دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

پایداری هایرز– اولام معادلات ترکیبی روی فضاهای مختلف

نگارنده

معصومه غنی فرد

استاد راهنما

دکتر مجید اسحقی گرجی

آذر ۱۳۸۹

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

ای حاضرترین غایبان عالم، حبیب همهٔ جانهای پاک، خستهٔ سالهای طولانی غیبت؛

ای گشایندهٔ پنجره، گیرندهٔ دست، اهدا کنندهٔ نگاه و نگاهدارندهٔ استواری نردبان؛

ای سیّد و مولای ما، مهدی فاطمه (س)؛

این مجموعه، قدمی است ناچیز در عرصهٔ علم آموزی. امید که حرکت و تلاش ما در این مسیر، ذره‌ای اسباب خرسندی خاطر عزیزتان را فراهم آورد.

« ان شاء اللّه »

قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را که در ذات و صفات بی‌همتاست؛ منزه است نامهای او و پیاپی است نعمت‌های او. شاکرم او را که توفیقی به من عطا فرمود تا بتوانم پس از طی مسیرهای دشوار، مرحله‌ای دیگر از علم‌آموزی را به سرانجام برسانم.

پس از آن، بر خود لازم میبینم با تمام وجود قدردان زحمات عزیزانی باشم که پس از قادر متعال، حامی من در این راه پر فراز و نشیب بودند؛

ابتدا خانواده عزیز، به‌ویژه مادر دلسوز و فداکارم که از وقتی پا به عرصه وجود نهادم از هیچ تلاشی در جهت رسیدن به اهدافم فروگذار نکردند. همچنین همسر عزیزم، که همراه و مشوق همیشگی من در طی مراحل تحصیلم بودند؛

سپس از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر مجید اسحقی که ارائه این پایان‌نامه را مدیون زحمات و رهنمودهای ایشان هستم.

از تمامی اساتید گرامی که همواره در طی دوره تحصیل، مرا به سوی چشمه‌های علم هدایت کردند نیز تشکر و قدردانی مینمایم.

در خاتمه، سعادت، سلامت و موفقیت همگی این عزیزان را از خداوند سبحان مسئلت دارم.

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه، بررسی پایداری چند معادله تابعی ترکیبی در فضاهای شبه باناخ، رندم، و آی– رندم می‌باشد. برای رسیدن به این هدف از مقالات زیر استفاده شده است:

1. [M. Eshaghi Gordji, H. Khodaei, Solution and stability of generalized mixed type cubic, quadratic and additive functional equations in quasi–Banach spaces, Nonlinear Analysis. 71 (2009), 5629-5643.]

2. [M. Eshaghi Gordji, M. Ghanifard, H. Khodaei and Choonkil Park, *Fixed points and the random stability of a mixed type cubic, quadratic and additive functional equation*, Submitted.]

3. [M. Eshaghi Gordji, M. Ghanifard, H. Khodaei and C. Park, *A fixed point approach to the random stability of a functional equation driving from quartic and quadratic mappings*, Accepted.]

4. [M. Eshaghi Gordji, M. Ghanifard, H. Khodaei and C. Park, *Intuitionistic random almost additive–quadratic functions*, Submitted.]

واژه‌های کلیدی: پایداری هایرز[۱] – اولام[۲]، معادله تابعی جمعی[۳]، معادله تابعی درجه دوم[۴]، معادله تابعی درجه سوم[۵]، معادله تابعی درجه چهارم[٦]، معادله تابعی ترکیبی، فضای شبه باناخ، فضای p– باناخ، فضای نرمدار رندم، فضای نرمدار آی– رندم، روش نقطه ثابت.

Hyers[۱]
Ulam[۲]
Additive functional equation[۳]
Quadratic functional equation[۴]
Cubic functional equation[۵]
Quartic functional equation[٦]

مقدمه

اولین بار مسئله پایداری معادلات تابعی در سال ۱۹۴۰ توسط اولام [۱۳۲] به صورت زیر مطرح شد:

« فرض کنیم $(G_۱,*)$ یک گروه، $(G_۲,\diamond,d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ و $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. آیا $\delta(\epsilon) > ۰$ موجود است به طوری‌که اگر نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$ در رابطه

$$d(h(x*y), h(x)\diamond h(y)) < \delta$$

برای هر $x,y \in G_۱$ صدق کند، آنگاه همریختی $H : G_۱ \to G_۲$ موجود باشد به قسمی‌که

$$d(h(x), H(x)) < \epsilon$$

برای هر $x \in G_۱$ ؟»

یک سال بعد مسئله اولام توسط هایرز [۵٦] برای فضاهای باناخ به صورت زیر حل شد:

« اگر $\varepsilon > ۰$ و X و Y فضاهای باناخ باشند و تابع $f : X \to Y$، به ازای هر $x,y \in X$ در نامعادله

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

صدق کند، آنگاه حد $A(x) := \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x)$ برای هر $x \in X$ وجود دارد و A یک تابع جمعی منحصربه فرد است به طوری‌که

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \varepsilon$$

برای هر $x \in X$.»

در سال ۱۹۵۰، آوکی[۷] [۵] قضیه هایرز را برای توابع تقریباً جمعی تعمیم داد و در سال ۱۹۷۸، تمیستکلس. راسیاس[۸][۱۱۷] قضیه هایرز را به صورت زیر بیان کرد:

« فرض کنیم $\epsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$ ثابت باشند. اگر $f : X \to Y$ تابعی از فضای نرمدار X به فضای باناخ Y باشد به طوری‌که برای هر $x,y \in X$ در رابطه

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

---

[۷] Aoki

[۸] Themistocles Rassias

صدق کند، در این صورت حد $A(x) := \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ برای هر $x \in X$ وجود دارد و A تابع جمعی یکتایی است که رابطه

$$\|f(x) - A(x)\| \leq k\varepsilon \|x\|^p$$

را برای هر $x \in X$ برقرار می‌کند که در آن $k = \frac{2}{2-2^p}$.» این مفهوم جدید به پایداری هایرز– اولام– راسیاس معروف است.

به علاوه، جان. راسیاس[۹] به جای تابع کنترل در پایداری هایرز– اولام– راسیاس، یعنی $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$، تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p \|y\|^p)$ را جایگزین نمود [۱۱۱، ۱۱۰، ۱۰۹].

گاورتا[۱۰] این نتایج را تعمیم داد [۴۸]. او به جای تابع کنترل در قضیه کلی هایرز– اولام– راسیاس تابع کنترل $\phi(x, y)$ را به‌کار برد که به پایداری اولام– گاورتا– راسیاس معروف شد (برای کسب اطلاعات بیشتر به [۱۲۲، ۱۲۱، ۱۲۰، ۱۱۹، ۱۱۸، ۵۹، ۵۸، ۴۹، ۴۷، ۹] مراجعه کنید).

اخیراً نیز جان. راسیاس تابع کنترل $\theta\{||x||^p ||y||^p + (||x||^{2p} + ||y||^{2p})\}$ را که ترکیبی از جمع و ضرب نرم‌ها می‌باشد، جایگزین تابع کنترل $\varepsilon(\|x\|^p \|y\|^p)$ نموده است.

معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (1.0.0)$$

به یک تابع دو– جمعی[۱۱] متقارن ارتباط داده می‌شود [۶۹، ۱]. هر معادله به این شکل را معادله تابعی درجه دوم می‌نامیم. به‌ویژه به هر حل از معادله درجه دوم (۱.۰.۰)، یک تابع درجه دوم گفته می‌شود. تابع f بین فضاهای برداری حقیقی، درجه دوم است اگر وفقط اگر یک تابع دو– جمعی متقارن و منحصربه فرد B_1 وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in X$، $f(x) = B_1(x, x)$.

مسئله پایداری هایرز– اولام برای معادله تابعی درجه دوم (۱.۰.۰)، توسط اسکوف[۱۲] برای توابع $f : X \to Y$، که X فضای نرمدار و Y فضای باناخ می‌باشد به اثبات رسید [۱۳۰].

چولوا[۱۳] نشان داد که قضیه اسکوف، زمانی که X یک گروه آبلی باشد نیز برقرار است [۲۰].

---

[۹] John Michael Rassias
[۱۰] Gavruta
[۱۱] Bi-Additive
[۱۲] Skof
[۱۳] Cholewa

در مقاله [۲۲]، ژرویک [۱۴] پایداری هایرز– اولام– راسیاس معادله تابعی درجه دوم (۱.۰.۰) را اثبات کرد. به علاوه گرابیس[۱۵] نتایج ذکر شده در بالا را تعمیم داد [۵۰].

جان[۱۶] و کیم[۱۷] معادله تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x) \qquad (۲.۰.۰)$$

را معرفی کردند و حل عمومی و پایداری هایرز– اولام– راسیاس این معادله را به‌دست آوردند [۶۳]. آنها نشان دادند که تابع f بین دو فضای برداری حقیقی X و Y یک حل از معادله (۲.۰.۰) است اگر و فقط اگر تابع منحصربه فرد $C: X\times X\times X \to Y$ وجود داشته باشد به قسمی‌که به ازای هر $x\in X$، $f(x)=C(x,x,x)$، که C متقارن است برای هر یک متغیر ثابت و جمعی است برای دو متغیر ثابت . به وضوح $f(x)=x^۳$ در معادله تابعی (۲.۰.۰) صدق می‌کند، پس به طبع معادله (۲.۰.۰) معادله تابعی درجه سوم نامیده می‌شود و به هر حل از معادله درجه سوم (۲.۰.۰)، یک تابع درجه سوم می‌گوییم.

تابع $f(x)=x^۴$ در معادله تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)+۲۴f(x)-۶f(y) \qquad (۳.۰.۰)$$

صدق می‌کند. بنابراین معادله (۳.۰.۰) معادله تابعی درجه چهارم نامیده می‌شود و به هر حل از معادله درجه چهارم (۳.۰.۰)، یک تابع درجه چهارم گوییم. این معادله تابعی توسط لی[۱۸]، ایم[۱۹] و هانگ[۲۰] حل شد [۷۵]. در واقع آنها ثابت کردند که اگر X و Y فضاهای برداری حقیقی باشند، تابع $f: X\to Y$ یک حل از (۳.۰.۰) است اگر و فقط اگر تابع دو– درجه دوم[۲۱] متقارن و منحصربه فرد $B_۲: X\times X\to Y$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x\in X$، $f(x)=B_۲(x,x)$ (برای آشنایی با معادلات درجه چهار دیگر می‌توانید به [۱۱۴، ۱۰۷، ۱۰۴، ۹۴، ۲۱] مراجعه کنید).

---
[۱۴] Czerwik
[۱۵] Grabiec
[۱۶] Jun
[۱۷] Kim
[۱۸] Lee
[۱۹] Im
[۲۰] Hwang
[۲۱] Bi-quadratic

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل می‌باشد که به صورت زیر سازماندهی شده است:

فصل اول: نخست تعاریف مقدماتی را بیان می‌کنیم و سپس به بررسی مفاهیم و قضایای اولیه پایداری معادلات تابعی، که در فصل های بعدی مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

فصل دوم: در ابتدا، یک حل عمومی برای معادله تابعی ترکیبی تعمیم یافته

$$f(x+ky)+f(x-ky)=k^{2}f(x+y)+k^{2}f(x-y)+2(1-k^{2})f(x)$$

ارائه خواهیم داد و سپس در بخش سوم، پایداری هایرز– اولام– راسیاس این معادله را در فضاهای شبه باناخ ثابت می‌کنیم [۴۰].

فصل سوم: با استفاده از روش نقطه ثابت، پایداری هایرز– اولام تعمیم یافته معادله تابعی ترکیبی معرفی شده در فصل دوم را، در فضاهای رندم باناخ بررسی خواهیم کرد [۳۴].

فصل چهارم: تقریب نقطه ثابت را برای بررسی پایداری هایرز– اولام– راسیاس و اولام– گاورتا– راسیاس معادله تابعی ترکیبی

$$f(\sum_{i=1}^{n}x_i)+f(\sum_{i=1}^{n-1}x_i-x_n)=2f(\sum_{i=1}^{n-1}x_i)+\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i+x_n)+f(x_i-x_n)-2f(x_i)]$$
$$-2(n-2)f(x_n)$$

در فضاهای رندم باناخ به کار برده و نشان خواهیم داد که در دو حالت خاص، معادله تابعی فوق پایدار نیست [۳۳].

فصل پنجم: به بررسی پایداری هایرز– اولام تعمیم یافته معادله تابعی ترکیبی

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-nf(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)$$

در فضاهای آی– رندم باناخ می‌پردازیم [۳۵].

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل، تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، بیان می‌کنیم.

۱.۱ فضاهای باناخ و $p-$ باناخ

تعریف ۱.۱.۱ ([۱۱، ۱۲۴]). فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. یک شبه نرم[۱] روی X، یک تابع به صورت $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$؛

۳) عدد ثابت $M \geq 1$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq M(\|x\| + \|y\|)$.

زوج $(X, \|.\|)$ را فضای شبه نرمدار می‌نامیم، اگر $\|.\|$ یک شبه نرم روی X باشد.

تذکر ۲.۱.۱ از شرط سوم فضای شبه نرمدار $(X, \|.\|)$، نامساوی های زیر به ازای هر $n \geq 1$ و همه مقادیر $x_1, x_2, ..., x_{2n}, x_{2n+1}$ به‌دست می آیند:

---

[۱] Quasi-norm

$$\|\sum_{i=1}^{2n} x_i\| \leq M^n \sum_{i=1}^{2n} \|x_i\| \qquad , \qquad \|\sum_{i=1}^{2n+1} x_i\| \leq M^{n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} \|x_i\|.$$

کوچکترین مقدار M را ضریب تقعر $\|.\|$ می‌نامیم.

تذکر ۳.۱.۱ فضای شبه نرم کامل را فضای شبه باناخ گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم $p \in (0,1]$، در این صورت شبه نرم $\|.\|$ را یک $p-$ نرم گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای $p-$ باناخ، یک فضای شبه باناخ است، اگر شبه نرم روی آن یک $p-$ نرم نیز باشد.

تذکر ۶.۱.۱ هر شبه نرم با یک $p-$ نرم معادل است [۱۳۱، ۱۲۴، ۱۱]. از آنجا که کار کردن با $p-$ نرم ها آسان‌تر است، لذا بیشتر از $p-$ نرم‌ها استفاده می کنیم.

۲.۱ فضاهای رندم باناخ و آی– رندم باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \to [0, \infty]$ را یک متریک توسعه یافته روی X گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۲) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

۳) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

تذکر ۲.۲.۱ متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا برد آن شامل بی‌نهایت نیز می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک توسعه یافته باشد. تابع $T : X \to X$ در شرط لیپشیتز[۲] صدق می‌کند، اگر ثابت $L \geq ۰$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y).$$

در این صورت L را ثابت لیپشیتز می‌گوییم.

تعریف ۴.۲.۱ تابع T را یک تابع انقباضی گوییم، هرگاه در شرط لیپشیتز صدق کند. به علاوه اگر ثابت لیپشیتز کمتر از ۱ باشد، آنگاه تابع T یک تابع انقباضی اکید نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱ ([۱۲۷]). تابع $F : \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \to [۰, ۱]$ را یک تابع توزیع[۳] می‌نامیم، هرگاه F از چپ پیوسته و روی $\mathbb{R}$ غیر نزولی باشد. همچنین داشته باشیم: $F(۰) = ۰$ و $F(+\infty) = ۱$.
فضای تمام توابع توزیع را با نماد Δ^+ نمایش می‌دهیم. زیر مجموعه D^+ از Δ^+ را نیز به صورت $D^+ = \{F \in \Delta^+ : l^- F(+\infty) = ۱\}$ در نظر می‌گیریم، که در آن منظور از $l^- F(x)$، حد چپ تابع F در نقطه x می‌باشد.

تذکر ۶.۲.۱ فضای Δ^+ با ترتیب نقطه به نقطه معمولی توابع، یعنی: «$F \leq G$ اگر و فقط اگر $F(t) \leq G(t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$»، مرتب جزئی است. عضو ماکسیمال Δ^+ در این ترتیب تابع توزیع زیر است:

$$\varepsilon_۰(t) = \begin{cases} ۰, & t \leq ۰ \\ ۱, & t > ۰. \end{cases}$$

---

[۲] Lipchitz
[۳] Distribution function

تعریف ۷.۲.۱ ([۱۲۷]). عملگر دوتایی $T : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ یک نرم مثلثی پیوسته (به اختصار $t-$ نرم پیوسته) نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(a) T شرکت پذیر و جابجایی باشد ؛

(b) T پیوسته باشد ؛

(c) به ازای هر $a \in [\circ, ۱]$، $T(a, ۱) = a$ ؛

(d) برای هر $a, b, c, d \in [\circ, ۱]$، اگر $a \leq c$ و $b \leq d$، آنگاه $T(a, b) \leq T(c, d)$ ؛

مثال ۸.۲.۱ مهمترین و شاخص ترین $t-$ نرم‌های پیوسته عبارتند از:

$$T_M(a, b) = \min(a, b) \quad , \quad T_L(a, b) = \max(a + b - ۱, \circ) \quad , \quad T_P(a, b) = ab.$$

تذکر ۹.۲.۱ ([۵۲، ۵۴]). اگر T یک $t-$ نرم پیوسته و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد در بازه $[\circ, ۱]$ باشد، $T_{i=۱}^{n} x_i$ به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{i=۱}^{n} x_i = \begin{cases} x_۱, & n = ۱ \\ T(T_{i=۱}^{n-۱} x_i, x_n), & n \geq ۲. \end{cases}$$

همچنین $T_{i=n}^{\infty} x_i$ را هم به صورت $T_{i=۱}^{\infty} x_{n+i}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۲.۱ ([۱۲۸]). سه تایی (X, Λ, T) فضای نرمدار رندم[۴] نامیده می‌شود هرگاه X یک فضای برداری حقیقی، Λ نگاشتی از X به D^+ (برای هر $x \in X$، $\Lambda(x)$ را با Λ_x نشان می‌دهیم) و T یک $t-$ نرم پیوسته باشد که به ازای هر $x, y \in X$ و $s, t \geq \circ$ در شرایط زیر صدق کنند :

$(RN_۱)$ $\Lambda_x(t) = \varepsilon_\circ(t)$ اگر و تنها اگر $x = \circ$ ؛

$(RN_۲)$ برای هر $\alpha \neq \circ$، $\Lambda_{\alpha x}(t) = \Lambda_x(\frac{t}{|\alpha|})$ ؛

$(RN_۳)$ $\Lambda_{x+y}(t + s) \geq T(\Lambda_x(t), \Lambda_y(s))$.

در این حالت، Λ_x یک نرم رندم نامیده می‌شود.

[۴] Random

مثال ۱۱.۲.۱ فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. در این صورت (X, Λ, T_M) یک فضای نرمدار رندم است که در آن $\Lambda_u(t) = \frac{t}{t+\|u\|}$ برای هر $t > ۰$ (برای دیدن مثال های دیگر از فضاهای نرمدار رندم و آنالیز رندم می‌توانید به [۲] مراجعه نمایید).

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنیم (X, Λ, T) یک فضای نرمدار رندم و $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد.

۱) دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به نقطه $x \in X$ گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $\lambda > ۰$، عدد صحیح مثبت N موجود باشد به قسمی‌که به ازای هر $n \geq N$، $\Lambda_{x_n-x}(\epsilon) > ۱ - \lambda$.

۲) دنباله $\{x_n\}$ را کوشی می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $\lambda > ۰$، عدد صحیح مثبت N موجود باشد به قسمی‌که به ازای هر $n \geq m \geq N$، $\Lambda_{x_n-x_m}(\epsilon) > ۱ - \lambda$.

۳) فضای نرمدار رندم (X, Λ, T) را کامل گوییم اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای از X باشد. فضای نرمدار رندم کامل را فضای رندم باناخ می‌نامیم.

قضیه ۱۳.۲.۱ ([۱۲۷]). اگر (X, Λ, T) یک فضای نرمدار رندم و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $x_n \to x$، آنگاه داریم: « تقریباً همه جا» $\lim_{n\to\infty} \Lambda_{x_n}(t) = \Lambda_x(t),$

تعریف ۱۴.۲.۱ تابع $\mu : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ را یک تابع توزیع اندازه گوییم، هرگاه μ غیرنزولی و روی $\mathbb{R}$ از چپ پیوسته باشد. به علاوه داشته باشیم: $\inf_{t\in\mathbb{R}} \mu(t) = ۰$ و $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mu(t) = ۱$.

خانواده تمام توابع توزیع اندازه را با D نشان می‌دهیم. یک عضو خاص از D، تابع H است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(t) = \begin{cases} ۰, & t \leq ۰ \\ ۱, & t > ۰. \end{cases}$$

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر X یک مجموعه غیر تهی باشد، تابع $\mu : X \to D$، یک اندازه احتمالی روی X نامیده می‌شود و $\mu(x)$ را با نماد μ_x نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۶ تابع $\nu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ را یک تابع توزیع بدون اندازه[5] گوییم، هرگاه ν غیرصعودی و روی $\mathbb{R}$ از راست پیوسته باشد. به علاوه داشته باشیم: $\inf_{t\in\mathbb{R}} \nu(t) = 1$ و $\sup_{t\in\mathbb{R}} \nu(t) = 0$.
خانواده تمام توابع توزیع بدون اندازه را با B نشان می‌دهیم. یک عضو خاص از B، تابع G است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱۷ اگر X یک مجموعه غیر تهی باشد، تابع $\nu : X \to B$، یک بدون اندازه احتمالی روی X نامیده می‌شود و $\nu(x)$ را با نماد ν_x نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۸ مجموعه مرتب جزئی $\pounds$ را یک شبکه[6] می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی از آن دارای سوپریمم و اینفیمم باشد. اگر هر زیرمجموعه غیر تهی از $\pounds$ دارای سوپریمم و اینفیمم باشد، $\pounds$ را شبکه کامل گوییم.

لم ۱.۲.۱۹ ([۲۳، ۶]). مجموعه L^* و عمل $\leq_{L^*}$ را که به صورت

$$L^* = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, x_1 + x_2 \leq 1\},$$

$$(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \geq y_2, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^*$$

تعریف می‌شوند، در نظر می‌گیریم. در این صورت $(L^*, \leq_{L^*})$ یک شبکه کامل است. عناصر یکه این شبکه را با $0_{L^*} = (0, 1)$ و $1_{L^*} = (1, 0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۰ مونوئید S را توپولوژیکی گوییم هرگاه توپولوژی مانند τ روی S موجود باشد به قسمی‌که عمل ضرب آن از $S \times S$ (با توپولوژی حاصلضربی) به S پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲.۲۱ $t-$ نرم Υ روی L^* را یک $t-$ نرم پیوسته گوییم هرگاه سه تایی $(L^*, \leq_{L^*}, \Upsilon)$ یک مونوئید توپولوژیکی آبلی با یکه 1_{L^*} باشد.

[5] Non-measure
[6] Lattice

تعریف ۲۲.۲.۱ نگاشت $S = \diamond$ روی $[\circ, \text{۱}]$ را یک $t-$ کونرم[۷] گوییم هرگاه $S : [\circ, \text{۱}]^{\text{۲}} \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ تابعی شرکت پذیر، جابجایی و صعودی باشد که برای هر $x \in [\circ, \text{۱}]$ داشته باشیم:

$$S(\circ, x) = \circ \diamond x = x$$

تعریف ۲۳.۲.۱ ([۲۳]). $t-$ نرم پیوسته Υ روی L^*، $t-$ نمایش پذیر پیوسته[۸] نامیده می‌شود، هرگاه $t-$ نرم پیوسته $*$ و $t-$ کونرم پیوسته $\diamond$ روی $[\circ, \text{۱}]$ وجود داشته باشند به قسمی‌که

$$\Upsilon(x, y) = (x_{\text{۱}} * y_{\text{۱}}, x_{\text{۲}} \diamond y_{\text{۲}})$$

برای هر $x = (x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}})\ ,\ y = (y_{\text{۱}}, y_{\text{۲}}) \in L^*$.

مثال ۲۴.۲.۱ برای هر $a = (a_{\text{۱}}, a_{\text{۲}})\ ,\ b = (b_{\text{۱}}, b_{\text{۲}}) \in L^*$،

$$\Upsilon(a, b) = (a_{\text{۱}} b_{\text{۱}}, \min\{a_{\text{۲}} + b_{\text{۲}}, \text{۱}\}) \quad , \quad M(a, b) = (\min\{a_{\text{۱}}, b_{\text{۱}}\}, \max\{a_{\text{۲}}, b_{\text{۲}}\})$$

شاخص ترین مثال ها از $t-$ نمایش پذیرهای پیوسته می‌باشند.

تذکر ۲۵.۲.۱ اگر Υ یک $t-$ نمایش پذیر پیوسته باشد، دنباله Υ^n را با $\Upsilon^{\text{۱}} = \Upsilon$، به طور بازگشتی، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Upsilon^n(x^{(\text{۱})}, x^{(\text{۲})}, ..., x^{(n+\text{۱})}) = \Upsilon(\Upsilon^{n-\text{۱}}(x^{(\text{۱})}, x^{(\text{۲})}, ..., x^{(n)}), x^{(n+\text{۱})})$$

برای هر $x^{(\text{۱})}, ..., x^{(n+\text{۱})} \in L^*$ و هر $n \geq \text{۲}$.

تعریف ۲۶.۲.۱ یک خنثی‌کننده[۹] روی L^* تابعی است نزولی مانند $\aleph : L^* \longrightarrow L^*$ که در $\aleph(\text{۱}_{L^*}) = (\circ_{L^*})$ و $\aleph(\circ_{L^*}) = (\text{۱}_{L^*})$ صدق کند.

اگر برای هر $x \in L^*$، $\aleph\aleph(x) = x$، آنگاه $\aleph$ یک خنثی‌کننده پیچیده نامیده می‌شود.

[۷] Conorm
[۸] Continuous t-representable
[۹] Negator

مثال ۲۷.۲.۱ هر تابع نزولی $N:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ که $N(0)=1$ و $N(1)=0$، یک خنثی‌کننده روی بازه $[0,1]$ می‌باشد. بنابراین نگاشت $N_s:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ با ضابطه $N_s(x)=1-x$ برای هر $x\in[0,1]$، یک خنثی‌کننده پیچیده است که به آن خنثی‌کننده استاندارد می گوییم.

تعریف ۲۸.۲.۱ ([۱۳۵]). فرض کنیم μ و ν به ترتیب، توابع توزیع اندازه و بدون اندازه از $X\times(0,+\infty)$ به $[0,1]$ باشند به قسمی‌که برای هر $x\in X$ و هر $t>0$، $\mu_x(t)+\nu_x(t)\leq 1$. سه تایی $(X,\Lambda_{\mu,\nu},\Upsilon)$ فضای نرمدار آی− رندم[۱۰] نامیده می‌شود هرگاه X یک فضای برداری، Υ یک t− نمایش پذیر پیوسته و $\Lambda_{\mu,\nu}:X\times(0,+\infty)\to L^*$ نگاشتی باشد که به ازای هر $x,y\in X$ و هر $t,s>0$ در شرایط زیر صدق کنند:

(IRN_1) $\Lambda_{\mu,\nu}(x,0)=0_{L^*}$ ؛

(IRN_2) $\Lambda_{\mu,\nu}(x,t)=1_{L^*}$ اگر و تنها اگر $x=0$ ؛

(IRN_3) برای هر $\alpha\neq 0$، $\Lambda_{\mu,\nu}(\alpha x,t)=\Lambda_{\mu,\nu}(x,\frac{t}{|\alpha|})$ ؛

(IRN_4) $\Lambda_{\mu,\nu}(x+y,t+s)\geq_{L^*}\Upsilon(\Lambda_{\mu,\nu}(x,t),\Lambda_{\mu,\nu}(y,s))$.

در این حالت، $\Lambda_{\mu,\nu}$ یک نرم آی− رندم نامیده می‌شود که در اینجا $\Lambda_{\mu,\nu}(x,t)=(\mu_x(t),\nu_x(t))$.

مثال ۲۹.۲.۱ فرض کنیم $(X,\|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. اگر $\Lambda_{\mu,\nu}(x,t)=(\frac{t}{t+\|x\|},\frac{\|x\|}{t+\|x\|})$ برای هر $t>0$ و $\Upsilon(a,b)=(a_1b_1,\min\{a_2+b_2,1\})$ برای هر $a=(a_1,a_2)\ ,\ b=(b_1,b_2)\in L^*$، در این صورت $(X,\Lambda_{\mu,\nu},\Upsilon)$ یک فضای نرمدار آی− رندم است.

تعریف ۳۰.۲.۱ فرض کنیم $(X,\Lambda_{\mu,\nu},\Upsilon)$ فضای نرمدار آی− رندم و $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد .

۱) $\{x_n\}$ را همگرا به $x\in X$ گوییم، هرگاه برای هر $t>0$، $\Lambda_{\mu,\nu}(x_n-x,t)\to 1_{L^*}$ وقتی $n\to\infty$.

۲) دنباله $\{x_n\}$ را کوشی می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ و هر $t>0$، $n_0\in\mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی‌که به ازای هر $n,m\geq n_0$، $\Lambda_{\mu,\nu}(x_n-x_m,t)\geq_{L^*}(N_s(\varepsilon),\varepsilon)$.

۳) فضای نرمدار آی− رندم $(X,\Lambda_{\mu,\nu},\Upsilon)$ را کامل گوییم اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای از X باشد. فضای نرمدار آی− رندم کامل را فضای آی− رندم باناخ می‌نامیم.

---
[۱۰] Intuitionistic random