتریس‌ها هستند[۲]. ماتریس‌هایی با نام $S-SDD$ [۵] که ماتریس‌های SDD و استروفسکی را در بر می‌گیرند زیردسته دیگری از $H-$ماتریس‌ها هستند[۲]. در سال ۲۰۰۵ ال.ست کوویچ و همکارانش تعدادی از محک‌ها و زیر دسته‌های $H-$ماتریس‌ها را معرفی [۵] و در سال ۲۰۰۶ دسته‌بندی جامع تری از زیر دسته‌های شناخته شده را ارایه کردند [۸]. در میان این زیردسته‌ها، ماتریس‌های نکراسف و گودکف [۲] نیز جای دارند. در سال ۲۰۰۹ ال.ست کوویچ و همکارانش ماتریس‌هایی با نام $S-$نکراسف و $S-$گودکف را نیز معرفی کردند [۲] که ماتریس‌های $S-$گودکف تقریبا تمام زیردسته‌های مذکور را در بر می‌گیرد. در این پایان‌نامه تلاش کرده‌ایم اطلاعات جامعی از $H-$ماتریس‌ها را جمع آوری کنیم. این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان تعاریف مورد نیاز و بررسی $H-$ماتریس‌ها با توجه به ماتریس مقایسه آنها می‌پردازیم. در فصل دوم زیر دسته‌های معروف $H-$ماتریس‌ها و محک‌هایی برای شناسایی آنها را ارایه می‌کنیم و در پایان این فصل حاصل کارهای پژوهشی خود را بیان می‌کنیم. و در انتها، فصل سوم را به معرفی تعدادی از الگوریتم‌های شناسایی $H-$ماتریس‌ها اختصاص داده‌ایم.

فصل ۱

دسته بندی H–ماتریس‌ها

۱.۱ تعاریف و اصطلاحات

برای تعریف H–ماتریس‌ها به تعاریف و مقدماتی نیازمندیم که ابتدا به بیان آنها پرداخته و سپس با استفاده از آنها H–ماتریس را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ [۱]: ماتریس حقیقی مربعی $A_{n\times n}$ را یک Z–ماتریس می‌نامیم اگر

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j.$$

تعریف ۲.۱ [۱]: فرض کنیم $A \in C^{n\times n}$ باشد، ماتریس مقایسه ماتریس A را با $\mu(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mu(A) = \begin{cases} -|a_{ij}|, & i \neq j, \\ |a_{ij}|, & i = j. \end{cases}$$

درواقع ماتریس مقایسه $\mu(A)$ را می‌توان اینگونه نشان داد:

$$\mu(A) = ۲|D_A| - |A|,$$

که در آن D یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلیش همان درایه‌های قطر اصلی ماتریس A هستند $(D(A) = diag(a_{ii}))$.

با توجه به تعریف Z-ماتریس‌ها، واضح است که $\mu(A)$ یک Z-ماتریس است.(زیرا $\mu(A)$ یک ماتریس حقیقی است که در شرایط تعریف ۱.۱ صدق می‌کند.)

تعریف ۳.۱ [۱]: مجموعه ماتریس‌های هم‌پیمانه مربوط به A را با $\Omega(A)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(A) = \{B \in C^{n\times n} : \mu(A) = \mu(B)\}.$$

به عنوان مثال $\mu(A) \in \Omega(A)$ و $A \in \Omega(A)$ زیرا

$$\mu(A) \in C^{n\times n}, \quad \mu(\mu(A)) = \mu(A).$$

تعریف ۴.۱ [۱]: بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را شعاع طیفی این ماتریس می‌نامیم و آن را با $\rho(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱ [۱]: $A = M - N$ را یک تفکیک از ماتریس A می‌نامیم که در آن M یک ماتریس نامنفرد است. اگر $M^{-۱} \geq ۰$ و $N \geq ۰$، این تفکیک را منظم می‌نامیم.

تعریف ۶.۱ [۱]: ماتریس $A_{n\times n}$ را یک ماتریس نامنفی می‌نامیم هرگاه تمام درایه‌های آن نامنفی باشند، یعنی:

$$a_{ij} \geq ۰, \quad i,j = ۱,۲,...,n$$

تعریف ۷.۱ [۱]: فرض کنیم $A = D_A - (-E - F)$ یک تفکیک ماتریس A باشد، در اینصورت $J(A) = -D_A^{-1}(E + F)$ را ماتریس تکرار ژاکوبی ماتریس A می‌نامیم.

در این تفکیک، F و E به ترتیب قسمت‌های اکیدا بالامثلثی واکیدا پایین‌مثلثی ماتریس A می‌باشند.

مثال ۱.۱ : ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس را با توجه به تعریف قبل تفکیک می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}),$$

در نتیجه داریم:

$$J(A) = -\begin{pmatrix} ۰.۵ & ۰ \\ ۰ & ۰.۵ \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}).$$

با توجه به مفاهیم گفته شده، با قرار دادن $\tau = \max_i \{a_{ii}\}$، Z–ماتریس A می‌تواند به صورت $A = \tau I - C$ بیان شود که در آن C یک ماتریس نامنفی است.

تعریف ۸.۱ [۱]: ماتریس A یک M–ماتریس نامیده می‌شود اگر:

$$A = sI - B, \quad B \geq ۰, \quad s \geq \rho(B),$$

که در آن $\rho(B)$ شعاع طیفی ماتریس B است.

مثال ۲.۱ : ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم. توجه کنید که داریم:

$$A = ۳I - \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \geq ۰, \quad \rho(B) = ۱ \leq ۳,$$

ملاحظه می کنیم که شرایط تعریف ٦.۱ برقرار است. بنابراین ماتریس A یک M–ماتریس است.

برای M–ماتریس تعاریف معادل دیگری هم وجود دارند که در اثبات بعضی از قضایایی که بیان می‌کنیم، کاربرد دارند. در ادامه برخی از آنها را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۹.۱ [۱]: ماتریس A یک H–ماتریس نامیده می‌شود اگر ماتریس مقایسه آن یعنی $\mu(A)$ ، یک M–ماتریس باشد.

مثال ۳.۱ : ماتریس‌های زیر مثال‌هایی از H–ماتریس‌ها می‌باشند:

$$A=\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & -۲ \end{pmatrix},$$

با توجه به اهمیت ماتریس‌های اکیدا قطری غالب و نقش مهم آنها در زمینه H–ماتریس‌ها، تعریف این ماتریس را یاد آوری می‌کنیم:

تعریف ۱۰.۱ [۵]: ماتریس A را اکیدا قطری غالب یا SDD[۱] گوییم اگر:

$$|a_{ii}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

مثال ۴.۱ : ماتریس‌های زیر نمونه‌هایی از ماتریس‌های SDD هستند:

$$A=\begin{pmatrix} ۶ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۸ \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & c \end{pmatrix}, \quad a, c \neq ۰.$$

تعریف ۱۱.۱ [۱]: ماتریس A را اکیدا قطری غالب تعمیم‌یافته یا $GSDD$[۲] می‌گوییم اگر یک ماتریس قطری مثبت $D = diag(d_i)$ موجود باشد به طوری‌که AD اکیداقطری غالب باشد.

[۱] Strictly diagonally dominant

[۲] Generalized strictly diagonally dominant

تعریف ۱۲.۱ [۱]: ماتریس A یک M–ماتریس نامیده می‌شود اگر برای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$ و $A^{-1} \geq 0$ باشد.

تعریف ۱۳.۱ [۱]: ماتریس A یک M–ماتریس نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$ و برای هر $i = j$، $a_{ii} > 0$.

۲) ماتریس A، $GSDD$ باشد.

در طول این فصل و فصل‌های بعد، از عبارت‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$N = \{1, 2, ..., n\},$$

$$S \subseteq N, \quad \bar{S} = N - S,$$

$$r_i(A) = \sum_{k \in N, \quad k \neq i} |a_{ik}|,$$
$$r_i^S(A) = \sum_{k \in S \ , k \neq i} |a_{ik}|.$$

$r_i(A)$، در واقع مجموع قدرمطلق عناصر سطر i–ام، به جز $|a_{ii}|$ است و $r_i^S(A)$ مجموع $|a_{ik}|$هایی است که k عضو مجموعه S باشد.

به وضوح برای هر زیرمجموعه دلخواه $S \in N$ و هر اندیس i داریم:

$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A).$$

تعریف ۱۴.۱ [۴]: ماتریس $A \in C^{n \times n}$، $n \geq 2$، را ماتریس $S-SDD$ [۳] گوییم اگر زیرمجموعه ناتهی $S \subset N$ موجود باشد به طوری‌که دو شرط زیر برقرار باشند:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A), \qquad \forall i \in S, \tag{1.1}$$

$$(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A), \qquad \forall i \in S, \quad j \in \bar{S}. \tag{1.2}$$

[۳] S-Strictly diagonally dominant

تعریف ۱۵.۱ [۴]: ماتریس $A \in C^{n\times n}$ ، ۲ $\geq n$، را یک ماتریس استروفسکی[۴] می‌نامیم اگر:

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i(A)r_j(A), \qquad \forall i,j \in N, \qquad i \neq j. \tag{۱.۳}$$

$h_i(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|.$$

به عنوان مثال داریم:

$$h_1(A) = \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|.$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$h_1^S(A) = r_1^S(A),$$

$$h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\frac{h_j^S(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1, j\in S}^{n} |a_{ij}|.$$

به وضوح برای زیرمجموعه قراردادی S و برای هر اندیس $i \in N$، داریم:

$$h_i(A) = h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A).$$

تعریف ۱۶.۱ [۴]: ماتریس $A = [a_{ij}] \in C^{n\times n}$ ، ۲ $\geq n$، را یک ماتریس نکراسف[۵] گوییم هرگاه برای هر $i \in N$ داشته باشیم:

$$|a_{ii}| > h_i(A).$$

[۴] Ostrowski

[۵] Nekrasov

تعریف ۱۷.۱ [۴]: اگر ماتریس جایگشت P موجود باشد به گونه‌ای که PAP^T یک ماتریس نکراسف باشد، آنگاه A را یک ماتریس گودکف[۶] می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۱ [۴]: ماتریس $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$ ، $n\geq ۲$، را در نظر بگیرید. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی $S\subset N$ ، ماتریس A را $S-$ نکراسف[۷] گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$|a_{ii}|>h_i^S(A),\quad \forall i\in S,$$

$$|a_{jj}|>h_j^{\bar{S}}(A),\quad \forall j\in \bar{S},$$

$$(|a_{ii}|-h_i^S(A))(|a_{jj}|-h_j^{\bar{S}}(A))>h_i^{\bar{S}}(A)h_j^S(A),\quad \forall i\in S,\quad j\in\bar{S}.$$

تعریف ۱۹.۱ [۴]: ماتریس $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$ ، $n\geq ۲$، را در نظر بگیرید. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی $S\subset N$ ، ماتریس A را $S-$گودکف[۸] گوییم اگر یک ماتریس جایگشت P موجود باشد به‌طوری‌که PAP^T یک ماتریس $S-$نکراسف باشد.

در فصل ۲ خواهیم دید که ماتریس‌های معرفی شده بالا، به مجموعه $H-$ماتریس‌ها تعلق دارند.
در این فصل می‌خواهیم به دسته‌بندی $H-$ماتریس‌ها با توجه به ماتریس مقایسه و ماتریس‌های هم‌پیمانه آنها بپردازیم.
البته دسته‌بندی $H-$ماتریس‌ها از دیدگاه‌های متفاوت قابل ملاحظه است. یکی از این دیدگاه‌ها وجود تفاوت و یا تشابه بین ماتریس‌های مقایسه $H-$ماتریس‌ها و همچنین ماتریس‌های هم‌پیمانه آنهاست.

[۶] Gudkov
[۷] S-Nekrasov
[۸] S-Gudkov

برو[۹] و همکارانش در سال ۲۰۰۸، H−ماتریس‌ها را از این دیدگاه بررسی کردند. مثال زیر را برای روشن‌تر شدن مطلب بیان می‌کنیم.

مثال ۵.۱ : ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & -۲ \end{pmatrix}$ یک ماتریس نامنفرد است، در حالی که ماتریس مقایسه‌اش $\mu(A) = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}$، یک M−ماتریس منفرد است. بنابراین A یک H−ماتریس نامنفرد با ماتریس مقایسه منفرد است.

مثال ۶.۱ : ماتریس $B = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix}$ یک H−ماتریس با ماتریس مقایسه نامنفرد است.

در ارتباط با M−ماتریس‌ها و ماتریس‌های اکیدا قطری غالب داریم:

قضیه ۱.۱ [۱]: $\mu(A)$ یک M−ماتریس است اگروفقط‌اگر A اکیدا قطری غالب تعمیم‌یافته باشد.

برهان : فرض کنیم که $\mu(A)$ یک M−ماتریس باشد. بنابراین در شرایط تعریف ۱۲.۱ صدق می‌کند به خصوص با توجه به شرط ۲ تعریف، $\mu(A)$ یک ماتریس $GSDD$ است. بنابراین ماتریس قطری D موجود است به طوری‌که برای هر سطر i داریم:

$$|a_{ii}|d_i > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|d_j, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

و این یعنی ماتریس A یک ماتریس $GSDD$ است.

بعکس: فرض کنیم ماتریس A اکیدا قطری غالب تعمیم‌یافته باشد. بنابراین ماتریس قطری D موجود است به طوری‌که برای هر سطر i داریم:

$$|a_{ii}|d_i > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|d_j, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

[۹] Bru

از طرفی رابطه فوق برای $\mu(A)$ نیز برقرار است و همچنین بنا به تعریف ماتریس مقایسه $\mu(A)$، برای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$ و برای هر $i = j$، $a_{ii} \geq 0$ است و چون $\mu(A)$ یک ماتریس $GSDD$ است لذا برای هر $i = j$، $a_{ii} > 0$ و در نتیجه $\mu(A)$ یک M–ماتریس است. $\square$

بنابراین با توجه به تعریف H–ماتریس و قضیه فوق، A یک H–ماتریس است اگروفقط اگر اکیدا قطری غالب تعمیم‌یافته باشد.

مطلب مذکور که نقش آن در فصل‌های بعد مشخص خواهد شد، به عنوان قضیه‌ای اساسی در بررسی H–ماتریس‌ها است و در فصل ۲ آن را بیان می‌کنیم. در پایان این بخش به بیان صورت قضیه پرون—فروبنیوس[10] می‌پردازیم. از این قضیه در اثبات یکی از قضایای بخش بعد استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۱ [۱]: فرض کنید B یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی نامنفی باشد. در نتیجه گزاره‌های زیر را داریم:

۱) B یک مقدار ویژه نامنفی دارد. شعاع طیفی B، تمام مقادیر ویژه مقدار ویژه‌های دیگر B را تعیین می‌کند.

۲) اگر درایه‌های B اکیدا مثبت باشند آنگاه شعاع طیفی B، $\rho(B)$، یک مقدار ویژه مثبت است و بردار ویژه آن، مقادیر اکیدا مثبت دارد.

۳) اگر B یک بردار ویژه v با درایه‌های اکیدا مثبت داشته باشد، آنگاه مقدار ویژه منطبق با آن، همان $\rho(B)$ است.

در بخش بعد به بررسی ویژگی‌های H–ماتریس‌ها می‌پردازیم.

[10] Perron-Ferobenius

۲.۱ مشخص‌سازی H–ماتریس‌های تعمیم‌یافته

قضیه ۳.۱ [۱]: فرض کنیم $A \in C^{n\times n}$ باشد. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) A یک H–ماتریس است.

۲) اگر $B \in C^{n\times n}$ به گونه‌ای باشد که $\mu(B) \geq \mu(A)$، آنگاه B یک H–ماتریس است.

برهان : (۱ $\Longrightarrow$ ۲) با قرار دادن $B = A$ برهان واضح است.

(۲ $\Longrightarrow$ ۱) فرض کنید A یک H–ماتریس باشد، در این‌صورت $\mu(A)$ یک M–ماتریس است. بنابراین داریم:

$$\exists P \geq \circ, \quad s: \quad \mu(A) = sI - P, \quad s \geq \{\rho(P), \quad \max|b_{ii}|\}.$$

اکنون چون $\mu(B)$ یک Z–ماتریس است، داریم:

$$\exists C \geq \circ: \quad \mu(B) = sI - C.$$

زیرا کافی‌است تعریف کنید $C = (c_{ij})$ که در آن:

$$c_{ij} = \begin{cases} |b_{ij}|, & i \neq j, \\ s - |b_{ij}|, & i = j. \end{cases}$$

حال کافی‌است ثابت کنیم که $s \geq \rho(C)$، که در این‌صورت $\mu(B)$ یک M–ماتریس و در نتیجه B یک H–ماتریس خواهد بود. توجه کنید که:

$$\mu(B) \geq \mu(A), \Longrightarrow \quad sI - C \geq sI - P, \Longrightarrow \quad \circ \leq C \leq P.$$

و لذا $\rho(P) \geq \rho(C)$. در نتیجه $s \geq \rho(P) \geq \rho(C)$ و حکم ثابت است. □

لم ۴.۱ [۱]: فرض کنیم A یک Z–ماتریس باشد. A یک M–ماتریس است اگر و فقط‌اگر برای هر ماتریس قطری مثبت D، DA یک M–ماتریس باشد.

برهان : $\Longrightarrow$) چون به ازای هر ماتریس قطری مثبت D، DA یک M–ماتریس است بنابراین برای $D = I$ نیز این موضوع برقرار است. در نتیجه $IA = A$ یک M–ماتریس است.
$\Longleftarrow$) فرض کنیم A یک M–ماتریس باشد، بنابراین در شرایط تعریف ۱۱.۱ صدق می‌کند، یعنی برای هر $i \neq j$، $a_{ij} \leq 0$ و $A^{-1} \geq 0$.
فرض کنیم D یک ماتریس قطری مثبت و دلخواه باشد، بنابراین داریم $(DA)^{-1} = A^{-1}D^{-1} \geq 0$ و همچنین چون درایه‌های ماتریس D مثبت هستند، لذا برای هر $i \neq j$، $(DA)_{ij} \leq 0$ است و بنابراین DA در تعریف ۱۱.۱ صدق می‌کند و در نتیجه یک M–ماتریس است. $\square$

قضیه ۵.۱ [۱]: فرض کنیم $A \in C^{n\times n}$ به گونه‌ای باشد که برای هر i داشته باشیم: $a_{ii} \neq 0$.
در این‌صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:
۱) A یک H–ماتریس است.
۲) $\rho(J_{\mu(A)}) \leq 1$.
۳) برای هر $B \in \Omega(A)$ داریم $\rho(J_B) \leq 1$.

برهان : فرض کنیم $D_{\mu(A)} = diag(\mu(A))$. تفکیک منظم $\mu(A)$، ماتریس ژاکوبی $J_{\mu(A)} = I - D^{-1}_{\mu(A)}\mu(A) \geq 0$ را نتیجه می‌دهد. بنابه لم ۳.۱، A یک H–ماتریس است یا به طور معادل $\mu(A)$ یک M–ماتریس است اگروفقط‌اگر ماتریس $D^{-1}_{\mu(A)}\mu(A) = I - J_{\mu(A)}$ یک M–ماتریس باشد.

توجه کنید که‌با توجه به تعریف M–ماتریس، این مطلب معادل است با $\rho(J_{\mu(A)}) \leq 1$. بنابراین

هم‌ارزی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

(۳ $\Longrightarrow$ ۲): چون برای هر $B \in \Omega(A)$ داریم:

$$\rho(J_B) \leq \rho(|J_B|) = \rho(J_{\mu(A)})$$

و در نتیجه $\rho(J_B) \leq ۱$.

(۲ $\Longrightarrow$ ۳): با قرار دادن $B = \mu(A) \in \Omega(A)$ رابطه اثبات می‌شود. □

تعریف ۲۰.۱ [۶]: ماتریس A را تحویل‌پذیر گوییم، هر گاه یک ماتریس جابه‌جایی P موجود باشد به‌طوری‌که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_۱ & ۰ \\ A_۳ & A_۲ \end{pmatrix},$$

که در آن $A_۱$ و $A_۲$ ماتریس‌های مربعی هستند. ماتریس A را تحویل‌ناپذیر گوییم، اگر تحویل‌پذیر نباشد.

تعریف ۲۱.۱ [۶]: فرم $PAP^T = \begin{pmatrix} A_۱ & ۰ \\ A_۳ & A_۲ \end{pmatrix}$ را حالت نرمال ماتریس A می‌نامیم.

قضیه ۶.۱ [۱]: اگر $A \in C^{n\times n}$ یک H–ماتریس تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه:

$$a_{ii} \neq ۰, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

برهان : تفکیک ماتریس مقایسه $\mu(A)$ را نظر می‌گیریم:

$$\mu(A) = mI - C, \quad C \geq ۰, \quad \rho(C) = \rho \leq m.$$

چون C یک ماتریس نامنفی است، بنا به قضیه پرون–فروبنیوس، یک بردار مثبت u موجود است به‌طوری‌که $C \cdot u = \rho \cdot u$.

بنابراین

$$\mu(A) \cdot u = m \cdot u - C \cdot u = (m - \rho) \cdot u.$$

و لذا برای هر سطر داریم:

$$|a_{ii}| \cdot u_i - \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \cdot u_j = (m - \rho)u_i. \qquad (۱.۴)$$

حال اگر $a_{ii} = ۰$ باشد سطر متناظر صفر خواهد بود و بنابراین A تحویل‌پذیر خواهد بود. لذا $a_{ii} \neq ۰$ و برهان کامل است. □

ازقضیه فوق برای نتایج و مشخص‌سازی‌های زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۷.۱ [۱]: فرض کنیم $A \in C^{n\times n}$ یک ماتریس تحویل‌ناپذیر باشد. A یک H–ماتریس است اگروفقط‌اگر GDD باشد، یعنی یک بردار مثبت d موجود باشد به طوری‌که

$$|a_{ii}|d_i \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|d_j, \qquad (۱.۵)$$

برهان : فرض کنیم A یک H–ماتریس باشد. چون A تحویل‌ناپذیراست، در تساوی ۱.۲ از قضیه قبل صدق می‌کند. بنابراین A، GDD است و داریم: $d = u$.
بعکس چون ماتریس A یک GDD و تحویل‌ناپذیراست لذا برای هر i داریم $a_{ii} \neq ۰$ و بعلاوه بردار مثبت d وجود دارد به طوری‌که رابطه (۱.۳) برقرار است. لذا می‌توانیم ماتریس ژاکوبی $J_{\mu(A)}$ را بسازیم.
نامساوی (۱.۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|d_j}{|a_{ii}|d_i} \leq ۱, \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

و این یعنی شعاع طیفی ماتریس نامنفی تحویل‌ناپذیر $D^{-۱}J_{\mu(A)}D$ توسط ۱ کراندار شده است و به عبارت دیگر $\rho(\mathrm{D}^{-۱}J_{\mu(A)}D \leq ۱$، که در آن $D = diag(d_i)$.

بنابراین:

$$\rho(J_{\mu(A)}) = \rho(D^{-1} J_{\mu(A)} D) \leq 1$$

و با استفاده از قضیه ۵.۱، A یک H–ماتریس است. □

توجه کنید که در اثبات عکس قضیه، شرط تحویل‌ناپذیری فقط برای اطمینان از ناصفر بودن عناصر قطری ماتریس A مورد نیاز است. اکنون می‌توانیم گزاره‌های کلی زیر را نتیجه بگیریم:

گزاره: اگر A یک ماتریس GDD با عناصر قطری غیرصفر باشد آنگاه A یک H–ماتریس است.

حالتی را که ماتریس‌ها تحویل‌پذیر باشند، در نتایج زیر مطالعه خواهیم کرد.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که شکل نرمال ماتریس تحویل‌پذیر A توسط یک ماتریس بلوکی مثلثی $PAP^T = (R_{ij})$ داده می‌شود که در آن $i, j = 1, 2, ..., p$ و P یک ماتریس جایگشت است. هر بلوک قطری مربعی R_{ii}، یا تحویل‌ناپذیراست و یا یک ماتریس صفر 1×1 است.

قضیه ۸.۱ [۱]: فرض کنیم $A \in C^{n\times n}$ یک ماتریس تحویل‌پذیر باشد. آنگاه A یک H–ماتریس است اگروفقط‌اگر در حالت نرمال A، $PAP^T = (R_{ij})$، هر بلوک قطری مربعی یک H–ماتریس باشد.

برهان : فرض کنیم که A یک H–ماتریس است، بنابراین PAP^T نیز H–ماتریس است. لذا به وضوح تمام زیرماتریس‌های اصلیش H–ماتریس هستند و در نتیجه A_{11} و A_{22} نیز H–ماتریسند.

بعکس فرض کنیم A_{11} و A_{22} H–ماتریس هستند. فرم نرمال $\mu(A)$، $P\mu(A)P^T = (S_{ij})$، را از فرم نرمال A، $PAP^T = (R_{ij})$، می‌سازیم. تفکیک $P\mu(A)P^T = mI - C$ را که در آن $C \geq 0$،