بسم الله الرحمن

الرحیم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

دانشکده علوم – گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض –آنالیز

موضوع:

فضاهای یکنواخت تعمیم یافته، سیستم‌های دینامیک مجموعه مقدار انقباضی موضعی یکنواخت و نقاط ثابت

نگارش:

اعظم نوروزپور

استاد راهنما:

دکتر سید هاشم پروانه مسیحا

استاد مشاور:

دکتر کوروش نوروزی

شهریور ۱۳۹۲

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: فضاهای یکنواخت تعمیم یافته، سیستم‌های دینامیک مجموعه مقدار انقباضی موضعی یکنواخت و نقاط ثابت

استاد راهنما: جناب آقای دکتر سید هاشم پروانه مسیحا

نام دانشجو: اعظم نوروزپور

شماره دانشجویی: ۹۰۰۹۱۸۴

اینجانب اعظم نوروزپور دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه با عنوان ''فضاهای یکنواخت تعمیم یافته، سیستم‌های دینامیک مجموعه مقدار انقباضی موضعی یکنواخت و نقاط ثابت'' با راهنمایی استاد محترم جناب آقای دکتر سید هاشم پروانه مسیحا توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تقدیم به:

مادر مهربانم به فروغ نگاه مهربانش که مهر، عشق و گذشت را به من هدیه کرد

و

پدر عزیزم به شکوه دستان پر مهرش که جلوه‌های امید را برایم تجلی بخشید

و

همه دوستانم.

تشکر و قدردانی

خداوند منان را سپاس‌گذارم که توفیق تحصیل علم و تلاش در راه کسب معرفت را بر من ارزانی داشت تا بدین سبب لطافت و زیبایی خلقت بی‌نظیر و پر رمز و رازش را بهتر بشناسم. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از همه‌ی کسانی که اینجانب را در تهیه‌ی این پایان‌نامه یاری نمودند به ویژه استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مسیحا و همین‌طور استاد مشاورم جناب آقای دکتر نوروزی که نه تنها در راستای پایان‌نامه‌ام بلکه در طول دوره کارشناسی ارشدم همواره علم و دانششان را آمیخته با تجربیاتشان کرده و بی هیچ چشم داشتی خالصانه در اختیار اینجانب قرار داده‌اند، قدردانی نمایم.

در پایان نیز از زحمات خانواده‌ام و همه دوستانم که صادقانه در کنارم بودند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم و امید دارم که خداوند لیاقت و فرصت جبران نمودن را در اختیارم قرار دهد.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا فضاهای متریک یکنواخت تعمیم‌یافته و نوع جدیدی از کامل بودن دنباله‌ای که توسیعی از کامل بودن دنباله‌ای معمولی است، معرفی می‌شود. سپس تلاش‌های ندلر برای انقباض‌های مجموعه‌مقدار نسبت به متر هاسدورف در فضاهای متریک کامل و تلاش‌های کوویتز و ندلر برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار انقباضی موضعی یکنواخت نسبت به متر هاسدورف تعمیم‌یافته در فضاهای متریک تعمیم‌یافته کامل بیان می‌شوند. در نهایت، دو نوع جدید از سیستم‌های دینامیکی مجموعه‌مقدار که انقباضی موضعی یکنواخت هستند، مورد مطالعه قرار می‌گیرند و شرط‌هایی ارائه می‌شوند که تضمین کننده همگرایی فرآیندهای دینامیکی و وجود نقاط ثابت این انقباض‌ها هستند.

کلمات کلیدی: نقطه ثابت، سیستم دینامیکی، فرآیند دینامیکی، فضای یکنواخت تعمیم یافته، انقباضی موضعی یکنواخت، شبه متر تعمیم یافته، فضای متریک تعمیم یافته، فضای محدب موضعی تعمیم‌یافته

مقدمه

یکی از مسائل کاربردی در ریاضیات، مسئله پیدا کردن نقاط ثابت یا بررسی شرایطی است که تحت آن نگاشت دارای نقطه ثابت است. تاکنون تحقیقات بسیاری در مبحث قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های معمولی تک مقداری صورت گرفته است. همچنین از سال ۱۹۵۰ به بعد، و بیشتر، در آنالیز غیرخطی نیز این بحث برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار بررسی شده است. در بسیاری از قضایای و نتایج نقطه ثابت که تاکنون برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار ارائه شده است، ایده اصلی و مبنای کار مربوط به قضایای مشابه بوده که قبلاً برای نگاشت‌های معمولی تک مقداری وجود داشته‌اند. از جمله این موارد توسیعی از قضیه کلاسیک باناخ[۲]، است که در سال ۱۹۶۹ توسط ندلر ارائه شد. ندلر[۲۴] با استفاده از متریک هاسدورف و تعریف نگاشت انقباضی مجموعه مقدار، توسیع مهمی از قضیه باناخ را برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار ارائه کرد که بسیاری از مقالات بعد از آن مبنای کار ریاضی‌دانان واقع شد. از جمله افرادی که با الهام از قضیه ندلر به ارائه قضایا و نتایجی برای اثبات وجود نقطه ثابت یک نگاشت مجموعه‌مقدار پرداختند، می‌توان به ریچ [۱۶]، میزوگوچی [۱۳] و تاکاهاشی [۲۱] اشاره کرد.

ما در این رساله، در فصل ۱ به بررسی قضایای نقطه ثابت و توسیع آن و فضای متریک تعمیم یافته می‌پردازیم و در فصل ۲ مترهای جدید مطرح شده در فضای متریک تعمیم یافته را بررسی و کلاس‌های هم‌ارزی مربوط به آنها را مطرح می‌کنیم، در نهایت در فصل پایانی به مقایسه نتایج حاصل از قضایای مطرح شده در فصل‌های قبلی می‌پردازیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

توسیع قضایای نقطه ثابت از فضاهای متریک به فضاهای متریک تعمیم‌یافته

در این فصل به معرفی برخی مفاهیم موردنیاز در سرتاسر این پایان نامه می پردازیم.
پس از معرفی چند نماد، به تعریف متریک هاسدورف و ذکر پاره ای خواص آن که در بحث های آتی ما کاربرد خواهند داشت بسنده می‌کنیم.

۱.۱ متریک هاسدورف

در این بخش ابتدا به معرفی متریک هاسدورف می پردازیم. از آنجا که این متریک به عنوان متریک زمینه در تمام مباحث آتی خواهد بود به پاره ای از خواص آن که در بحث ما کاربرد خواهند داشت اشاره خواهیم کرد.

نمادگذاری ۱.۱.۱. فرض کنید (M,T) یک فضای متریک است. در این صورت نمادهای

$N(M)$ را برای گردایه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی M ،

$C(M)$ را برای گردایه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی و بسته M ،

$B(M)$ را برای گردایه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار M ،

و $CB(M)$ را برای گردایه تمام زیر مجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار M،

به کار می بریم.

تعریف ۱.۱.۱. نگاشت مجمومه مقدار. فرض کنید X و Y دو مجموعه ناتهی باشند.اگر مجموعه تمام زیر مجموعه های ناتهی Y را با نماد 2^Y نمایش دهیم. نگاشت $F : X \to 2^Y$ یک نگاشت مجموعه مقدار، یا به طور خلاصه یک MVM نامیم که به هر $x \in X$ یک زیر مجموعه از Y را نظیر می کند.
با توجه به این تعریف هر نگاشت تک مقداری یک MVM است که برد آن تنها شامل زیر مجموعه های تک عضوی می باشد.

فرض کنید (M, d) یک فضای متریک باشد. دراین‌صورت منظور از یک ε همسایگی (به ازای $\varepsilon > 0$)برای یک $A \in CB(M)$ که با نماد $N(\varepsilon, A)$ نشان می‌دهیم، مجموعه زیر است:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in M \,|\exists a \in A \, s.t \, d(x, a) < \varepsilon\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. متریک هاسدورف.[۱۴] تابع H از $CB(M) \times CB(M)$ به $\mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(A, B) = \inf \{\varepsilon \,|A \subset N(\varepsilon, B), B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

متریک هاسدورف برای $CB(M)$ نامند. البته تعریف معادل دیگری نیز برای متریک هاسدورف وجود دارد که به شکل زیر است :

$$\mathrm{H}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in B} \; d(x, A), \; \sup_{y \in A} d(y, B) \right\},$$

که در آن $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ است. تابع H را متریک هاسدورف القا شده توسط d نامند.

حال به یکی از ویژگی‌های متریک معرفی شده در بالا می‌پردازیم:

لم ۱.۱.۱. فرض کنید $A, B \in CB(M)$ و $a \in A$ عضوی دلخواه است. در این‌صورت برای هر $\eta > 0$ عنصری چون $b \in B$ وجود دارد به‌طوری که

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \eta.$$

اثبات. اثبات این ادعا ساده و مبتنی بر تعریف متریک هاسدورف می باشد. در این‌جا از تعریف متریک هاسدورف داریم:

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon\,|A \subset N(\varepsilon,B), B \subset N(\varepsilon,A)\}$$

قرار می‌دهیم $E = \inf\{\varepsilon\,|A \subset N(\varepsilon,A), B \subset N(\varepsilon,B)\}$. در این‌صورت برای هر $\varepsilon \in E$ داریم

$H(A,B) \leq \varepsilon$ ، اما طبق خاصیت اینفیمم، برای هر $\alpha > \circ$ باید $\varepsilon_\circ$ یی در E وجود داشته باشد به‌طوری که $\varepsilon_\circ \leq H(A,B)+\alpha$ (در غیر این صورت $H(A,B)$ مقدار اینفیمم نخواهد بود)اما $\varepsilon_\circ \in E$ به این معناست که $A \subset N(\varepsilon_\circ,B), B \subset N(\varepsilon_\circ,A)$. رابطه شمول اول بدین معنا است که برای هر $\alpha \in A$ باید داشته باشیم $\alpha \in N\varepsilon_\circ,(B)$ و این عبارات تضمین می‌کند که b یی در B وجود دارد که $d(a,b) \leq \varepsilon_\circ$. بنابراین برای هر $a \in A$ عضوی چون $b \in B$ وجود دارد که $d(a,b) \leq \varepsilon_\circ \leq H(A,B)+\alpha$. □

از تعریف متریک بالا، می‌توانیم یک نگاشت انقباضی مجموعه مقدار را نیز تعریف کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (X,d_1)و (Y,d_2) فضاهای متریک و $F: X \to CB(Y)$ یکMVM باشد. F یک نگاشت انقباضی مجموعه مقدار و یا به‌طور خلاصه یک $M.V.C.M$ است، هرگاه عدد حقیقی $\alpha \in [\circ, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x,y \in X$

$$H\left(F(x),F(y)\right) \leq \alpha d_1(x,y).$$

که در آن H متریک هاسدورف القا شده توسط متریک d_2 روی y است.

در زیر چند قضیه نقطه ثابت که در ادامه مورد نیاز است را می‌آوریم.

قضیه ۱.۱.۱. (قضیه نقطه ثابت باناخ) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $F: X \to X$ یک انقباض باشد. یعنی،

$$\exists \alpha \in [\circ,1),\, \forall x,y \in X,\, d(F(x),F(y)) \leq \alpha d(x,y).$$

در این صورت نگاشت F دارای یک نقطه ثابت یکتا مانند x^* خواهد بود و همچنین برای هر $x \in X$،

$$F^n(x) \to x^*$$

قضیه ۲.۱.۱. (قضیه نقطه ثابت نادلر)[۱۴] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و نیز نگاشت $F:X\to CB(X)$ یک $M.V.C.M$ با ثابت لیپ شیتس α است که در آن $\alpha\in[0,1)$ ، آن‌گاه F دارای یک نقطه ثابت خواهد بود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است. نگاشت مجموعه‌مقدار $F:X\to CB(X)$ را (ε,λ) -به طور یکنواخت انقباضی موضعی گوییم (که در آن $\lambda\in[0,1)$ و $\varepsilon>0$)، هرگاه برای هر $x,y\in X$ و $d(x,y)<\varepsilon$ داشته باشیم:

$$H\left(F(x),F(y)\right)\leq\lambda d(x,y)$$

تبصره ۱.۱.۱. ذکر کلمه موضعی به این علت است که بر خلاف $M.V.C.M$ ها که برای هر $x,y\in X$ در این شرایط صدق می‌کردند، در این‌جا تنها برای نقاط به فاصله کمتر از ε باید این رابطه برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۱. به زوج (X,T) که X مجموعه‌ای ناتهی و نگاشت $T:X\to 2^X$ مجموعه‌مقدار است، سیستم دینامیکی مجموعه مقدار گوییم.

در حالت خاص، اگر T یک نگاشت تک مقداری باشد، سیستم دینامیکی تک مقداری را به طور ساده‌تر یک سیستم دینامیکی نامند.

فرض کنید T یک نگاشت مجموعه مقدار روی X است. مجموعه نقاط ثابت و نقطه انتهایی T به ترتیب با

$$Fix(T)=\{w\in X\ :\ w\in T(w)\},$$

$$End(T)=\{w\in X\ :\ \{w\}=T(w)\},$$

نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۶.۱.۱. یک فرآیند دینامیکی یا یک شروع مسیر در $w^0\in X$ یا حرکت از سیستم (X,T) در w^0 به شکل دنباله $(w^m\ :\ m\in\{0\}\cup\mathbb{N})$ است به طوری که برای هر $m\in\mathbb{N}$، $w^m\in T(w^{m-1})$ است.

اگر (X,T) یک سیستم دینامیکی و $w^0\in X$ باشد، آن‌گاه مجموعه همه فرآیندهای دینامیکی سیستم (X,T) با شروع در w^0 با $O(X,T,w^0)$ نمایش داده می‌شود.

۲.۱ توسیع اصل انقباض باناخ

قضیه ۱.۲.۱. [۲] فرض کنید (X,T) یک فضای متریک کامل و $T: X \to X$ یک نگاشت تک مقدار است به طوری که :

$$\exists \lambda \in [0,1),\, \forall x,y \in X,\, d\left(T(x),T(y)\right) \leq d(x,y). \qquad (1)$$

آن‌گاه:

الف) T یک نقطه ثابت یکتا w در X دارد. یعنی، $Fix(T)=\{w\}$

ب) دنباله $\{T^m(u)\}$ برای هر $u \in X$ به w همگراست.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل است و (X,T) فضای دینامیکی مجموعه‌مقدار است. نگاشتT را که در آن $T: X \to CB(X)$، یک (h,λ) –انقباضی نامند هرگاه برای $h \in [0,+\infty)$ داشته باشیم:

$$\exists \lambda \in [0,1),\, \forall x,y \in X,\, hH\left(T(x),T(y)\right) \leq \lambda d(x,y), \qquad (2)$$

قضیه ۲.۲.۱ ([۲۲]،قضیه. ۵). فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل و (X,T) فضای دینامیکی مجموعه‌مقداری است که در آن $T: X \to CB(X)$ یک (h,λ) –انقباضی باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت w در X دارد.

روش‌های مهم دیگری برای توسیع قضیه باناخ وجود دارند. قضایای جالبی در این زمینه توسط کوویتز و ندلر [۵] ارائه شده است. مفاهیم تعمیم فضای متریک و تجزیه استاندارد این فضاها برای اولین بار توسط لوکسمبرگ [۱۱]و هانگ [۹]مطرح شد.

تعریف ۲.۲.۱. زوج (X,d) که در آن X مجموعه ناتهی و $d: X \times X \to [0,\infty]$ است را فضای متریک تعمیم‌یافته نامیم هرگاه برای هر x,y,z در X:

الف) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

ب) $d(x,y)=d(y,x)$

ج) $d(x,z)<+\infty\,,\, d(z,y)<+\infty \,\Rightarrow\, d(x,y)<+\infty\,,\, d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

برخی از مشخصه‌های این فضا توسط جانگ معرفی شد. او قضایای اساسی در باب تجزیه فضاهای متریک تعمیم‌یافته را ارائه داده است و راه به‌دست آوردن فضای متریک تعمیم‌یافته (کامل) را معرفی کرد. فرض کنید که $\{(X_\beta, d_\beta) : \beta \in \mathcal{B}\}$ خانواده‌ای از فضاهای متریک متمایز است که در آن $\mathcal{B}$ مجموعه اندیس است. اگر $X = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} X_\beta$ و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) = \begin{cases} d_\beta(x,y), & x,y \in X_\beta, \beta \in \mathcal{B}, \\ +\infty, & x \in X_{\beta_۱}, y \in X_{\beta_۲}, \beta_۱, \beta_۲ \in \mathcal{B}, \beta_۱ \neq \beta_۲, \end{cases}$$

آن‌گاه (X, d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته است.

به‌علاوه اگر برای هر $\beta \in \mathcal{B}$ ، (X_β, d_β) کامل باشد آن‌گاه (X, d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته کامل است. در فضای متریک تعمیم‌یافته (X, d) رابطه هم ارزی زیر تعریف می‌شود:

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) < +\infty \,, x, y \in X$$

ازاین‌رو، X تجزیه یکتایی به توی رده‌های هم ارزی $\{X_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ است که تجزیه استاندارد نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱. [۹] فرض کنید (X, d) فضای متریک تعمیم‌یافته است که در آن $X = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} X_\beta$ تجزیه استاندارد می‌باشد و برای هر $\beta \in \mathcal{B}$ قرار دهید $d_\beta = d|_{X_\beta \times X_\beta}$ آن‌گاه:

الف) برای هر $\beta \in \mathcal{B}$ ، (X_β, d_β) فضای متریک است.

ب) برای هر $\beta_۱, \beta_۲ \in \mathcal{B}$، که $\beta_۱ \neq \beta_۲$ و برای هر $x \in X_{\beta_۱}$ و $y \in X_{\beta_۲}$ داریم $d(x,y) = +\infty$.

ج) (X, d) فضای تعمیم‌یافته کامل است اگر و تنها اگر برای هر $\beta \in \mathcal{B}$ ، (X_β, d_β) فضای متریک کامل باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک تعمیم‌یافته کامل است. در این صورت سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری (X, T) ، $(H, \varepsilon, \lambda)$-انقباضی موضعی یکنواخت است هرگاه

$$\exists \varepsilon \in (۰, \infty,), \;\; \exists \lambda \in [۰, ۱,), \;\; \forall x, y \in X, d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow H\left(T(x), T(y)\right) \leq \lambda d(x,y).$$

قضیه ۴.۲.۱ ([۵]، قضیه. ۱). فرض کنید (X, d) فضای متریک تعمیم‌یافته کامل و $w^۰ \in X$ است. اگر (X, T) یک سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری باشد به‌طوری که $T : X \to C(X)$ و $(H, \varepsilon, \lambda)$-انقباضی موضعی

یکنواخت باشد ، آن‌گاه یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

الف) $\forall (w^m : m \in \{0\} \cup \mathbb{N}) \in \mathrm{O}(X, T, w^0),\ \ \forall m \in \mathbb{N}, d(w^{m-1}, w^m) \geq \varepsilon.$

ب) $\exists (w^m : m \in \{0\} \cup \mathbb{N}) \in \mathrm{O}(X, T, w^0),\ \ \exists w \in X, w \in Fix(T) \wedge \lim_{m\to\infty} w^m = w.$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (X,d) فضای متریک تعمیم‌یافته کامل باشد، سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری (X,T) را (H,λ)-انقباضی موضعی یکنواخت نامند، هرگاه برای $d(x,y) < \infty$ داشته باشیم:

$$\exists \lambda \in [0,1),\ \forall x, y \in X,\ H\left(T(x), T(y)\right) \leq \lambda d(x,y). \qquad (۳)$$

قضیه ۵.۲.۱ ([۲۲]، نتیجه۱). فرض کنید (X,d) فضای متریک تعمیم‌یافته کامل باشد و $w^0 \in X$. اگر (X,T) یک سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری باشد به طوری که $T : X \to C(X)$ و (H,λ)-انقباضی موضعی یکنواخت باشد ، در این‌صورت یکی از گزاره‌های زیر برقرار است

الف) $\forall (w^m : m \in \{0\} \cup \mathbb{N}) \in \mathrm{O}(X, T, w^0),\ \forall m \in X, d(w^{m-1}, w^m) = \infty.$

ب) $\exists (w^m : m \in \{0\} \cup \mathbb{N}) \in \mathrm{O}(X, T, w^0),\ \exists w \in X, w \in Fix(T) \wedge \lim\limits_{m\to\infty} w^m = w.$

در ادامه، از قضیه قبل و قضیه تعمیم‌یافته ندلر قضیه زیر را داریم:

قضیه ۶.۲.۱ ([۲۲]، نتیجه۳). فرض کنید (X,d) فضای متریک کامل باشد و $w^0 \in X$. اگر (X,T) یک سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری باشد به طوری که $T : X \to C(X)$، (h,λ) -انقباضی باشد آن‌گاه

$$\exists (w^m : m \in \{0\} \cup \mathbb{N}) \in \mathrm{O}(X, T, w^0),\ \exists w \in X, w \in Fix(T) \wedge \lim_{m\to\infty} w^m = w.$$

تعریف ۵.۲.۱. [۹] اگر (X,d) یک فضای متریک باشد نگاشت $p : X \times X \to [0,\infty)$ یک τ-فاصله روی X نامیده می‌شود هرگاه نگاشت $\eta : X \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ موجود باشد به طوری که شرایط زیر برقرار شود:

(S_1) $\forall x, y, z \in X,\ p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$

(S_2) $\forall x \in X,\ \forall t > 0, \eta(x,0) = 0 \wedge \eta(x,t) \geq t$ و η نسبت به متغیر دوم پیوسته و مقعر است .

(S_3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \eta(z_n, p(z_n, x_m)) = 0$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ نتیجه دهد $\forall w \in X, p(w,x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf p(w, x_n)$.

(S_4) $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} p(x_n, y_m) = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \eta(x_n, t_n) = 0$ نتیجه دهد $\lim_{n\to\infty} \eta(y_n, t_n) = 0$.

(S_5) $\lim_{n\to\infty} \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ نتیجه دهد $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

تبصره ۱.۲.۱. می‌توان شرط (S_2) را با شرط

(S'_2) $inf\{\eta(x,t) : t > 0\} = 0$

برای تمام $x \in X$ به طوری که η در متغیر دومش نانزولی است جایگزین کرد.

تعریف ۶.۲.۱. [۹] فرض کنید که (X,d) یک فضای متریک کامل و p یک τ-فاصله روی X باشد. سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری (X,T) را که در آن $T : X \to C(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار است، یک (Q_p, λ)-انقباضی نامند هرگاه

$$\exists\lambda \in [0,1),\ \forall x, y \in X, Q_p(A,B) \leq \lambda p(x,y), \tag{۴}$$

که در آن $Q_p(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} p(a,b)$.

قضیه ۷.۲.۱ ([۲۲]، قضیه۳.۷). فرض کنید که (X,d) یک فضای متریک کامل و p یک τ-فاصله روی X باشد. اگر (X,T) سیستم دینامیکی مجموعه‌مقداری باشد به‌طوری که $T : X \to C(X)$ یک (Q_p, λ)-انقباضی باشد آن‌گاه $w \in X$ وجود دارد به‌طوری که $w \in T(w)$ و $p(w,w) = 0$.

۳.۱ فضای تعمیم‌یافته یکنواخت $(X,\mathcal{D})$ و رده $\mathbb{L}_{(X,\mathcal{D})}$

اصطلاحات زیر در پایان نامه حاضر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X مجموعه ای ناتهی است،

الف) خانواده $\mathcal{D} = \{d_\alpha : X \times X \to [0,\infty], \alpha \in \mathcal{A}\}$ که در آن $\mathcal{A}$ مجموعه اندیس است را یک $\mathcal{D}$ -خانواده از شبه مترهای تعمیم‌یافته روی X نامند (به‌طور خلاصه $\mathcal{D}$ -خانواده) هرگاه:

$(\mathcal{D}_1)$ $\forall\alpha \in A,\ \forall x \in X,\ d_\alpha(x,x) = 0$

$(\mathcal{D}_2)$ $\forall\alpha \in A,\ \forall x, y \in X,\ d_\alpha(x,y) = d_\alpha(y,x) = 0$ و

$(\mathcal{D}_3)$ اگر $\alpha \in \mathcal{A}$ و $x, y, z \in X$ و $d_\alpha(x,z)$ و $d_\alpha(y,z)$ متناهی باشند، آن‌گاه $d_\alpha(x,y)$ متناهی است و $.d_\alpha(x,y) \leq d_\alpha(x,z) + d_\alpha(z,y)$

ب) اگر $\mathcal{D}$ ، یک $\mathcal{D}$ -خانواده باشد آن‌گاه زوج $(X,\mathcal{D})$ را فضای تعمیم‌یافته یکنواخت نامیم.

ج) اگر $(X,\mathcal{D})$ فضای تعمیم‌یافته یکنواخت باشد، $\mathcal{D}$ -خانواده $\mathcal{D}$ را جداساز گویند اگر

$(\mathcal{D}_4)$ $\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists \alpha \in A,\ 0 < d_\alpha(x,y)$؛

د) اگر $\mathcal{D}$-خانواده $\mathcal{D}$ جداساز باشد آن‌گاه زوج $(X,\mathcal{D})$ را فضای هاسدورف تعمیم‌یافته یکنواخت نامند.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X ناتهی است. خانواده

$$\mathcal{Q} = \{q_\alpha : X \times X \to [0,\infty]\,, \alpha \in \mathcal{A}\},$$

که در آن $\mathcal{A}$ مجموعه اندیس است را یک $\mathcal{Q}$ -خانواده از شبه مترهای تعمیم‌یافته روی X نامند هرگاه

$(\mathcal{Q}_1)$ $\forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathcal{A}, q_\alpha(x,x) = 0$ ؛

$(\mathcal{Q}_2)$ اگر $\alpha \in \mathcal{A},\ x,y,z \in X$ و $q_\alpha(x,z) < \infty, q_\alpha(z,y) < \infty$ آن‌گاه $q_\alpha(x,y) < \infty$،

$$q_\alpha(x,y) < q_\alpha(x,z) + q_\alpha(z,y).$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید که $(X,\mathcal{D})$ فضای تعمیم یافته یکنواخت و $\mathcal{A}$ مجموعه اندیس است.

الف) خانواده $\mathcal{L} = \{L_\alpha : X \times X \to [0,\infty]\,, \alpha \in \mathcal{A}\}$ را $\mathcal{L}$-خانواده روی X نامند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$(\mathcal{L}_1)$ اگر $\alpha \in \mathcal{A}$، $x,y,z \in X$ و $L_\alpha(x,z), L_\alpha(z,y).$ متناهی باشند آن‌گاه $L_\alpha(x,y)$ متناهی است و داریم

$$L_\alpha(x,y) \leq L_\alpha(x,z) + L_\alpha(z,y),$$

$(\mathcal{L}_2)$ هر دنباله $(x_m : m \in \mathbb{N})$ و $(y_m : m \in \mathbb{N})$ در X به طوری که

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} L_\alpha(x_n, x_m) = 0 \tag{۵}$$

و

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \quad \lim_{m\to\infty} L_\alpha(x_m, y_m) = 0, \tag{۶}$$

نتیجه دهد که

$$\forall\alpha\in\mathcal{A},\quad \lim_{m\to\infty} d_\alpha(x_m,y_m)=\circ. \tag{۷}$$

ب) فرض کنید $L_{(X,\mathcal{D})}$ کلاسی است که به‌صورت $L_{(X,\mathcal{D})}=\mathbb{L}$ تعریف شود به طوری که $\mathbb{L}$ یک $\mathcal{L}$ -خانواده روی X است.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $(X,\mathcal{D})$ یک فضای هاسدورف تعمیم‌یافته یکنواخت باشد که در آن $\mathcal{D}=\{d_\alpha: X\times X\to[\circ,+\infty],\ \alpha\in\mathcal{A}\}$ یک $\mathcal{D}$ -خانواده و $\mathcal{A}$ مجموعه اندیس است. فرض کنید زیر مجموعه $E\subset X$ که شامل حداقل دو عضو متمایز باشد، به طور دلخواه و ثابت انتخاب شده است و برای هر $\alpha\in\mathcal{A}$، فرض کنید $L_\alpha: X\times X\to[\circ,+\infty]$ به فرم زیر تعریف شود:

$$L_{\alpha}(x,y)=\begin{cases} d_\alpha(x,y), & E\cap\{x,y\}=\{x,y\},\\ +\infty, & E\cap\{x,y\}\neq\{x,y\},\end{cases}$$

آن‌گاه خانواده $\mathbb{L}=\{L_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$ ، $\mathcal{L}$ -خانواده روی $(X,\mathcal{D})$ است.

ابتدا نشان می‌دهیم که شرط $(\mathcal{L}_1)$ برقرار است. فرض کنید که $\alpha\in\mathcal{A}$ ، $x,y,z\in X$ دلخواه و ثابت‌اند به طوری که

$$L_\alpha(x,z)<+\infty,$$

و

$$L_\alpha(z,y)<+\infty.$$

از عبارت بالا برای $x,y,z\in E$ داریم :

$$d_\alpha(x,z)=L_\alpha(x,z),$$

و

$$d_\alpha(z,y)=L_\alpha(z,y).$$