فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

در این فصل به معرفی نمادها و بیان تعاریف و قضایای اساسی که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم، می‌پردازیم. تاریخچه‌ای از تحقیق نیز بطور مختصر ارائه خواهد شد.

۱.۱ فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک **نیم نرم** روی X می‌نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

(الف). $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(ب).$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

از (الف) نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = 0$ آنگاه $\|0\| = 0$.همچنین طبق (ب) داریم :

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$$

این نتیجه می‌دهد برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$.

تعریف ۲.۱.۱ .اگر نیم نرم $\|.\|$ دارای این خاصیت باشد که $\|x\| = 0$ ایجاب کند، $x = 0$،آن را یک **نرم** می‌نامیم همچنین فضای برداری X را همراه با نرم $\|.\|$ یک **فضای نرمدار** می نامیم.
حال اگر این فضا نسبت به مترالقاشده از نرم کامل باشد، آن را یک فضای باناخ[1] گوییم . متر القا شده از نرم $\|.\|$ تابع $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ می‌باشد.

۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱ . یک فضای برداری مختلط H را یک **فضای ضرب داخلی** گوییم، اگر نگاشت $<.,.>: H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ که $(x, y) \longmapsto <x, y>$ موجود باشد که به ازای هر $x, y, z \in H$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

(الف). $<y, x> = \overline{<x, y>}$

(ب). $<\alpha x + y, z> = \alpha <x, z> + <y, z>$

[1] Banach

(پ). $<x,x>\geq 0$

(ت). $<x,x>=0 \Longleftrightarrow x=0$

عدد مختلط $<x,y>$ را ضرب داخلی x و y نگاشت فوق را ضرب داخلی گوییم.

با توجه به تعریف ضرب داخلی، نرم را در فضای H چنین تعریف می‌کنیم: $\|x\|=<x,x>^{\frac{1}{2}}$ یعنی به ازای هر $x\in H$ ریشه دوم نامنفی ضرب داخلی $<x,x>$ برابر با نرم x است.

نتیجه ۲.۲.۱ . به ازای هر $x,y,z\in H$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر بدست می آید:

(الف). $<0,x>=0$

(ب). $<z,\alpha x+y>=\overline{\alpha}<z,x>+<z,y>$

(پ). **نامساوی کوشی– شوارتز**[1] :

$$|<x,y>|\leq\|x\|.\|y\|$$

. (ت). **نامساوی مثلثی** :

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

. (ث). **اتحاد متوازی الاضلاع** :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می گیریم $||x-z||\leq||x-y||+||y-z||$. اگر فاصله بین x و y را با $||x-y||$ نشان دهیم ، H در تمام شرایط فضای متریک صدق می‌کند و از شرط (ت) تعریف (۱.۲.۱) نتیجه می‌گیریم اگر $||x||=0$ آنگاه $x=0$، لذا H یک فضای متریک است .

تعریف ۳.۲.۱ . فضای ضرب داخلی H را یک **فضای هیلبرت**[2] گوییم هر گاه با متر حاصل از ضرب داخلی یک فضای متریک کامل باشد .

[1] Schwartz

[2] Hilbert

مثال ۴.۲.۱ .(الف). فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$$

(ب).فضای $L^2(X, \mu)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< f, g >= \int_X f \overline{g} d\mu \qquad f, g \in L^2(X, \mu)$$

(پ).فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است .

$$< x, y >= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n} \qquad x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

تبصره ۵.۲.۱ . فضاهای هیلبرت رده‌ی خاصی از فضاهای باناخ را تشکیل می دهند و تمام قضایای فضاهای باناخ در مورد فضاهای هیلبرت نیز برقرار است. هندسه فضاهای هیلبرت از جهاتی شبیه به هندسه‌ی اقلیدسی و بسیار در دسترس‌تر از نظریه فضاهای باناخ است .

در سراسر این پایان‌نامه فضای هیلبرت را با H نشان می‌دهیم .

تعریف ۶.۲.۱ . زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H زیر فضایی برداری است که با توپولوژی حاصل از نرم درH بسته باشد .

۳.۱ عملگرهای خطی

تعریف ۱.۳.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند، عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را **خطی** می‌نامیم هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

زیر فضاهای $N(T) := \{x \in X : T(x) = \circ\}$ و $R(T) := \{T(x) : x \in X\}$ از X و Y را به ترتیب **فضای پوچ** و **فضای برد** T می‌نامیم .همچنین عملگر همانی روی X را با نماد I_X یا به طور خلاصه با I نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد،آنگاه نرم عملگر T را با $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| := \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \circ\}$$

عملگر T را **کراندار** می‌نامیم هر گاه $\|T\| < \infty$ و آن را **بی‌کران** می‌نامیم هر گاه $\|T\| = \infty$.
فضای تمام عملگر های خطی و کراندار از X به Y را با $L(X, Y)$ و اگر $X = Y$ با $L(X)$ نشان می‌دهیم.
همچنین در حالت خاص اگر $Y = \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم $X^* = L(X, \mathbb{C})$ نشان می‌دهیم و هر یک از اعضای X^* را یک **تابعی خطی کراندار** می‌نامیم .

تعریف ۳.۳.۱ . دو فضای نرمدار X و Y را **یکریخت** می‌نامند هر گاه عملگری خطی مانند $T \in L(X, Y)$ موجود باشد که یک به یک و پوشا بوده و وارون آن پیوسته باشد و می نویسیم $X \cong Y$.

تعریف ۴.۳.۱ . فضای نرمدار X را **بازتابی (انعکاسی)** می‌نامیم هر گاه $X \cong X^{**}$. در بخش بعد انواع فضاهای باناخ ونگاشت‌های مورد استفاده را معرفی خواهیم کرد.

۴.۱ تعاریف و لم‌های اساسی

تعریف ۱.۴.۱ . فرض کنیم E یک فضای توپولوژیک باشد.

الف) گوییم تابع، $f: E \longrightarrow (-\infty, \infty]$ نیم پیوسته پایینی است اگر:

$$\forall x \in E \quad ; \quad \liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$$

ب) گوییم $A \subseteq E$ مجموعه‌ای محدب است اگر:

$$\forall x, y \in A \quad , \quad \forall \lambda \in (۰, ۱) \quad ; \quad (\lambda x + (۱ - \lambda) y\ ) \in A$$

پ) گوییم تابع، $g: E \longrightarrow (-\infty, \infty]$ محدب است اگر:

$$g(\lambda x + (۱ - \lambda) y) \leq \lambda g(x) + (۱ - \lambda) g(y) \quad ; \quad \forall x, y \in E \quad , \quad \forall \lambda \in (۰, ۱)$$

مثال ۲.۴.۱ . هر گوی باز یا بسته در فضای نرمدار مجموعه‌ای محدب است. تابع نرم $x \mapsto \|x\|$ تابعی محدب است.

حال مختصراً به تعریف توپولوژی‌های ضعیف[۱] و ضعیف*[۲] می‌پردازیم. بخاطر دور نشدن از اصل مطالب ازآوردن اثبات قضایای این قسمت خودداری می‌کنیم. خواننده می تواند برای کسب اطلاعات بیشتر در این مبحث و مشاهده اثبات قضایا به [22] مراجعه کند.

فرض کنیم X یک فضای باناخ وX^* دوگان آن باشد. اگر$f \in X^*$ نگاشت $\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می کنیم: $\varphi_f x = f(x) =< x, f >$ که در آن $< ., . >$ زوج دوگان تعمیم یافته است آن را با نماد ضرب داخلی در فضاهای هیلبرت اشتباه نگیریم. البته اگر X فضای هیلبرت باشد می‌توان هر دو نماد را به یک معنی بکار برد زیرا قضیه نمایش ریس می‌گوید $X \simeq X^*$ و هر $f \in X^*$ با یک عضو X یکی گرفته می‌شود و در این صورت $< x, f >$ به هر دو معنی یکی خواهد بود. حال اگرf درX^* تغییر کند، یک خانواده‌ی نگاشت‌های $(\varphi_f)_{f \in X^*}$ را بدست می آوریم.

---

[۱] Weak topology

[۲] Weak* topology

تعریف ۳.۴.۱ . توپولوژی ضعیف روی X که آنرا با نماد $\sigma(X,X^*)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام نگاشت های $(\varphi_f)_{f\in X^*}$ را پیوسته سازد.

نمادگذاری ۴.۴.۱ . اگر $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد، همگرایی دنباله x_n به سمت x برای توپولوژی ضعیف $\sigma(X,X^*)$ را با $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۵.۴.۱ . فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. آنگاه:

الف) $x_n \rightharpoonup x$ اگروتنهااگر $\forall f \in X^* \quad ; \quad < x_n, f > \to < x, f >$.

ب) اگر $x_n \to x$ آنگاه $x_n \rightharpoonup x$.

پ) اگر $x_n \rightharpoonup x$ آنگاه $\|x_n\|$ کراندار است و $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

ج) اگر $x_n \rightharpoonup x$ (همگرایی در X باتوپولوژی ضعیف) و $f_n \to f$ (همگرایی در X^* باتوپولوژی معمولی)

آنگاه: $< x_n, f_n > \to < x, f >$.

د)هرگاه بعد X متناهی باشد، توپولوژی ضعیف وتوپولوژی معمولی برهم منطبق اند. به ویژه یک دنباله بطورضعیف همگراست اگروتنهااگر بطورقوی همگراباشد.

تذکر ۶.۴.۱ . بازهای(بسته‌های)توپولوژی ضعیف برای توپولوژی معمولی باز(بسته) هستند. هرگاه بعد X نامتناهی باشد توپولوژی ضعیف اکیداً کوچکترازتوپولوژی معمولی است، یعنی بازهایی(بسته هایی) برای توپولوژی معمولی موجودند که برای توپولوژی ضعیف باز(بسته) نیستند.

مثال ۷.۴.۱ . اگر بعد X نامتناهی باشد، مجموعه $S = \{x \in X : \quad \|x\| = ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف بسته نیست، درحالیکه می‌دانیم درتوپولوژی معمولی بسته است.

مثال ۸.۴.۱ . اگر بعد X نامتناهی باشد، مجموعه $U = \{x \in X : \quad \|x\| < ۱\}$ هیچگاه برای توپولوژی ضعیف باز نیست، درحالیکه درتوپولوژی معمولی باز است.

تذکر ۹.۴.۱ . اگر بعد X نامتناهی باشد، توپولوژی ضعیف متریک‌پذیر نیست. یعنی متر(نرمی) تعریف شده روی X موجود نیست که روی X توپولوژی ضعیف را القا کند.

تذکر ۱۰.۴.۱ . اگر بعد X نامتناهی باشد، درحالت کلی دنباله‌هایی وجود دارند که بطور ضعیف همگرا هستند ولی بطور قوی همگرا نیستند. (پیرامون تذکرات فوق ذکر این نکته ضروری است که: دو فضای متریک که دارای دنباله‌های همگرای یکسان هستند، دارای توپولوژی‌های یکسانند. امادو فضای توپولوژیک که دارای توپولوژی یکسانند ممکن است دارای دنباله‌های همگرای یکسان نباشند).

قضیه ۱۱.۴.۱ . فرض کنیم، $C \subseteq X$ محدب باشد. دراین صورت C در توپولوژی ضعیف بسته است اگروتنهااگر درتوپولوژی معمولی بسته باشد.

قضیه ۱۲.۴.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی وپیوسته باشد. در این صورت T از X با توپولوژی ضعیف به Y با توپولوژی ضعیف پیوسته است و برعکس.

حال فرض کنیم X^{**} دوگان X^* باشد. برای هر $x \in X$ نگاشت $\varphi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ باضابطه‌ی $\varphi_x(f) =< x, f >$ را در نظر می‌گیریم. اگر x در X تغییر کند، یک خانواده‌ی نگاشت‌های $(\varphi_x)_{x\in X}$ از X^* به $\mathbb{R}$ بدست می آوریم.

تعریف ۱۳.۴.۱ . توپولوژی ضعیف* روی X^* که آنرا با نماد $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که تمام نگاشت‌های $(\varphi_x)_{x\in X}$ را پیوسته سازد. چون $X \subseteq X^{**}$ واضح است که توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ از توپولوژی $\sigma(X^*, X^{**})$ کوچکتر است. به عبارت دیگرتوپولوژی $\sigma(X^*, X)$ دارای مجموعه های باز(بسته) کمتری از توپولوژی $\sigma(X^*, X^{**})$ است. توجه داشته باشیم که اگر یک توپولوژی دارای بازهای کمتری باشد، دارای فشرده های بیشتری است وهمین موضوع عامل تلاش برای ضعیف کردن توپولوژی هاست.

نمادگذاری ۱۴.۴.۱ . اگر$\{f_n\}$ دنباله‌ای درX^* باشد، همگرایی دنباله f_n به سمت f برای توپولوژی ضعیف* $\sigma(X^*,X)$ را باf $\rightharpoonup^*$ f_n نشان می‌دهیم. بنابراین : از $f_n \rightharpoonup^* f$ برای $\sigma(X^*,X)$، از $f_n \rightharpoonup f$ برای $\sigma(X^*,X^{**})$ و از$f_n \to f$ برای توپولوژی معمولی استفاده می‌کنیم.

گزاره هایی مشابه آنچه برای دنباله‌ها درX برقرار بود، در X^* برقرار است.

حال به تعریف برخی خواص روی فضاهای باناخ می‌پردازیم. فرض کنیم X یک فضای باناخ، X^* دوگان آن و $J : X \longrightarrow ۲^{X^*}$ نگاشت دوگان باشد. یعنی، $J(x) = \{f \in X^* \quad : \quad <x,f>= \|x\|\|f\| \ , \ \|x\| = \|f\|\}$، که درآن $<.,.>$ زوج دوگان تعمیم یافته است و $\|.\|$ نرمی روی X است که فضانسبت به آن کامل است. همچنین بافرض اینکه $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد، مجموعه نقاط ثابت آن را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$F(T) = \{x \in X : \quad T(x) = x\}$$

تعریف ۱۵.۴.۱ . نرم فضای باناخ X را مشتق پذیر گاتو [۱] گوییم اگر حد، $\lim_{t\to ۰} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ برای هرx و y در کره‌ی $S = \{x \in X \quad : \quad \|x\| = ۱\}$ موجود باشد. در اینصورت فضای X را نیز هموار گوییم. حال اگر برای هر y دلخواه(ولی ثابت) درS، حد فوق بطوریکنواخت روی S (یعنی با متغیر بودن x) موجود باشد، آنگاه نرم رابطوریکنواخت مشتق پذیر گاتکس گوییم. اگر برای هر x ثابت(ولی دلخواه) در S حد فوق بطور یکنواخت روی S (یعنی با متغیر بودن y) موجود باشد، آنگاه نرم را مشتق پذیر فرشه [۲] گوییم. حال اگر حد مذکور بطوریکنواخت روی $S \times S$ (یعنی با متغیر بودن x و y) موجود باشد، نرم را بطوریکنواخت مشتق پذیر فرشه گوییم و در این حالت فضا را بطور یکنواخت هموار گوییم.

تعریف ۱۶.۴.۱ . ضریب همواری فضای باناخ X که آنرا با $\rho(t)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(t) = \sup\{\frac{۱}{۲}(\|x+y\| + \|x-y\|) - ۱ \quad : \quad x,y \in X, \|x\| = ۱, \|y\| \le t\}$$

---

[۱] Gateaux differentiable

[۲] Frechet

می‌توان نشان داد X بطور یکنواخت هموار است اگروتنهااگر: $\lim_{t\to 0}\frac{\rho(t)}{t}=0$.

حال فرض کنیم $q>1$. فضای باناخ X را بطور یکنواخت هموار از درجه q گوییم هرگاه عدد ثابت $c>0$ موجود باشد بطوریکه: $\rho(t)\leq ct^q$.

تعریف ۱.۴.۱۷ . فضای باناخ X را اکیداً محدب[1] گوییم هرگاه برای هر $x,y\in S$ که $x\neq y$ داشته باشیم: $\frac{\|x+y\|}{2}<1$. فضا را بطور یکنواخت محدب[2] گوییم اگربرای هر $\epsilon\in(0,2]$، $\delta>0$ موجود باشد بطوریکه: برای هر $x,y\in S$ که $\|x-y\|>\epsilon$ داشته باشیم، $\|\frac{x+y}{2}\|\leq 1-\delta$ یا بطور معادل: برای هر $\{x_n\},\{y_n\}\subset S$ که $\lim_{n\to\infty}\|\frac{x_n+y_n}{2}\|=1$، داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

تعریف ۱.۴.۱۸ . گوییم فضای باناخ X دارای خاصیت کادک–کلی [3] است اگر دو رابطه‌ی $x_n\rightharpoonup x$ و $\|x_n\|\to\|x\|$ نتیجه بدهند: $x_n\to x$.

تعریف ۱.۴.۱۹ . گوییم نگاشت دوگان J بطور ضعیف دنباله‌وار پیوسته[4] است اگر برای هر $x_n\subset X$ که $x_n\rightharpoonup x$ داشته باشیم، $J(x_n)\rightharpoonup^* J(x)$. بطور کلی J در خواص زیر صدق می‌کند:

الف) اگر X هموار باشد، J تک‌مقداریست.

ب) اگر X اکیداً محدب باشد، J یک به یک است. یعنی اگر $Jx\bigcap Jy\neq\emptyset$ آنگاه $x=y$.

پ) اگر X بازتابی باشد، J پوشاست.

ت) اگر X هموار و بازتابی باشد، J پیوسته ضعیف نرمی است. یعنی اگر $x_n\to x$ آنگاه $J(x_n)\rightharpoonup J(x)$.

ث) اگر X بطور یکنواخت محدب باشد، دارای خاصیت کادک–کلی است.

برای مشاهده اثبات گزاره‌های فوق می‌توان به [۲, ۳] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۴.۲۰ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $C\subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. نگاشت تصویر $P_C:H\to C$ به این صورت تعریف میشود: $P_Cx=argmin\|x-y\|_{y\in C}$ و معنی آن اینست که:

---

[1] strictly convex

[2] uniformly convex

[3] Kadec-Klee

[4] Weak sequentially continuous

$\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$.

گزاره ۲۱.۴.۱ . نگاشت تصویر، نگاشتی غیرانبساطی است و در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$< x - P_C x, P_C x - y > \geq 0 \quad ; \quad \forall y \in C$.

برهان. ر.ک.[۳].

تعریف ۲۲.۴.۱ . فرض کنیم X یک فضای باناخ، $C \subseteq X$ ناتهی، بسته ومحدب ، J نگاشت دوگان آن و $T : C \longrightarrow X$ یک نگاشت غیرخطی باشد. آنگاه:

الف) T را $k-$ لیپشیتزی [۱] گوییم، اگر عدد حقیقی و مثبت k موجود باشد بطوریکه:

$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\| \quad ; \quad \forall x, y \in C$.

ب) T را قویاً غیرانبساطی [۲] گوییم، اگر:

$< Tx-Ty, JTx-JTy > \leq < Tx-Ty, Jx-Jy > \quad ; \quad \forall x, y \in C$.

واضح است که اگر $X = H$ یک فضای هیلبرت باشد، رابطه فوق بصورت زیر نمود پیدا می‌کند:

$\|Tx-Ty\|^2 \leq < Tx-Ty, x-y > \quad ; \quad \forall x, y \in C$.

و دراینصورت بوضوح T نگاشتی غیرانبساطی خواهد بود.

پ) T را قویاً یکپارچه با توان δ [۳] گوییم، اگربرای هر $x, y \in C$، $j(x-y) \in J(x-y)$ و $\delta \in (0, 1)$ موجود باشند بطوریکه:

$< Tx - Ty, j(x - y) > \geq \delta\|x - y\|^2$.

ت) T را قویاً یکپارچه‌ی معکوس با توان δ [۴] گوییم، اگر $\delta \geq 0$ موجود باشد بطوریکه:

$< Tx-Ty, J(x-y) > \geq \delta\|Tx-Ty\|^2 \quad ; \quad \forall x, y \in C$

.

[۱] Lipschitzian

[۲] firmly nonexpansive

[۳] δ- strongly accretive

[۴] δ-inverse strongly accretive

ث) T را اکیداً شبه انقباضی با توان λ [۱] گوییم، اگر برای هر $x, y \in C$، $j(x-y) \in J(x-y)$ و $\lambda \in (0, 1)$ موجود باشند بطوریکه:

$$< Tx-Ty, j(x-y) > \leq \|x-y\|^2 - \lambda\|x-y-(Tx-Ty)\|^2$$

یا بعبارتی، $< (I-T)x-(I-T)y, j(x-y) > \geq \lambda\|x-y-(Tx-Ty)\|^2$.

ج) فرض کنیم $D \subseteq C$. نگاشت $Q : C \longrightarrow D$ را نگاشتی تابناک [۲] گوییم اگر: برای هر $x \in C$ و هر $t > 0$ رابطه‌ی $Qx + t(x - Qx) \in C$ نتیجه بدهد $Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$.

چ) $Q : C \longrightarrow C$ را یک فروبری [۳] گوییم اگر $Q^2 = Q$.

در حالت خاص که $X = H$ یک فضای هیلبرت است، ویژگی‌های زیر را برای نگاشت‌ها تعریف می‌کنیم:

الف) T را یکنوا [۴] گوییم، اگر:

$$< Tx-Ty, x-y > \geq 0 \quad ; \quad \forall x, y \in C.$$

ب) T را قویاً یکنوا با توان α [۵] گوییم، اگر عدد حقیقی و مثبت α موجود باشد بطوریکه:

$$< Tx-Ty, x-y > \geq \alpha\|x-y\|^2 \quad ; \quad \forall x, y \in C.$$

پ) T را قویاً یکنوای معکوس با توان α [۶] گوییم، اگر عدد حقیقی و مثبت α موجود باشد بطوریکه:

$$< Tx-Ty, x-y > \geq \alpha\|Tx-Ty\|^2 \quad ; \quad \forall x, y \in C.$$

ت) T را غیر انتشاری [۷] گوییم، اگر:

$$\|Tx-Ty\|^2 \leq \|x-y\|^2 + 2 < x-Tx, y-Ty > \quad ; \quad \forall x, y \in C.$$

[۱] λ- strictly pseudocontractive

[۲] Sunny

[۳] Retract

[۴] monotone

[۵] α-strongly monotone

[۶] α-inverse-strongly monotone

[۷] nonspreading

تعریف ۲۳.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باضرب داخلی $<.,.>$ و نرم $\|.\|$ و $C \subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. همچنین $T : H \longrightarrow H$ نگاشتی غیرخطی باشد. یک مسئله‌ی نامساوی تغییراتی [1] که مختصراً آنرا با $VI(T,C)$ نشان می‌دهیم، عبارتست از پیدا کردن نقاطی مانند $x^* \in C$ که برای آن داشته باشیم:

$$< T(x^*), x - x^* > \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in C.$$

ثابت شده[4] که این مسئله معادل پیدا کردن $x^* \in C$ است که برای $\mu > 0$ در مسئله نقطه ثابت زیر صدق کند:

$$x^* = P_C(x^* - \mu T(x^*)).$$

در رابطه فوق P_C همان نگاشت تصویر است. هرچند طرح این مسئله تنها روی فضاهای هیلبرت معنا پیدا می‌کند، اما می‌توان مسئله‌ای مشابه را روی فضاهای باناخ مطرح کرد. اما باید توجه داشته باشیم که روی فضاهای باناخ مسئله‌ی بهینه سازی مطرح نمی‌شود. بخاطر تسهیلات بیشتر روی فضاهای باناخ نیز همان برچسب مسئله‌ی نامساوی تغییراتی را اعمال می‌کنیم و آنرا با $VI^*(T,C)$ نشان می‌دهیم. و معنای آن پیدا کردن نقاطی مانند $x^* \in C$ است که برای آن داشته باشیم:

$$< T(x^*), J(x - x^*) > \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in C.$$

تعریف ۲۴.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باضرب داخلی $<.,.>$ و نرم $\|.\|$ و $C \subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. همچنین $T : C \longrightarrow H$ نگاشتی غیرخطی باشد. یک مسئله‌ی دستگاه نامساوی‌های تغییراتی عبارت است از پیدا کردن نقاطی مانند $(x^*, y^*) \in C \times C$ که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$\begin{cases} < \mu T x^* + y^* - x^*, x - y^* > \geq 0 & ; \quad \forall x \in C \\ < \lambda T y^* + x^* - y^*, x - x^* > \geq 0 & ; \quad \forall x \in C \end{cases}$$

که در آن $\lambda > 0, \mu > 0$ اعدادی ثابت هستند. در حالت خاص اگر شرط $x^* = y^*$ را اضافه کنیم مسئله همان تعریف (۲۳.۴.۱) خواهد بود. بعلاوه در فضای باناخ نیز تعریفی مشابه را می‌توان تنظیم نمود.

[1] variational inequality problem

همچنین مسئله‌ی فوق معادل مسئله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} y^* = P_C(I-\mu A)x^*. \\ x^* = P_C(I-\lambda A)y^* \end{cases}$$

تعریف ۲۵.۴.۱ . گوییم فضای باناخ X در خاصیت اپیل [۱] صدق می‌کند، اگر برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X که $x_n \rightharpoonup x$ داشته باشیم:

$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| \quad ; \quad \forall y \in X, y \neq x$.

تعریف ۲۶.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $C \subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. همچنین $F: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی دو متغیره باشد. در اینصورت یک مسئله‌ی تعادلی [۲] برای F عبارت‌است از پیدا کردن نقاطی مانند $x \in C$ چنانکه: $F(x,y) \geq 0 \quad \forall y \in C$.

مجموعه‌ی جواب‌های مسئله‌ی فوق را با $EP(F)$ نشان می‌دهیم. حال با فرض اینکه $T: C \longrightarrow H$ یک نگاشت باشد، قرار می‌دهیم: $F(x,y) =< Tx, y-x >$. در اینصورت می‌بینیم $z \in EP(F)$ اگروتنهااگر: $< Tz, y-z > \geq 0$، یعنی اینکه z جواب مسئله‌ی نامساوی تغییراتی برای نگاشت T باشد.

حال برخی لم‌ها را یادآوری می‌کنیم که از آنها مکرراً استفاده خواهیم کرد.

لم ۲۷.۴.۱ .(اصل نیم‌بسته بودن)[۳] فرض کنیم X فضای باناخ انعکاسی باشد که در خاصیت اپیل صدق می‌کند. همچنین $C \subseteq X$ ناتهی، بسته و محدب باشد و $T: C \longrightarrow X$ نگاشتی غیرانبساطی باشد. در اینصورت نگاشت $I-T$ نیم بسته است. یعنی،

$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ x_n - Tx_n \to y \end{cases}$ نتیجه می‌دهد: $(I-T)x = y$.

برهان.ر.ک. [5].

تذکر ۲۸.۴.۱ . در حالتی که فضا بطور یکنواخت محدب باشد باز هم حکم بالا برقرار است.

---

[۱] Opial's condition

[۲] equilibrium problem

[۳] Demiclosedness Principle

لم ۲۹.۴.۱ . فرض کنیم $C \subseteq H$ ناتهی بسته و محدب باشد. همچنین $S_۱$ و $S_۲$ نگاشت‌هایی غیرانبساطی از C به C باشند بطوریکه $F(S_۱)\bigcap F(S_۲) \neq \emptyset$. آنگاه برای هر ثابت $\delta \in (۰,۱)$ نگاشت $S : C \longrightarrow C$ با ضابطه‌ی $Sx = \delta S_۱x + (۱-\delta)S_۲x$، غیرانبساطی است و داریم: $F(S) = F(S_۱)\bigcap F(S_۲)$.

برهان.ر.ک. [6].

لم ۳۰.۴.۱ . فرض کنیم $\{\alpha_n\} \subset (۰,۱)$، $\{a_n\},\{c_n\} \subseteq [۰,\infty)$، و $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$ دنباله‌هایی باشند که اولاً $a_{n+۱} \leq (۱-\alpha_n)a_n + b_n + c_n \quad ; \quad n \geq ۰$ و ثانیاً $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n < \infty$ آنگاه:

الف) اگر $M \geq ۰$ موجود باشد بطوریکه، $b_n \leq \alpha_n M$، دنباله $\{a_n\}$ کرانداراست.

ب) اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} \alpha_n = \infty$ و $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} \leq ۰$ خواهیم داشت: $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$

برهان.ر.ک. [7].

لم ۳۱.۴.۱ . فرض کنیم $\{a_n\},\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشند بطوریکه: $a_{n+۱} \leq a_n + b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n < \infty$ آنگاه: $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودست.

برهان.ر.ک. [8].

لم ۳۲.۴.۱ . فرض کنیم $۱ < q \leq ۲$ و X یک فضای باناخ باشد. آنگاه X بطوریکنواخت هموار با درجه همواری q است اگروتنهااگر ثابت $K \geq ۱$ موجود باشد بطوریکه:

$$\frac{۱}{۲}\{\|x+y\|^q + \|x-y\|^q\} \leq \|x\|^q + \|Ky\|^q \qquad \forall x,y \in X$$

برهان.ر.ک. [9].

تعریف ۳۳.۴.۱ . بهترین K در لم فوق را ثابت همواری گوییم.

لم ۳۴.۴.۱ . فرض کنیم X یک فضای باناخ هموار با ضریب همواری $q = ۲$ و ثابت همواری K باشد. آنگاه:

$$\|x+y\|^۲ \leq \|x\|^۲ + ۲ < y, Jx > + ۲\|Ky\|^۲ \quad ; \quad \forall x,y \in X$$

برهان.ر.ک.[10].

لم ۳۵.۴.۱ . فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی هموار باشد. آنگاه:

$\|x+y\|^{2} \leq \|x\|^{2}+2 < y, J(x+y) > \quad ; \quad \forall x, y \in X$.

برهان.ر.ک.[3].

درحالتیکه $X = H$ یک فضای هیلبرت باشد نامساوی فوق بصورت زیر برقرار است:

$\|x+y\|^{2} \leq \|x\|^{2}+2 < y, x+y > \quad ; \quad \forall x, y \in X$.

لم ۳۶.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باضرب داخلی $< .,. >$ و نرم $\|.\|$ باشد. آنگاه:

$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^{2} = \alpha\|x\|^{2} + (1-\alpha)\|y\|^{2} - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^{2} \quad ; \quad \forall x, y \in H, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

برهان.ر.ک. [3].

لم ۳۷.۴.۱ . فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی کراندار در فضای باناخ X و $\{\beta_n\}$ دنباله‌ای در $[0,1]$ با خاصیت $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$ باشد. همچنین فرض کنیم $x_{n+1} = (1-\beta_n)y_n + \beta_n x_n$ و داشته باشیم: $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$ آنگاه: $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.

برهان.ر.ک.[۱۱].

برای حل مسائل تعادلی مربوط به یک نگاشت F، فرض خواهیم کرد F در خواص زیر صدق کند:

(A_1) برای هر $x \in C$ داشته باشیم: $F(x,x) = 0$،

(A_2) نگاشت F یکنوا باشد. یعنی برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم: $F(x,y) + F(y,x) \leq 0$،

(A_3) برای هر $x, y, z \in C$ داشته باشیم: $\lim_{t\to 0^+} F(tz + (1-t)x, y) \leq F(x,y)$،

(A_4) برای هر $x \in C$ نگاشت $y \longmapsto F(x,y)$ محدب و نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.

لم ۳۸.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $C \subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. همچنین $F : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی دو متغییره باشد که در خواص A_1 تا A_4 صدق می‌کند. در اینصورت با فرض

اینکه $r > ۰$ و $x \in H$، نقطه‌ای مانند $z \in C$ هست بطوریکه:

$$F(z, y) + \frac{۱}{r} < y - z, z - x > \geq ۰; \quad \forall y \in C$$

برهان. ر.ک. [۱۲].

لم ۳۹.۴.۱ . فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $C \subseteq H$ ناتهی، بسته و محدب باشد. همچنین $F : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی دو متغیره باشد که در خواص $A_۱$ تا $A_۴$ صدق می‌کند. برای $r > ۰$ و $x \in H$ نگاشت $T_r : H \longrightarrow C$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_r x = \{z \in C : F(z, y) + \frac{۱}{r} < y - z, z - x > \geq ۰; \quad \forall y \in C\}$$

در اینصورت:

(۱) نگاشت T_r تک‌مقداری است.

(۲) نگاشت T_r قویاًغیرانبساطی است. یعنی برای هر $x, y \in H$ داریم:

$$\|T_r x - T_r y\|^۲ \leq < T_r x - T_r y, x - y >$$

(۳) $F(T_r) = EP(F)$.

(۴) مجموعه‌ی $EP(F)$ بسته و محدب است.

برهان. ر.ک. [۱۳].

فصل ۲

الگوریتم‌های تکراری در فضاهای هیلبرت

۱.۲ همگرایی سریعترین روش پیوندی برای نامساوی‌های تغییراتی

در این بخش الگوریتم تکراری پیوندی [۱] را معرفی کرده و مناسب‌ترین محدودیت‌ها برای همگرایی این روش را ارائه خواهیم داد. در واقع مانند آنچه در فضاهای باناخ دیدیم، تحت شرایطی روی نگاشت F مجموعه‌ی $VI(F,C)$ تک‌نقطه‌ایست. نشان خواهیم داد دنباله‌ی تکراری نوع پیوندی همگرای قوی به این نقطه است.

تعریف ۱.۱.۲ . روش هیبربدی که اولین‌بار توسط یامادا [۲] معرفی شد، الگوریتمی تکراری بصورت زیر است:

$$u_{n+1} = Tu_n - \lambda_{n+1}\mu F(Tu_n) \qquad (۱.۱.۲)$$

که در آن T نگاشتی غیر انبساطی و F نگاشتی k لیپشیتزی و قویاً یکنوا با توان η و $\mu \in (0, \frac{2\eta}{k^2})$ عددی ثابت و مثبت است و λ_n نیز دنباله‌ای در $(0,1)$ است. در اینصورت با فرض اینکه $C = F(T)$ و دنباله‌ی $\{\lambda_n\}$ در خواص زیر صدق،

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \qquad L_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty \qquad L_2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}^2}) = 0 \qquad L_3$$

یامادا نشان داد [۴] الگوریتم فوق به یکتا جواب مسئله‌ی $VI(F,C)$ همگرای قوی است. در این بخش نشان خواهیم داد شرط L_3 را می‌توان بصورت زیر تعدیل کرد و باز همان همگرایی قوی را بدست آورد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = 1 \qquad L_3'$$

یا بطور معادل: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}} = 0$.

واضح است شرط L_3' شرطی ضعیف‌تر از L_3 است. بعنوان مثال دنباله‌ی $\{\frac{1}{n}\}$ در L_3' صدق می‌کند، در

[۱] Hybrid Steepest-Descent Method

[۲] Yamada

حالیکه در $L_۳$ صدق نمی‌کند. حال برای اثبات قضیه به لم زیر نیازمندیم:

لم ۲.۱.۲ . فرض کنیم نگاشت T و F و ضرایب λ و μ همان‌هایی باشند که در تعریف (۱.۱.۲) ارائه شدند. اگر نگاشت $T^\lambda : H \longrightarrow H$ را با ضابطه‌ی $T^\lambda x = Tx - \lambda\mu F(Tx)$ تعریف کنیم، آنگاه T^λ یک انقباض است و رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\|T^\lambda x - T^\lambda y\| \leq (۱ - \lambda\tau)\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in H$$

که در آن، $\tau = ۱ - \sqrt{۱ - \mu(۲\eta - \mu k^۲)} \in (۰, ۱)$.

برهان.ر.ک. [۴].

قضیه ۳.۱.۲ . فرض کنیم $\{u_n\}$ دنباله‌ی تعریف شده توسط رابطه‌ی (۱.۱.۲) باشد. همچنین T و F نگاشت‌های تعریف (۱.۱.۲) باشند و $\{\lambda_n\}$ در خواص $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳'$ صدق کند. دراینصورت $\{u_n\}$ همگرای قوی به یکتا جواب $VI(F, C) = \{x^*\}$ خواهد بود.

اثبات را در ٦ مرحله ارائه می‌دهیم.

گام اول: $\{u_n\}$ کراندار است.

برهان. در واقع باتوجه به اینکه، $T^\lambda u^* = u^* - \lambda\mu F u^*$ و بنابر لم قبل داریم:

$$\begin{aligned}
\|u_{n+۱} - u^*\| &= \|T^{\lambda_{n+۱}} u_n - u^*\| \\
&\leq \|T^{\lambda_{n+۱}} u_n - T^{\lambda_{n+۱}} u^*\| + \|T^{\lambda_{n+۱}} u^* - u^*\| \\
&\leq (۱ - \lambda_{n+۱}\tau)\|u_n - u^*\| + \lambda_{n+۱}\mu\|Fu^*\|
\end{aligned}$$

لذا بسادگی و با استقرا می‌بینیم که: $\forall n \geq ۰ \quad \|u_n - u^*\| \leq \max\{\|u_۰ - u^*\|, \frac{\mu}{\tau}\|Fu^*\|\}$.

گام دوم: $\|u_{n+۱} - Tu_n\| \to ۰$.

برهان. در واقع با توجه به گام اول دنباله‌ی $\{F(Tu_n)\}$ کراندار است و در نتیجه:

$$\|u_{n+۱} - Tu_n\| = \lambda_n\mu\|F(Tu_n)\| \to ۰$$