دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - آنالیز

تئوری نقطه ثابت در فضاهای مدولار

استاد راهنما

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور

دکتر طیبه لعل شاطری

نگارنده

بهاره آزادی‌فر

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

سپاس بیکران بر همدلی، همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم که سجده ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهر بارش لحظه‌های مهربانی را به من آموخت.

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

خدای را سپاس که اندیشه را آفرید و آن را سفیر عقل و عقل را مرکب روح ساخت تا به اتفاق، آدمی را در مسیر کمال سر منزل مقصود رهنمون سازند.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر صادقی

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل دوره ارشد از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد عزیزم **خانم دکتر طیبه لعل شاطری** که زحمات زیادی در به نتیجه رسیدن این پایان نامه بر عهده داشتند و دلسوزانه مرا در این مهم راهنمایی کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از رئیس محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مقدسی که افتخار شاگردیشان را نیز داشتم، سپاسگزارم و آرزوی موفقیت و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

بهاره آزادی‌فر

چکیده

نام خانوادگی : آزادی‌فر **نام :** بهاره

عنوان پایان نامه : تئوری نقطه ثابت در فضاهای مدولار

استاد راهنما : دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور: دکتر طیبه لعل شاطری

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز

محل تحصیل: دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ماه ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۱۰۲

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، نقطه ثابت مشترک، نگاشت انقباضی، شبه‌انقباض، انقباض مجانبی، انقباض نقطه‌ای مجانبی، فضاهای مدولار، فضاهای تابع مدولار و متریک مدولار.

چکیده: در این پایان‌نامه ابتدا به بیان برخی مفاهیم اولیه مانند فضاهای مدولار، تابع مدولار و متریک مدولار؛ همچنین قضیه‌هایی چون معادل بودن $\rho-$ همگرایی و همگرایی نرم می‌پردازیم.

هدف این پایان‌نامه بررسی نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های انقباضی است. قضیه نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک را با در نظر گرفتن شرایط مختلف چون شرط Δ_2، خاصیت فاتو، پیوستگی یکنواخت و ... روی ρ برای نگاشت‌های انقباضی، شبه‌انقباضی و ... بررسی می‌شود. در پایان مطالب گفته شده در فضای متریک مدولار تعمیم داده می‌شود.

پیشگفتار

از جمله مباحثی که در اثبات بسیاری از قضایای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، مبحث نقطه ثابت است. تئوری فضای مدولار توسط ناکانو [۱] در سال ۱۹۵۰ مطرح گردید سپس موزیلاک - اُرلیخ [۲] در ۱۹۵۹ آن را تعمیم و گسترش دادند. ریاضیدانانی چون سریچ [۳]، بوید و وانگ [۴]، کیرک [۵] و ... قضیه نقطه ثابت را برای نگاشت‌های شبه‌انقباضی، انقباض غیرخطی، انقباض مجانبی و ... در فضای متریک بیان و اثبات نمودند. جونگ نگاشت‌های سازگار و نقطه ثابت مشترک برای آن‌ها و برانسیری [۶] نقطه ثابت را برای یک نگاشت همانند اصل انقباض باناخ برای نامساوی از نوع انتگرال مطرح و بیان نمودند. ویجایاراجو [۷] وجود و یکتایی نقطه ثابت مشترک برای زوج نگاشت‌های انقباضی از نوع انتگرال را؛ رازانی [۸] و مرادی [۹] قضیه نقطه ثابت مشترک از نوع انتگرال را در فضای مدولار بیان نمودند. در سال ۲۰۱۰، چستیاکف [۱۰] فضای متریک مدولار را معرفی نمود.

وجود نقطه ثابت تاکنون برای بسیاری از نگاشت‌ها بررسی شده است، در این پایان‌نامه به بررسی نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای مدولار، تابع مدولار و متریک مدولار می‌پردازیم که مشتمل بر چهار فصل است.

---

[۱] Nakano
[۲] Musielak-Orlicz
[۳] Ćirić
[۴] Boyd-Wong
[۵] Kirk
[۶] Branciari
[۷] Vijayaraju
[۸] Razani
[۹] Moradi
[۱۰] Chistyakov

در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی که در مطالعه فصول دیگر به آن‌ها نیازمندیم، پرداخته می‌شود و در سه بخش تنظیم گردیده است. بخش اول، فضای مدولار و تعاریفی چون همگرایی، کرانداری و ... ؛ در بخش دوم و سوم، مفاهیم بخش قبل در فضاهای تابع مدولار و متریک مدولار معرفی می‌شود.

در فصل دوم که برگرفته از مقاله‌های

1. M. A. Khamsi, *Quasicontraction mapping in modular spaces without* Δ_2*- condition*, Fixed Point Theory and Application (2008).
2. A. Razani, E. Nabizadeh, M. Beyg Mohamadi and S. Homaei Pour, *Fixed point of nonlinear and asymptotic contractions in the modular space*, Abstr. Appl. Anal. Article ID 40575, 10 (2007).
3. A. Razani and R. Moradi, *Common fixed point theorems of integral type in modular spaces*, Bull. Iranian Math. Sci. 35, no. 2 (2009), 11-24.
4. C. Mongkolkeha and P. Kuman, *Fixed point and common fixed point theorems for generalized weak contraction mappings of integral type in modular space*, Int. J. Math. Sci, vol 2011, 1-12.

است به بیان و اثبات قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های شبه‌انقباضی، انقباض غیرخطی، انقباض مجانبی و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت سازگار انقباضی و انقباض تعمیم‌یافته ضعیف از نوع انتگرال پرداخته می‌شود.

در فصل سوم که برگرفته از مقاله

M. A. Khamsi, W. M. Kozlowski, *On asymptotic pointwise contractions in modular function*

spaces, Nonlinear Anal. 73 (2010), 2957-2967.

است، قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباض مجانبی و انقباض نقطه‌ای مجانبی در فضاهای تابع مدولار مطرح و اثبات می‌گردد.

در فصل چهارم قضایای نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های انقباض مجانبی و انقباضی از نوع انتگرال در فضاهای متریک مدولار پرداخته که شامل مقاله‌های زیر است.

1. B. Azadifar, Gh. Sadeghi, R. Saadati, C. Park, *Fixed point theorem of nonlinear and asymptotic contraction in modular metric spaces*, Submited.

2. B. Azadifar, Gh. Sadeghi, R. Saadati, Y. J. Cho, *Common fixed point theorem of integral type in modular metric spaces*, Submited.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول، مفاهیم و قضایای مقدماتی در فضاهای مدولار؛ بخش دوم، مفاهیم مقدماتی در فضاهای تابع مدولار و در بخش پایانی، تعاریف و مثال‌هایی در فضاهای متریک مدولار بیان می‌شود.

۱.۱ فضاهای مدولار

در این بخش، تعاریف و مثال‌هایی از فضاهای مدولار و قضایای مقدماتی بیان می‌گردد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ تابع $\rho : X \longrightarrow [0,\infty]$ را مدولار[۱] گوئیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\rho(x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

۲. $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ هرگاه $|\alpha| = 1$؛

۳. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ هرگاه $\alpha, \beta \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$.

۴. اگر شرط $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$ برای $\alpha, \beta \geq 0$ و $\alpha^s + \beta^s = 1$ که $s \in (0,1]$ جایگزین

[۱] Modular

شرط (۳) شود ρ را مدولار s–محدب [۲] و برای $s = 1$ مدولار محدب [۳] نامیم.

مثال ۲.۱. فرض کنید $X = L^p([a,b])$، در این صورت

$$\rho(x) = \int_a^b |x|^p dm$$

برای $0 < p < 1$، p–مدولار محدب و برای $p \geq 1$ یک مدولار محدب روی X است.

تعریف ۳.۱. اگر ρ یک مدولار روی X باشد آن‌گاه

$$X_\rho = \{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\},$$

فضای مدولار [۴] نامیده می‌شود.

نکته ۴.۱. ρ تابعی صعودی است. فرض کنید $0 < a < b$ در این صورت با استفاده از شرط (۳) تعریف مدولار و قرار دادن $y = 0$ داریم

$$\rho(ax) = \rho\left(\frac{a}{b}(bx)\right) \leq \rho(bx).$$

تعریف ۵.۱. تابعی $|.| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را $F-$ نرم [۵] گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $|x| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$،

۲. $|x| = |\alpha x|$ هرگاه α یک اسکالر باشد و $|\alpha| = 1$،

۳. $|x + y| \leq |x| + |y|$،

۴. اگر برای هر دنباله $\{x_k\} \subseteq X$ که $|x_k - x| \longrightarrow 0$ و $\alpha_k \longrightarrow \alpha$ آن‌گاه $|\alpha_k x_k - \alpha x| \longrightarrow 0$.

---

[۲] s- Convex modular
[۳] Convex modular
[۴] Modular space
[۵] F- Norm

$s-$ نرم، یک $F-$ نرم با شرط $|\alpha x| = |\alpha|^s|x|$ است.

قضیه ۶.۱. اگر ρ یک مدولار در X باشد آن‌گاه

$$|x|_\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \alpha\right\}$$

یک $F-$ نرم در X_ρ است و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱. اگر برای هر $\lambda > 0$ و $x_1, x_2 \in X_\rho$، $\rho(\lambda x_1) \leq \rho(\lambda x_2)$ آن‌گاه $|x_1|_\rho \leq |x_2|_\rho$،

۲. اگر $x \in X_\rho$ آن‌گاه برای $\alpha \geq 0$، تابع $|\alpha x|_\rho$ نانزولی [۶] است،

۳. اگر $|x|_\rho < 1$، آن‌گاه $\rho(x) \leq |x|_\rho$.

اگر ρ یک $s-$ مدولار محدب و $0 < s \leq 1$ آن‌گاه

$$\|x\|_\rho^s = \inf\left\{\alpha > 0 : \rho\left(\frac{x}{\alpha^{\frac{1}{s}}}\right) \leq 1\right\}$$

یک $s-$ نرم در X است و ویژگی‌های (۳)-(۱) اگر $\|x\|_\rho^s$ جایگزین $|x|_\rho$ شود، همچنین برای نرم لوگزامبرگ [۷] ($\|x\|_\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1\right\}$) نیز برقرار می‌باشند.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۵ مرجع [۲۰] رجوع کنید. □

قضیه ۷.۱. فرض کنید ρ یک مدولار در X باشد. اگر $x \in X_\rho$ و $x_k \in X_\rho$ برای $k = 1, 2, \ldots$ آن‌گاه همگرایی $\lim_{k\to\infty} |x_k - x|_\rho = 0$ هم‌ارز همگرایی $\lim_{k\to\infty} \rho(\lambda(x_k - x)) = 0$ برای هر $\lambda > 0$ است. اگر $x_k \in X_\rho$ برای $k = 1, 2, \cdots$ آن‌گاه $\{x_k\}_k$ با توجه به $F-$ نرم $|.|_\rho$ یک دنباله کوشی در فضای X_ρ است اگر و تنها اگر برای هر $\lambda > 0$ وقتی $k, l \to \infty$، $\rho(\lambda(x_k - x_l)) \longrightarrow 0$. اگر ρ یک $s-$ مدولار محدب در X باشد، آن‌گاه با جایگزین کردن $\|x\|_\rho^s$ مطالب گفته شده برقرار است.

---
[۶] Nondecreasing
[۷] Luxemburg norm

برهان. به قضیه‌ی ۱.۶ مرجع [۲۰] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۱. فرض کنید (X,ρ) فضای مدولار باشد:

۱. دنباله‌ی $\{x_n\}_n \subseteq X_\rho$، $\rho-$ همگرا [۸] به $x \in X_\rho$ گوئیم، هرگاه $\rho(x_n-x) \longrightarrow 0$ هنگامی که $n \longrightarrow \infty$.

۲. دنباله‌ی $\{x_n\}_n \subseteq X_\rho$، $\rho-$کوشی [۹] گوئیم، هرگاه $\rho(x_n - x_m) \longrightarrow 0$ هنگامی که $n,m \longrightarrow \infty$.

۳. مجموعه‌ی $C \subseteq X_\rho$، $\rho-$ بسته [۱۰] گوئیم، هرگاه $\rho-$ حد یک دنباله در C، $\rho-$ همگرا به عضوی از C باشد. $\overline{C}^\rho$ را بستار [۱۱] C در مفهوم ρ گوئیم.

۴. مجموعه‌ی $C \subseteq X_\rho$، $\rho-$ کامل [۱۲] نامیده می‌شود، هرگاه هر دنباله‌ی $\rho-$ کوشی در C، $\rho-$ همگرا به عضوی از C باشد.

۵. مجموعه‌ی $C \subseteq X_\rho$ را $\rho-$ فشرده [۱۳] گوئیم، هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در C، زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$، $\rho-$ همگرا به $x \in C$ باشد.

۶. مجموعه‌ی $C \subseteq X_\rho$ را $\rho-$ کراندار [۱۴] گوئیم، هرگاه

$$\delta_\rho(C) = \sup\{\rho(x-y);\ x,y \in C\} < \infty$$

که $\delta_\rho(C)$، $\rho-$ قطر [۱۵] مجموعه C نامیده می‌شود.

۷. فرض کنید $x \in X_\rho$ و $C \subseteq X_\rho$، $\rho-$ فاصله [۱۶] بین x و C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_\rho(x,C) = \inf\{\rho(x-y);\ y \in C\}$$

---

[۸] Convergent
[۹] Cauchy
[۱۰] Closed
[۱۱] Closure
[۱۲] Complete
[۱۳] Compact
[۱۴] Bounded
[۱۵] Diameter
[۱۶] Distance

تعریف ۹.۱. برای هر $x, y \in X_\rho$، ρ خاصیت فاتو [۱۷] دارد، هرگاه

$$\rho(x-y) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n - y_n)$$

در صورتی که $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x) = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n - y) = 0$.

ملاحظه ۱۰.۱. ρ در خاصیت فاتو صدق می‌کند، اگر و تنها اگر برای هر $x \in X_\rho$ و $r \geq 0$، $\rho-$ گوی[۱۸] $B_\rho(x,r) = \{y \in X_\rho : \ \rho(x-y) \leq r\}$، $\rho-$ بسته باشد.

برهان. فرض کنید $x_n \in B_\rho(0,r)$ که $\rho(x_n - x) \longrightarrow 0$ ثابت می‌کنیم $x \in B_\rho(0,r)$. چون $\rho(x_n) \leq r$ و ρ خاصیت فاتو دارد لذا $\rho(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n) \leq r$. در نتیجه $x \in B_\rho(0,r)$.
بالعکس: فرض کنید $x_n, x \in B_\rho(0,r)$ به طوری که $r = \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n)$. چون $\rho-$ گوی بسته است $\rho(x) \leq r$؛ به عبارت دیگر $\rho(x) \leq r = \liminf_{n\to\infty} \rho(x_n)$. □

تعریف ۱۱.۱. ρ در شرط Δ_2 صدق می‌کند اگر $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \rho(2x_n) = 0.$$

قضیه ۱۲.۱. همگرایی نرم، $\rho-$همگرایی را نتیجه می‌دهد.
همگرایی نرم و $\rho-$ همگرایی در X_ρ معادلند اگر و تنها اگر ρ در شرط Δ_2 صدق کند.

برهان. به صفحه‌ی ۱۸ مرجع [۲۰] رجوع کنید. □

مثال ۱۳.۱. فرض کنید $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ تابعی نانزولی و برای هر $t \geq 0$، پیوسته باشد، $\varphi(0) = 0$ و برای هر $t > 0$، $\varphi(t) > 0$ و هنگامی که t به سمت بی‌نهایت میل کند $\varphi(t) \longrightarrow \infty$. همچنین (Ω, Σ, μ) یک فضای اندازه باشد و X فضای توابع حقیقی (مختلط) مقدار $\mu - a.e.$ متناهی و $\Sigma-$ اندازه‌پذیر باشد،

[۱۷] Fatou property
[۱۸] Ball

در این صورت

$$\rho_\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(|x(t)|)d\mu \quad (x \in X)$$

یک مدولار روی X است. فضای مدولار تولید شده توسط مدولار ρ_φ را فضای اُرلیخ[۱۹] گوئیم و با نماد L^φ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ فضاهای تابع مدولار

در این بخش با مفاهیمی چون تابع محدب منظم شبه‌مدولار، همگرایی، کوشی بودن و غیره آشنا می‌شویم. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و Σ، $\sigma-$ جبر نابدیهی از زیر مجموعه‌های Ω و $\mathcal{P}$ یک $\delta-$ حلقه از زیر مجموعه‌های Ω به طوری که برای هر $E \in \mathcal{P}$ و $A \in \Sigma$، $E \cap A \in \mathcal{P}$ باشد. فرض کنید دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های $K_n \in \mathcal{P}$ به طوری که $\Omega = \bigcup K_n$ وجود دارد. فضای خطی همه‌ی توابع ساده با تکیه‌گاه‌هایی از $\mathcal{P}$ را با $\mathcal{E}$ و فضای همه توابع اندازه‌پذیر گسترش یافته را با $\mathcal{M}_\infty$ نمایش می‌دهیم. (به عبارت دیگر $\mathcal{M}_\infty$ مجموعه توابع $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ به طوری که دنباله $\{g_n\} \subset \mathcal{E}$ وجود دارد که $|g_n| \leq |f|$ و برای هر $\omega \in \Omega$، $g_n(\omega) \to f(\omega)$). تابع مشخصه مجموعه A را با 1_A نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید $\rho : \mathcal{M}_\infty \longrightarrow [0, \infty]$ تابع زوج و محدب باشد. ρ را تابع محدب منظم شبه‌مدولار[۲۰] گوئیم هرگاه شرایط زیر را داشته باشد:

۱. $\rho(0) = 0$؛

۲. اگر برای هر $\omega \in \Omega$ و $f, g \in \mathcal{M}_\infty$، $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ آن‌گاه $\rho(f) \leq \rho(g)$؛ (ρ یکنواست[۲۱])

۳. برای هر $f \in \mathcal{M}_\infty$ و $A, B \in \Sigma$ به طوری که $A \cap B \neq \emptyset$ داشته باشیم $\rho(f1_{A\cup B}) \leq \rho(f1_A) + \rho(f1_B)$؛ ($\rho$ متعامد زیرجمعی[۲۲] است)

---
[۱۹] Orlicz space
[۲۰] Regular convex function pseudomodular
[۲۱] Monotone
[۲۲] Orthogonally subadditive

۴. اگر برای هر $\omega \in \Omega$ و $f \in \mathcal{M}_\infty$، $|f_n(\omega)| \uparrow |f(\omega)|$ آن‌گاه $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$؛ ($\rho$ خاصیت فاتو دارد)

۵. اگر $g_n \in \mathcal{E}$ و $|g_n(\omega)| \downarrow 0$ آن‌گاه $\rho(g_n) \downarrow 0$. (ρ پیوسته ترتیبی[۲۳] در $\mathcal{E}$ است)

مجموعه $A \in \Sigma$ را $\rho-$ صفر[۲۴] گوئیم، هرگاه برای هر $g \in \mathcal{E}$، $\rho(g1_A) = 0$. همچنین خاصیت $P(\omega)$، $\rho - a.e.$ برقرار است هرگاه مجموعه $\{\omega \in \Omega;$ برقرار نباشد $P(\omega)$ خاصیت$\}$، $\rho-$ صفر باشد.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید ρ تابع منظم شبه‌مدولار باشد.

۱. ρ را تابع محدب منظم نیم‌مدولار[۲۵] گوئیم اگر برای هر $\alpha > 0$، $\rho(\alpha f) = 0$ آن‌گاه $f = 0 \ \rho - a.e.$؛

۲. ρ را تابع محدب منظم مدولار[۲۶] گوئیم اگر $\rho(f) = 0$ آن‌گاه $f = 0 \ \rho - a.e.$؛

رده‌ی همه توابع ناصفر محدب منظم مدولار تعریف شده روی Ω را با $\Re$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۱۶.۱. فرض کنید $\rho \in \Re$. مفاهیمی چون فضای تابع مدولار (L_ρ)، نرم لوگزامبرگ ($\|.\|_\rho$)، شرط Δ_2، خاصیت فاتو، همگرایی و غیره، مشابه بخش قبل تعریف می‌شود.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید $C \subset L_\rho$ زیر مجموعه ناتهی و $\rho-$ بسته باشد. تابع $\lambda : C \longrightarrow [0, \infty]$ را $\rho-$ نیم‌پیوسته پایینی [۲۷] (بالایی[۲۸]) گوئیم، هرگاه برای هر $\alpha > 0$، مجموعه $C_\alpha = \{f \in C;\ \lambda(f) \leq \alpha\}$، ($C_\alpha = \{f \in C;\ \lambda(f) \geq \alpha\}$) $\rho-$ بسته باشد.

توجه کنید که $\rho-$ نیم‌پیوسته پایینی(بالایی) معادل شرط $\lambda(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda(f_n)$ ($\limsup_{n\to\infty} \lambda(f_n) \leq \lambda(f)$) هرگاه برای $f, f_n \in C$، $\rho(f_n - f) \longrightarrow 0$.

گزاره ۱۸.۱. تعریف کنید $L_\rho^\circ = \{f \in L_\rho;$ پیوسته ترتیبی باشد $\rho(.)\}$ و

[۲۳] Order continuous
[۲۴] Null
[۲۵] Regular convex function semimodular
[۲۶] Regular convex function modular
[۲۷] Lower semicontinuos
[۲۸] Upper semicontinuos

$E_\rho = \{f \in L_\rho ; \lambda f \in L_\rho^\circ \quad (\lambda > 0)\}$ در این صورت داریم

$$E_\rho \subset L_\rho^\circ \subset L_\rho .$$

برهان. ر. ک. به [۱۶]. □

گزاره ۱۹.۱. فرض کنید $\rho \in \Re$.

۱. L_ρ، $\rho-$ کامل است.

۲. $\rho-$ گوی $B_\rho(f,r)$، $\rho-$ بسته است.

برهان.

۱. چون $\rho \in \Re$ لذا خاصیت فاتو دارد. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد و $\{f_n\}_n$ دنباله‌ای $\rho-$کوشی باشد، در این صورت زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ و fای وجود دارد به طوری که $\rho - a.e \quad f_{n_k} \longrightarrow f$. با توجه به لم فاتو برای nهای به اندازه کافی بزرگ

$$\rho(f - f_n) \leq \liminf \rho(f_{n_k} - f_n) \leq \varepsilon .$$

بنابراین $\rho(f_n - f) \longrightarrow 0$.

۲. فرض کنید $f_n \in B_\rho(f,r)$ که $\rho(f_n - g) \longrightarrow 0$ ثابت می‌کنیم $g \in B_\rho(f,r)$. چون ρ خاصیت فاتو دارد لذا

$$\rho(g - f) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(f_n - f) \leq r .$$

در نتیجه $g \in B_\rho(f,r)$.

□

۳.۱ فضاهای متریک مدولار

در این بخش تعاریف و مثال‌هایی از فضاهای متریک مدولار[۲۹] مطرح می‌گردد.

تعریف ۲۰.۱. تابع $\omega : (0,\infty) \times X \times X \longrightarrow [0,\infty]$ را متریک مدولار روی مجموعه X گوئیم، هرگاه برای هر $x,y,z \in X$ و شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر $\lambda > 0$، $\omega_\lambda(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$؛

۲. برای هر $\lambda > 0$، $\omega_\lambda(x,y) = \omega_\lambda(y,x)$؛

۳. برای هر $\lambda, \mu > 0$، $\omega_{\lambda+\mu}(x,y) \leq \omega_\lambda(x,z) + \omega_\mu(z,y)$.

اگر به جای شرط اول برای هر $x \in X$ و $\lambda > 0$، $\omega_\lambda(x,x) = 0$ آن‌گاه ω را شبه‌متریک مدولار گوئیم.

ملاحظه ۲۱.۱. برای هر $x,y \in X$، تابع $0 < \lambda \mapsto \omega_\lambda(x,y) \in [0,\infty]$ روی $(0,\infty)$ نانزولی است. در حقیقت اگر $0 < \mu < \lambda$ برای هر $x,y \in X$ آن‌گاه

$$\omega_\lambda(x,y) \leq \omega_{\lambda-\mu}(x,x) + \omega_\mu(x,y) = \omega_\mu(x,y).$$

برای هر $\lambda > 0$ روی $[0,\infty]$ حد راست و چپ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_{\lambda+0}(x,y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \omega_{\lambda+\varepsilon}(x,y)$$

و

$$\omega_{\lambda-0}(x,y) = \lim_{\varepsilon \to +0} \omega_{\lambda-\varepsilon}(x,y).$$

لذا برای هر $x,y \in X$ نامساوی

$$\omega_{\lambda+0}(x,y) \leq \omega_\lambda(x,y) \leq \omega_{\lambda-0}(x,y).$$

بر قرار است.

[۲۹] Modular metric space

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید $x_0 \in X$، فضای متریک

$$X_\omega = \{x \in X : \lim_{\lambda \to \infty} \omega_\lambda(x, x_0) = 0\}$$

که متر آن به صورت زیر

$$d^\circ_\omega(x,y) = \inf\{\lambda > 0 : \omega_\lambda(x,y) \leq \lambda\} \quad (x, y \in X_\omega),$$

تعریف می‌شود یک فضای مدولار نامیده می‌شود.

قضیه ۲۳.۱. اگر X فضای خطی حقیقی، $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ و برای هر $x, y \in X$ و $\lambda > 0$

$$\omega_\lambda(x,y) = \rho\left(\frac{x-y}{\lambda}\right)$$

آن‌گاه ρ یک مدولار روی X است اگر وتنها اگر ω متریک مدولار روی X باشد.

برهان. فرض کنید ρ یک مدولار باشد ثابت می‌کنیم ω یک متریک مدولار است. شرط ۱ و ۲ به سادگی اثبات می‌شود. شرط ۳: برای هر $x, y \in X$ و $\lambda, \mu > 0$ داریم

$$\begin{aligned}
\omega_{\lambda+\mu}(x,y) &= \rho\left(\frac{x-y}{\lambda+\mu}\right) \\
&= \rho\left(\frac{x-z+z-y}{\lambda+\mu}\right) \\
&= \rho\left(\frac{x-z}{\lambda+\mu} + \frac{z-y}{\lambda+\mu}\right) \\
&= \rho\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.\frac{x-z}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.\frac{z-y}{\mu}\right) \\
&\leq \rho\left(\frac{x-z}{\lambda}\right) + \rho\left(\frac{z-y}{\mu}\right) \\
&= \omega_\lambda(x,z) + \omega_\mu(z,y).
\end{aligned}$$

بالعکس: فرض کنید ω یک متریک مدولار باشد ثابت می‌کنیم ρ یک مدولار است. شرط ۱ و ۲ به سادگی اثبات می‌شود. شرط ۳: برای هر $x,y \in X$ و $\alpha,\beta > 0$ که $\alpha+\beta=1$ داریم:

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha x+\beta y) &= \rho\left(\frac{(\lambda+\mu)(\alpha x+\beta y)}{\lambda+\mu}\right)\\
&= \omega_{\lambda+\mu}\left((\lambda+\mu)(\alpha x+\beta y),0\right)\\
&\leq \omega_{\lambda}\left((\lambda+\mu)\alpha x+(\lambda+\mu)\beta y,(\lambda+\mu)\beta y\right)+\omega_{\mu}\left((\lambda+\mu)\beta y,0\right)\\
&= \rho\left(\frac{(\lambda+\mu)\alpha x+(\lambda+\mu)\beta y-(\lambda+\mu)\beta y}{\lambda}\right)+\rho\left(\frac{(\lambda+\mu)\beta y}{\mu}\right)\\
&= \rho\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}.\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x\right)+\rho\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}.\frac{\mu}{\lambda+\mu}y\right)\\
&= \rho(x)+\rho(y).
\end{aligned}$$

که در آن $\alpha=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ و $\beta=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. □

در ادامه مثال‌های ساده‌ای از متریک مدولار روی مجموعه X بیان می‌کنیم.

مثال ۲۴.۱. فرض کنید $\lambda > 0$ و $x,y \in X$ داریم:

۱. اگر $x \neq y$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=\infty$، اگر $x=y$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=0$؛

اگر (X,d) یک فضای متریک با متر d باشد در این صورت داریم:

۲. هرگاه $\varphi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ تابع نانزولی باشد در این صورت $\omega_\lambda(x,y)=\frac{d(x,y)}{\varphi(\lambda)}$ یک متریک مدولار روی X است،

۳. اگر $\lambda \leq d(x,y)$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=\infty$، اگر $\lambda > d(x,y)$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=0$ یک متریک مدولار روی X است،

۴. اگر $\lambda < d(x,y)$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=\infty$، اگر $\lambda \geq d(x,y)$ آن‌گاه $\omega_\lambda(x,y)=0$ یک متریک مدولار روی X است.