وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

منظم‌پذیری آرنزی نگاشت‌های دوخطی کراندار و الحاق دوم یک اشتقاق

توسط:
الهام سادات حسینی

استاد راهنما:
دکتر محمد رمضانپور

استاد مشاور:
دکتر مرتضی ابطحی ایوری

۲۵ شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

منظم‌پذیری آرنزی نگاشت‌های دوخطی کراندار و الحاق دوم یک اشتقاق

توسط:

الهام سادات حسینی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر مرتضی ابطحی ایوری استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی غفاری استاد ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی دانشگاه سمنان (داور اول)

دکترنرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر اسداله فرامرزی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

۲۵ شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

آنان که هر سختی را به جان خریدند تا راهم را هموار سازند، کسانی که همه هستی من از آن هاست و اکنون چه کوتاه لحظه ای است برای ستودن آنها.

تقدیم به اسوه تلاش و رشادت پدرم که از نگاه سبز و آفتابی اش بالیدم، سایه ات بر سرم همواره گسترده باد.

تقدیم به نازنین الهه مهربانی و کوه صبر و بردباری مادرم که از سجده های ایثارش محبت را آموختم، دست این دو فرشته زندگیم را می بوسم.

و تقدیم به قلب پاک و مهربان همسرم که با تپش هایش یار و همراهم بود و وجودش مایه دلگرمی ام در پیمودن راه.

سپاسگزاری

ستایش مخصوص آفریدگاریست که هستی او اول است بی آن که قبل از او اولی باشد و آخر است بی آن که بعد از او آخری باشد و ستایش مخصوص اوست که خود را به ما شناساند و از نعمت بی نهایت شکرش بهره‌ای به ما الهام کرد و از درهای نامتنهای علم به ربوبیتش بر ما گشود.

سپاس پروردگاری را که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخت تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آن‌ها شاخ و برگ گیرم تا بتوانم در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. دو گوهر گرانقدری که بودنشان تاج افتخاریست بر سرم و نامشان دلیلیست بر بودنم، آموزگارانی که زندگی و انسان بودن را برایم معنا کردند.

و سپاس یگانه خالقی را که از روی محبت استاد راهنمایی دلسوز نصیبم ساخت که با کرامتی چون خورشید سرزمین دلم را روشنی بخشد و گلشن سرای علم و دانشم را با راهنمایی‌های بزرگ، نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلندش بارور سازد.

الهام سادات حسینی

چکیده

منظم‌پذیری آرنزی نگاشت‌های دوخطی کراندار و الحاق دوم یک اشتقاق

به وسیله‌ی:
الهام سادات حسینی

مسئله‌ی حائز اهمیت برای یک A -دومدول باناخ X این است که تحت چه شرایطی $D^{**} : A^{**} \longrightarrow X^{***}$ به‌عنوان الحاق دوم اشتقاق $D : A \longrightarrow X^{*}$ خود یک اشتقاق است. در این پایان‌نامه ابتدا به مطالعه‌ی منظم‌پذیری نگاشت‌های دوخطی کراندار و عمل‌های مدولی پرداخته و شرایطی را برای منظم‌پذیری آن‌ها فراهم می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم در صورتی که A همانی تقریبی راست کراندار داشته باشد، عمل مدولی راست A روی A^{*} منظم آرنزی است اگر و تنها اگر A انعکاسی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم با این فرض که A ایده‌آل چپ یا راست A^{**} باشد، منظم‌پذیری آرنزی A به‌وسیله‌ی تجزیه‌ی A^{*} یا A^{**} به‌دست می‌آید. همچنین منظمی و به‌طور قوی نامنظمی آرنزی A را با عمل‌های مدولی A روی دوگان مرتبه n یعنی $A^{(n)}$ بررسی می‌کنیم و رده‌هایی از جبرهای باناخ را معرفی می‌کنیم که $Z_1(A^{**}) = A$ اما $A \subsetneq Z_2(A^{**})$ و همین‌طور جبرهایی که $A \subsetneq Z_1(A^{**}) \subsetneq A^{**}$. در پایان شرایطی را فراهم می‌کنیم که تحت آن‌ها الحاق دوم اشتقاق D، یک اشتقاق است.

واژگان کلیدی: منظم‌پذیری آرنزی، ضرب آرنز، عمل مدولی، نگاشت دوخطی کراندار، اشتقاق، الحاق دوم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

نگاشت $f : X \times Y \longrightarrow Y$ را یک نگاشت دوخطی و کراندار روی فضاهای نرمدار در نظر بگیرید. آرنز[۱] در سال ۱۹۵۱ در [۴] دو توسیع متفاوت f^{***} و f^{t***t} از f را معرفی کرد و حالتی را که در آن این دو توسیع با هم برابرند منظم آرنزی نگاشت دوخطی f نامید. در حالت خاص اگر π نگاشت ضربی روی جبر باناخ A باشد آن‌گاه این دو توسیع دو ضرب متفاوت به نام ضرب اول و ضرب دوم آرنز روی فضای دوگان دوم A یعنی A^{**} تعریف می‌کند که A^{**} به همراه هر کدام از این ضرب‌ها تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود. جبر باناخ A را منظم آرنزی گوئیم هرگاه نگاشت ضربی π منظم آرنزی باشد. به‌عبارت دیگر A منظم آرنزی است اگر دو ضرب روی A^{**} بر هم منطبق باشد.

جبر باناخ A میانگین‌پذیر ضعیف است اگر هر اشتقاق پیوسته $D : A \longrightarrow A^*$ درونی باشد. اگر A میانگین‌پذیر ضعیف باشد آن‌گاه A^{**} میانگین‌پذیر ضعیف است اما سوال این‌جاست که "آیا عکس این مطلب هم برقرار است؟" بیش از سه دهه است که این سوال به‌عنوان یک مسئله‌ی باز مطرح است. برای پاسخ دادن به این سوال لازم است اشتقاق‌ها روی فضای دوگان دوم A یعنی A^{**} را بشناسیم.

برای یک A -دومدول باناخ X، نگاشت کراندار $D^{**} : A^{**} \longrightarrow X^{***}$ به عنوان دومین الحاق اشتقاق کراندار $D : A \longrightarrow X^*$ به‌وضوح یک توسیع خطی از D است. مسئله‌ی حائز اهمیت این است که آیا D^{**} نیز یک اشتقاق است و این‌که تحت چه شرایطی این مهم رخ خواهد داد. برای پاسخ به این سوال تحقیقات وسیعی توسط ریاضی‌دانان مختلف انجام شده است که در نهایت منجر به نتایج قابل توجهی گشته است. از جمله‌ی این نتایج توسط دیلز [۲] و هم‌کارانش به‌دست آمد. آن‌ها این موضوع را در [۱۳] برای حالت خاص $X = A$ بررسی کرده و نشان دادند در صورت منظم بودن جبر باناخ A، $D^{**} : A^{**} \longrightarrow A^{***}$ یک اشتقاق است اگر و تنها اگر $D^{**}(A^{**}).A^{**} \subseteq \widehat{A^*}$. ما در اینجا نتایج آنها را برای حالت کلی $D : A \longrightarrow X^*$ با ارائه‌ی برهانی مستقیم به‌صورت زیر گسترش می‌دهیم

اگر A یک جبر باناخ، (π_l, X, π_r) یک A -دومدول باناخ و $D : A \longrightarrow X^*$ یک اشتقاق باشد آن‌گاه

---

[۱] Arens

[۲] Dals

(۱) $D^{**} : (A^{**}, \circ) \longrightarrow X^{***}$ یک اشتقاق است اگر و تنها اگر $\pi_r^{****}(D^{**}(A^{**}), X^{**}) \subseteq \widehat{A^*}$.

(۲) $D^{**} : (A^{**}, \diamond) \longrightarrow X^{***}$ یک اشتقاق است اگر و تنها اگر $\pi_\iota^{t****}(D^{**}(A^{**}), X^{**}) \subseteq \widehat{A^*}$.

اما برای رسیدن به این مقصود باید ابتدا خاصیت منظم آرنزی نگاشت‌های دوخطی را بشناسیم. در این پایان‌نامه به مطالعه منظم پذیری نگاشتهای دوخطی پرداخته و ملاک‌هایی را برای منظم‌پذیری آن‌ها فراهم می‌کنیم.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل است. در فصل اول که با عنوان پیش‌نیازها مطرح شده به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیازند.

فصل دوم با عنوان منظم‌پذیری آرنزی نگاشت‌های دوخطی کراندار قسمت‌هایی از مقاله‌ی مشترک دکتر محمدزاده و دکتر ابراهیمی ویشکی است که در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است. در این فصل درمورد نگاشت‌های دوخطی و کراندار، الحاق‌های نگاشت‌های دوخطی و کراندار از مراتب بالاتر و همچنین مراکز توپولوژیکی آن‌ها صحبت می‌کنیم و در انتهای فصل قضیه‌هایی را ارائه می‌دهیم که تحت آن‌ها نگاشت‌های دوخطی و کراندار منظم آرنزی می‌شوند. در یکی از قضیه‌های مهم و کاربردی این فصل ثابت می‌کنیم منظم‌پذیری آرنزی f با $f^{****}(\widehat{Z^*}, X^{**}) \subseteq \widehat{Y^*}$، $f^{****}(z^{***}, x^{**}) = f^{t*****t}(z^{***}, \widehat{x^{**}})$ و فشردگی ضعیف نگاشت خطی و کراندار $X \longrightarrow Y^* : x \longmapsto f^*(z^*, x)$ برای هر $z^* \in Z^*$، معادل است.

فصل سوم با عنوان منظم‌پذیری آرنزی عمل‌های مدولی بر اساس مقاله مشترک دکتر اسحاقی گرجی و دکتر فیلالی و همچنین مقاله‌ی مشترک دکتر محمدزاده و دکتر ابراهیمی ویشکی و مقاله‌ی دکتر اسحاقی گرجی که به‌ترتیب در سال‌های ۲۰۰۸، ۲۰۰۷ و ۲۰۰۹ به چاپ رسیدند تنظیم شده است. در این فصل به مطالعه‌ی منظم‌پذیری آرنزی عمل‌های مدولی جبر باناخ A روی A -دومدول باناخ X پرداخته و ارتباط منظم‌پذیری آرنزی A را با بعضی از تجزیه‌های عمل‌های مدولی بررسی می‌کنیم. همچنین در قسمت‌هایی از این فصل به بررسی ارتباط بین منظم آرنزی و نامنظمی قوی آرنزی عمل‌های مدولی چپ A روی $A^{(n)}$ با منظم آرنزی و نامنظمی قوی آرنزی A می‌پردازیم و در حالت خاص نشان می‌دهیم نه تنها $L^1(G)$ به‌طور قوی نامنظم آرنزی است بلکه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $L^1(G)^{(n)}$ به‌طور قوی نامنظم چپ آرنزی است. در نهایت این فصل را با بررسی مراکز توپولوژیکی توسیع‌های مدولی جبرهای باناخ به پایان می‌رسانیم. در ادامه یک قضیه‌ی مهم این فصل را عنوان می‌کنیم که بعد از تغییرات پی‌درپی به‌دست آمده است. در ابتدا آریکان[۳] در [۵] ثابت کرد که جبر باناخ یکدار A انعکاسی است اگر و تنها اگر هر عمل مدولی چپ A منظم آرنزی باشد. اولگر[۴] این قضیه را به این صورت در [۲۷] توسیع داد که جبر باناخ یکدار A انعکاسی است اگر و تنها اگر عمل مدولی چپ A روی A^* منظم آرنزی باشد. دیلز و هم‌کارانش[۵] در [۱۳] نتیجه‌ی مشابه را در حالتی که A فقط همانی تقریبی چپ کراندار دارد متذکر شدند اما با این فرض که A منظم آرنزی باشد. سپس اسحاقی گرجی و فیلالی[۶] در [۱۷] این قضیه را با حذف فرض منظم

[۳] Arikan

[۴] Ulger

[۵] Dales, Rodrigues-Palacios and Velasco

[۶] Filali

آرنزی A و با ارائه‌ی یک اثبات کوتاه و ساده گسترش دادند. در نهایت دکتر محمدزاده و دکتر ابراهیمی ویشکی این قضیه را برای حالت کلی تعمیم داده و با ارائه‌ی اثباتی به مراتب ساده‌تر به قضیه‌ی زیر رسیدند.
فرض کنید (π_ι, X) و (X, π_r) به ترتیب A -مدول باناخ چپ و راست باشند. در این صورت

(۱) اگر A همانی تقریبی چپ کراندار برای X داشته باشد آن‌گاه X انعکاسی است اگر و تنها اگر π_ι^{t*} منظم باشد.

(۲) اگر A همانی تقریبی راست کراندار برای X داشته باشد آن‌گاه X انعکاسی است اگر و تنها اگر π_r^* منظم باشد.

فصل آخر هم برگرفته از مقاله‌ی مشترک دکتر محمدزاده و دکتر ابراهیمی ویشکی است که در فصل‌های دیگر نیز از آن استفاده می‌کنیم. این فصل قسمت اصلی پایان‌نامه است که در آن همان‌طور که قبلاً هم گفتیم شرایطی را فراهم می‌کنیم که الحاق دوم یک اشتقاق دلخواه، خود یک اشتقاق شود.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است بیان می‌کنیم. این فصل شامل چهار بخش است، بخش اول را با عنوان فضاهای باناخ، بخش دوم جبرها و مدول‌های باناخ، بخش سوم با عنوان دوگان دوم جبرهای باناخ و بخش آخر را با نام گروه‌های توپولوژیک ارائه می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای باناخ

فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد که تحت آن نگاشت‌های $\begin{cases} X \times X \longrightarrow X \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{cases}$ و $\begin{cases} \mathbb{C} \times X \longrightarrow X \\ (\alpha,x) \longmapsto \alpha x \end{cases}$ پیوسته باشند در این صورت X یک **فضای برداری توپولوژیک** نامیده می‌شود. فرض کنید X یک فضای برداری و P یک تابع حقیقی مقدار روی X باشد. تابع P را یک **نرم** روی X گوئیم هرگاه برای هر $x,y \in X$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ روابط زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} P(x+y) \leq P(x) + P(y) \\ P(\lambda x) = |\lambda| P(x) \\ x = ۰ \Longleftrightarrow P(x) = ۰ \end{cases}$$

یک نرم معمولاً با $\|\cdot\|$ نشان داده می‌شود. حال دوتایی $(X, \|\cdot\|)$ را یک **فضای نرمدار** گوئیم. فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را یک **فضای باناخ** گوئیم هرگاه هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد.
فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را **کراندار** گوئیم هرگاه $K \geq ۰$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq K\|x\|$. قرار می‌دهیم

$$B(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y;\ \text{خطی و کراندار است } T\},$$

توجه کنید که $B(X,Y)$ یک فضای برداری است و نرم عملگری را برای $T\in B(X,Y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|;\ x\in X, \|x\|\leq ۱\}.$$

عملگر T **طولپایی خطی** است هرگاه برای هر $x\in X$، $\|Tx\|=\|x\|$. قابل ذکر است که $B(X,Y)$ فضائی باناخ است اگر وفقط اگر Y فضائی باناخ باشد. [۱۹، قضیه ۴.۵]

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T:X\longrightarrow Y$ تبدیل خطی کراندار و طولپا باشد. در این صورت $T(X)$ زیرفضای بسته‌ای از Y است.*

اثبات. فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در X باشد به‌طوری‌که $T(x_n)$ همگرا به y باشد آن‌گاه از آن‌جایی که هر دنباله‌ی همگرا، کوشی است می‌توان نتیجه گرفت $\|T(x_n)-T(x_m)\|\longrightarrow ۰$. از طرفی با توجه به طولپایی T داریم

$$\|T(x_n)-T(x_m)\| = \|T(x_n-x_m)\| = \|x_n-x_m\|$$

لذا $\|x_n-x_m\|\longrightarrow ۰$ و این یعنی $(x_n)\subseteq X$ یک دنباله‌ی کوشی است و چون X فضای باناخ است پس (x_n) همگرا است. یعنی $x\in X$ چنان موجود است که $x_n\longrightarrow x$. از طرفی می‌دانیم پیوستگی و کرانداری نگاشت‌های خطی معادلند. لذا T پیوسته است. بنابراین $T(x_n)\longrightarrow T(x)$ و بنا به منحصر بودن حد $y=T(x)$. پس $y\in T(X)$ بنابراین $T(X)$ بسته است. □

برای فضای نرمدار X، فضای باناخ $B(X,\mathbb{C})$ را **دوگان اول** X نامیده و با X^* نمایش می‌دهیم. فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند برای $T\in B(X,Y)$ نگاشت $T^*\in B(Y^*,X^*)$ را به‌صورت

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) \quad (\forall y^*\in Y^*, x\in X)$$

تعریف می‌کنیم. نگاشت T^* **الحاقی** یا **ترانهاده** T نامیده می‌شود. توجه کنید $\|T\|=\|T^*\|$.

قضیه ۲.۱.۱ (هان باناخ[۱]). [۲۴]

(۱) *هرگاه M زیر فضایی از فضای خطی نرمدار X و f یک تابعک خطی کراندار بر M باشد، آن‌گاه f را می‌توان به یک تابعک خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $\|f\|=\|F\|$.*

(۲) *اگر X یک فضای خطی نرمدار بوده و $x_۰\in X$ و $x_۰\neq ۰$ آن‌گاه یک تابعک خطی کراندار مانند f وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_۰)=\|x_۰\|$. به‌ویژه X^* نقاط X را جدا می‌کند.*

---

[۱] Hahn Banach

فرض کنید S یک مجموعه‌ی دلخواه، J یک مجموعه‌ی اندیس و S_α برای هر $\alpha \in J$، یک فضای توپولوژیک باشد. خانواده $F = \{f_\alpha : S \longrightarrow S_\alpha;\ \alpha \in J\}$ از نگاشت ها را در نظر می‌گیریم. در این صورت کوچکترین توپولوژی روی S را که برای آن هر f_α پیوسته است **توپولوژی القا شده** روی S به‌وسیله خانواده $\{f_\alpha\}$ می‌نامیم. در واقع توپولوژی القا شده توسط خانواده F همان توپولوژی تولید شده توسط مجموعه‌هایی به شکل زیر است

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha);\ \alpha \in J \quad \text{باز است } S_\alpha \text{ در } U_\alpha\}.$$

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. در این صورت توپولوژی القا شده روی X توسط X^* را **توپولوژی ضعیف** روی X گوئیم و آن را با τ_w نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر توپولوژی ضعیف روی یک فضای نرمدار، کوچکترین توپولوژی روی آن فضا است به طوری که هر عضو دوگان نسبت به آن توپولوژی پیوسته باشد. گوئیم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ از عناصر X به طور ضعیف به یک عنصر $x \in X$ همگرا است و می‌نویسیم $x_\alpha \xrightarrow{w} x$، هرگاه (x_α) در X نسبت به توپولوژی ضعیف به x همگرا باشد. در واقع $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر وتنها اگر $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$، برای هر $f \in X^*$.

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. برای $x \in X$ نگاشت $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ را با $\hat{x}(f) = f(x)$ برای هر $f \in X^*$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $\left\{\begin{array}{c} X \longrightarrow X^{**} \\ x \longmapsto \hat{x} \end{array}\right.$ طولپایی خطی است. حال قرار می‌دهیم

$$\widehat{X} = \{\widehat{x};\ x \in X\}.$$

اگر X یک فضای متناهی بعد باشد آن‌گاه $\widehat{X} = X^{**}$. اما این تساوی برای فضاهای باناخ با بعد نامتناهی در حالت کلی برقرار نیست. در حالتی که در چنین فضاهایی تساوی $\widehat{X} = X^{**}$ رخ دهد گوئیم X **انعکاسی** است.

گزاره ۳.۱.۱. [۱۹، تمرین ۲۴، صفحه ۱۶۰] *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت X انعکاسی است اگر و تنها اگر X^* انعکاسی باشد.*

توپولوژی القا شده روی X^* توسط $\widehat{X}$ را **توپولوژی ضعیف ستاره** روی X^* می‌نامیم و آن را با τ_{w^*} نمایش می‌دهیم. در واقع در توپولوژی ضعیف ستاره تور $(f_\alpha)_\alpha$ به f همگراست و می‌نویسیم $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$.

قبل از بیان قضیه بعدی یادآوری می‌کنیم گوی یکه‌ی بسته در یک فضای نرمدار X عبارت است از

$$S = \{x \in X;\ \|x\| \leq ۱\}.$$

قضیه ۴.۱.۱. [۲۶، قضیه ۲.۶] *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $x^{**} \in X^{**}$ در این صورت $x^{**} \in \widehat{X}$ اگر و تنها اگر x^{**}، w^* - پیوسته باشد.*

قضیه ۵.۱.۱ (باناخ آلاغلو[۲]). [۲۴، قضیه ۳.۱۵] *اگر X یک فضای باناخ باشد آن‌گاه گوی یکه‌ی بسته در X^**

[۲] Banach-Alaoglu

نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

قضیه ۶.۱.۱. [۱۵، قضیه ۱۵.۱۱.۳.V] *فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد در این صورت T پیوسته است اگر و تنها اگر T، w - w - پیوسته باشد.*

قضیه ۷.۱.۱ (گلدشتاین[۳]). [۱۱] *اگر X یک فضای باناخ باشد آن گاه X با توپولوژی ضعیف ستاره در X^{**} چگال است ($\overline{\widehat{X}}^{w^*} = X^{**}$) . به طور دقیق‌تر، برای هر $F \in X^{**}$، تور (x_α) در X موجود است به‌طوری‌که به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|F\|$ و $\widehat{x_\alpha} \xrightarrow{w^*} F$.*

قبل از ارائه قضیه‌ی بعد یادآوری می‌کنم که در فضای نرمدار X مجموعه $C \subseteq X$ **محدب** است هرگاه برای هر $t \in [0, 1]$، $tC + (1 - t)C \subseteq C$.

قضیه ۸.۱.۱. [۲۴، قضیه ۱۲.۳] *فرض کنید X یک فضای نرمدار و E یک زیر مجموعه محدب X باشد. در این صورت بستار E نسبت به توپولوژی ضعیف برابر است با بستار E با توپولوژی نرم. ($\overline{E}^w = \overline{E}^{\|\cdot\|}$).*

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار و U گوی یکه باز در X و $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد.گوئیم T **به‌طور ضعیف فشرده** است اگر $\overline{T(U)}^w$ به‌طور ضعیف فشرده باشد.

گزاره ۹.۱.۱. [۱۰، قضیه ۵.۵] *فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *T به‌طور ضعیف فشرده است.*

(۲) $T^{**}(X^{**}) \subseteq \widehat{Y}$.

(۳) *T^* به‌طور ضعیف فشرده است.*

دنباله (x_n) در فضای باناخ X را **به‌طور ضعیف کوشی** گوئیم هرگاه $x_n - x_m \xrightarrow{w} 0$ وقتی $n, m \longrightarrow \infty$. فضای باناخ X را **به‌طور ضعیف دنباله‌ای کامل** گوئیم هرگاه هر دنباله‌ی به‌طور ضعیف کوشی به‌طور ضعیف همگرا باشد.

۱-۲ جبرها و مدول‌های باناخ

فضای برداری A روی میدان $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت ضرب $\left\{ \begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (x, y) \longmapsto xy \end{array} \right.$ را یک **جبر** گوئیم هرگاه برای هر $x, y, z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ شرایط زیر برقرار باشد.

[۳] Goldestine

(۱) $(xy)z = x(yz)$.

(۲) $x(y+z) = xy + xz$ و $(y+z)x = yx + zx$.

(۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

جبر A را **یکدار** گوئیم هرگاه عنصری ناصفر که آن را با ۱ نشان می‌دهیم موجود باشد که برای هر $x \in A$، $x = x۱ = ۱x$. فضای نرمدار $(A, \|.\|)$ را یک **جبر نرمدار** گوئیم هرگاه A یک جبر بوده و برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. هرگاه جبر نرمدار $(A, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد آن را یک **جبر باناخ** گوئیم. فرض کنید A یک جبر نرمدار باشد تور $(e_\alpha) \subseteq A$ را یک **همانی تقریبی چپ (راست)** برای A می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in A$ ، $\|e_\alpha a - a\| \longrightarrow \circ$ ($\|ae_\alpha - a\| \longrightarrow \circ$). اگر (e_α) هم یک همانی تقریبی چپ و هم یک همانی تقریبی راست باشد آن را **همانی تقریبی** گوئیم. همانی تقریبی (e_α) را کراندار گوئیم هرگاه به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از A کراندار باشد. در این حالت (e_α) را یک **همانی تقریبی کراندار** نامیم.

فرض کنید A یک جبر باشد نگاشت $\begin{cases} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto a^* \end{cases}$ را یک **برگشت**[۴] روی A گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} (a+b)^* = a^* + b^*, & (a^*)^* = a, \\ (ab)^* = b^* a^*, & (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*. \end{cases}$$

زوج $(A, *)$ را یک **$*$ - جبر** گوئیم. اگر جبر باناخ A یک $*$ - جبر باشد و برای هر $a \in A$، $\|a^*\| = \|a\|$ آن‌گاه آن را یک **$*$ - جبر باناخ** نامیم.

$*$ - جبر باناخ A را یک **C^* -جبر** گوئیم هرگاه برای هر $a \in A$، $\|a^* a\| = \|a\|^۲$. یک C^* - جبر یکدار که دوگان یک فضای باناخ باشد را یک **W^* -جبر** می‌نامیم.

گزاره ۱.۲.۱. [۱، نتیجه ۹.II] *فرض کنید N یک C^* -جبر و M یک W^* -جبر باشد در این صورت هر نگاشت خطی و کراندار از N به M_* به‌طور ضعیف فشرده است، که M_* پیش‌دوگان M است.*

فرض کنید X، Y و Z فضاهای نرمدار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ **دوخطی** نامیده می‌شود اگر

(۱) برای هر $y \in Y$ نگاشت $\begin{cases} X \longrightarrow Z \\ x \longmapsto \phi(x, y) \end{cases}$ خطی باشد.

(۲) برای هر $x \in X$ نگاشت $\begin{cases} Y \longrightarrow Z \\ y \longmapsto \phi(x, y) \end{cases}$ خطی باشد.

---
[۴] Involution

نگاشت دوخطی $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را **کراندار** گوئیم اگر $M > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|\phi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\| \quad (\forall x \in X, y \in Y).$$

در این حالت تعریف می‌کنیم

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x,y)\|;\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

و قرار می‌دهیم

$$B(X,Y;Z) = \{\phi : X \times Y \longrightarrow Z;\ \text{دوخطی و کراندار است } \phi\}.$$

فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد. X را یک A **-مدول باناخ چپ** می‌نامیم اگر نگاشت دوخطی و کراندار $\begin{cases} A \times X \longrightarrow X \\ (a,x) \longmapsto a \cdot x \end{cases}$ موجود باشد که برای هر $a,b \in A$ و $x \in X$ تساوی $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ برقرار باشد.

در صورتی که ضرب مدولی $\begin{cases} X \times A \longrightarrow X \\ (x,a) \longmapsto x \cdot a \end{cases}$ دارای خواص مشابهی باشد، X را یک A **-مدول باناخ راست** می‌نامیم.

X را یک A **-دومدول باناخ** می‌گوئیم اگر یک A - مدول باناخ راست و یک A - مدول باناخ چپ باشد و

$$(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b) \qquad (\forall a,b \in A, x \in X)$$

فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* دوگان آن باشد. اگر X یک A - مدول باناخ چپ باشد آن‌گاه X^* یک A - مدول باناخ راست است که $\begin{cases} X^* \times A \longrightarrow X^* \\ (f,a) \longmapsto f \cdot a \end{cases}$ و $(f \cdot a)(x) = f(a.x)$. همچنین اگر X یک A - مدول باناخ راست باشد آن‌گاه X^* یک A - مدول باناخ چپ است که $\begin{cases} A \times X^* \longrightarrow X^* \\ (a,f) \longmapsto a \cdot f \end{cases}$ و $(a \cdot f)(x) = f(x.a)$.

قضیه ۲.۲.۱ (فاکتورگیری کوهن[5]). [۷، قضیه ۱۰.۱۱] *فرض کنید جبر باناخ A دارای همانی تقریبی چپ کراندار و X یک A -مدول باناخ چپ باشد در این صورت*

$$A.X = \{a.x;\ a \in A, x \in X\}$$

یک زیرفضای بسته از X است. نتیجه‌ی مشابه برای A -مدول باناخ راست نیز برقرار است.

---

[5] Cohen factorization

۱-۳ دوگان دوم جبرهای باناخ

فرض کنید A یک جبر باناخ، A^* دوگان اول و A^{**} دوگان دوم A باشند. در این صورت فضاهای A^* و A^{**} دو A -دومدول هستند درحالی‌که برای هر $f \in A^*$، $F \in A^{**}$ و $a, x \in A$ داریم

$$\begin{cases} (a \cdot f)(x) = f(x.a) \\ (f \cdot a)(x) = f(a.x) \end{cases} \qquad \begin{cases} (a \cdot F)(f) = F(f \cdot a) \\ (F \cdot a)(f) = F(a \cdot f) \end{cases}$$

اولین و دومین ضرب آرنز [۶] روی A^{**} را به ترتیب با نماد $\circ$ و $\diamond$ نشان داده و برای هر $F, G \in A^{**}$ ، $f \in A^*$ و $a \in A$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} (F \circ G)(f) = F(G \circ f) \\ (G \circ f)(a) = G(f.a) \end{cases} \qquad \begin{cases} (F \diamond G)(f) = G(f \diamond F) \\ (f \diamond F)(a) = F(a \cdot f) \end{cases}$$

گزاره ۱.۳.۱. *فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. برای هر $F \in A^{**}$، $f \in A^*$ و $a, x \in A$ روابط زیر برقرارند.*

(۱) $\hat{a} \circ f = a \cdot f$ و $f \diamond \hat{a} = f \cdot a$

(۲) $\hat{a} \diamond F = \hat{a} \circ F = a \cdot F$

(۳) $F \diamond \hat{a} = F \circ \hat{a} = F \cdot a$

(۴) $\hat{a} \diamond \hat{b} = \hat{a} \circ \hat{b} = \widehat{ab}$

(۵) *ضرب های اول و دوم آرنز شرکت پذیرند.*

(۶) $\|G \circ f\| \leqslant \|G\|\|f\|$ و $\|f \diamond F\| \leq \|f\|\|F\|$

(۷) $\|F \circ G\| \leqslant \|F\|\|G\|$ و $\|F \diamond G\| \leq \|F\|\|G\|$

(۸) *A^{**} به همراه هر کدام از ضرب های آرنز یک جبر باناخ است.*

اثبات. فرض کنیم $b \in A$ دلخواه باشد

(۱)

$$(\hat{a} \circ f)(b) = \hat{a}(f \cdot b) = (f \cdot b)(a) = f(ba) = (a \cdot f)(b)$$

و

$$(f \diamond \hat{a})(b) = \hat{a}(b \cdot f) = (b \cdot f)(a) = f(ab) = (f \cdot a)(b)$$

---

[۶] Arens product

(۲)

$$(\hat{a} \circ F)(f) = \hat{a}(F \circ f) = (F \circ f)(a) = F(f \cdot a) = (a \cdot F)(f)$$

و

$$(\hat{a} \diamond F)(f) = F(f \diamond \hat{a}) = F(f \cdot a) = (a \cdot F)(f) = (\hat{a} \circ F)(f)$$

(۳)

$$(F \circ \hat{a})(f) = F(\hat{a} \circ f) = F(a \cdot f) = (F \cdot a)(f)$$

و

$$(F \circ \hat{a})(f) = F(\hat{a} \circ f) = F(a \cdot f) = (f \diamond F)(a) = \hat{a}(f \diamond F) = (F \diamond \hat{a})(f)$$

(۴) طبق قسمت‌های (۲) و (۳) داریم $\hat{a} \diamond \hat{b} = \hat{a} \circ \hat{b}$ و

$$(\hat{a} \circ \hat{b})(f) = \hat{a}(\hat{b} \circ f) = \hat{a}(b \cdot f) = (b \cdot f)(a) = f(ab) = \widehat{ab}(f)$$

(۵) ضرب اول آرنز شرکت پذیر است زیرا

$$((H \circ f) \cdot a)(b) = (H \circ f)(ab) = H(f \cdot (ab)) = H((f \cdot a) \cdot b) = (H \circ (f \cdot a))(b)$$

پس

$$(G \circ (H \circ f))(a) = G((H \circ f).a) = G(H \circ (f.a)) = (G \circ H)(f.a) = ((G \circ H) \circ F)(a)$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned} ((F \circ G) \circ H)(f) &= (F \circ G)(H \circ f) = F(G \circ (H \circ f)) \\ &= F((G \circ H) \circ f) = (F \circ (G \circ H))(f) \end{aligned}$$

شرکت پذیری ضرب دوم آرنز نیز به‌طور مشابه است.

(۶)

$$\begin{aligned} \|G \circ f\| &= \sup_{\|a\| \leqslant ۱} |(G \circ f)(a)| = \sup_{\|a\| \leqslant ۱} |G(f \cdot a)| \\ &\leqslant \|G\| \sup_{\|a\| \leqslant ۱} \|f \cdot a\| \leqslant \|G\| \|f\|. \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه داریم $\|f \diamond F\| \leq \|f\| \|F\|$.

(۷)

$$\begin{aligned} \|F \circ G\| &= \sup_{\|f\| \leqslant ۱} |(F \circ G)(f)| = \sup_{\|f\| \leqslant ۱} |F(G \circ f)| \\ &\leqslant \|F\| \sup_{\|f\| \leqslant ۱} \|G \circ f\| \leqslant \|F\| \|G\|. \end{aligned}$$