دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

عنوان

بعد گرنشتاین تصویری نسبت به یك مدول نیمه‌دوگانی

تدوین

فاطمه تفضلی هرندی

استادان راهنما

دکتر جواد اسدالهی و دکتر محمدتقی دیبائی

آذر ماه ۱۳۹۰

اظهارنامه

این پایان‌نامه براساس مقاله

Diana White, *Gorenstein projective dimension with respect to a semei-dualizing module,* Journal of Commutative Algebra V2, NO.1, 2010

تدوین شده است.

چکیده

در این پایان‌نامه قصد داریم خواص مدول‌های Cـگرنشتاین تصویری را روی حلقه‌های جابه‌جایی مورد بررسی قرار دهیم. در ابتدا به بیان مفهوم مدول Cـگرنشتاین تصویری می‌پردازیم. سپس بعد Cـگرنشتاین تصویری مدول‌ها را تعریف نموده و نشان می‌دهیم مدول‌هایی که بعد Cـگرنشتاین تصویری متناهی دارند، تقریب‌های Cـگرنشتاین تصویری می‌پذیرند که تعمیمی از تقریب‌های کوهن‌ـمکالی ماکسیمال می‌باشد. در انتها روی یک حلقه موضعی شرط لازم و کافی برای آنکه تقریب Cـگرنشتاین، مینیمال شود را بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: بعد گرنشتاین، بعد Cـگرنشتاین، تقریب Cـگرنشتاین، تحلیل سره، تحلیل اکید، مدول تماماً Cـبازتابی، تحلیل کامل، PCـتحلیل کامل، مدول‌های نیمه‌دوگانی، کلاس باس، کلاس Cـتصویری.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۰۰): 18G25، 18G20، 13D25 ,13D07 ,13D05 ,13D02.

مقدمه

مدول نیمه‌دوگانی در سال ۱۹۷۳ توسط فاکسبی[1] در [۱۲] و در سال ۱۹۸۴ توسط گلد[2] در [۱۳] در سال ۱۹۷۴ توسط وسکانسیلوس[3] در [۲۳] روی یک حلقه نوتری R، به‌طور مستقل به‌صورت زیر معرفی شد:

مدول C نیمه‌دوگانی است اگر $R \cong \operatorname{Hom}_R(C,C)$ و $\operatorname{Ext}_R^{\geq 1}(C,C)=0$ و C یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. به‌طور مثال هر Rـمدول آزاد از مرتبه ۱ و هر Rـمدول دوگانی، Rـمدول نیمه‌دوگانی هستند.

در سال ۱۹۶۶ توسط آسلاندر[4] و بریدگر[5] در [۲] بعد گرنشتاین برای Rـمدول‌های با تولید متناهی معرفی شد. سپس در سال ۱۹۸۴ توسط گولود در [۱۳]، بعد Cـگرنشتاین برای Rـمدول‌های با تولید متناهی معرفی شد (به تعریف ۷.۱.۴ مراجعه کنید).

در ادامه بعد گرنشتاین تصویری در سال ۱۹۹۵ توسط جندا[6] و اناک[7] در [۱۰] روی یک حلقه کلی R مورد بررسی قرار گرفت و در سال ۲۰۰۵ توسط هولم[8] و یورگنسن[9] در [۱۶]، این مفهوم روی یک حلقه نوتری بیان گردید.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. اکنون محتوای تمام فصل‌ها را با جزئیات بیشتر توصیف می‌کنیم.

فصل اول:

در این فصل برخی تعاریف و قضایای موردنیاز در قسمت‌های بعد را بیان می‌کنیم. در این راستا مفاهیم و مطالب موردنیاز برای بیان مفهوم کوهمولوژی نسبی را ذکر کرده و سپس کوهمولوژی نسبی را معرفی می‌نماییم.

فصل دوم:

در این فصل به بیان مفاهیم مدول دوگانی و نیمه‌دوگانی و کلاس Cـتصویری و Cـانژکتیوی و مدول Cـگرنشتاین تصویری می‌پردازیم و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم هر Rـمدول تصویری و Cـتصویری، Rـمدول Cـگرنشتاین تصویری است از این‌رو هر Rـمدول یک تحلیل Cـگرنشتاین تصویری می‌پذیرد (به گزاره ۵.۹.۲ مراجعه شود). آنگاه در قضیه ۷.۹.۲، خواص کلاس Cـگرنشتاین تصویری را بررسی می‌کنیم.

فصل سوم:

1) Foxby 2) Golod 3) Vasconcelos 4) Auslander 5) Bridger 6) Jenda 7) Enoch 8) Holm 9) Jorgensen

در این فصل بعد Cـگرنشتاین تصویری را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به بیان مفهوم تحلیل‌های G_Cـتصویری اکید که تقریب G_Cـتصویری را نتیجه می‌دهند می‌پردازیم (به گزاره ۷.۳.۳ مراجعه شود). در ادامه مفهومی از تقریب کوهن‌ـمکالی ماکسیمال بیان کرده و ارتباط بین تقریب کوهن‌ـمکالی ماکسیمال و تقریب Cـگرنشتاین تصویری را نشان می‌دهیم.

فصل چهارم:

در این فصل Rـمدول تماماً Cـبازتابی را معرفی کرده و ارتباط بین مدول Cـگرنشتاین تصویری و مدول تماماً Cـبازتابی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. (به قضیه ۱۰.۱.۴ مراجعه شود).

فهرست مطالب

فصل اول

مفاهیم اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای موردنیاز در قسمت‌های بعد را بیان می‌کنیم. در این راستا مفاهیم و مطالب موردنیاز برای بیان مفهوم کوهمولوژی نسبی را ذکر کرده وسپس کوهمولوژی نسبی را معرفی می‌نماییم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

۱.۱.۱ تعریف. یک رسته خانواده‌ای است مانند $\mathcal{C}$، متشکل از:

(i). یک کلاس از اشیاء که معمولاً آن‌ها را با A، B، C و ...نمایش می‌دهیم.

(ii). به هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان می‌دهیم. اعضای این مجموعه را ریخت‌هایی از A به B نامیده و با نماد $f : A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه‌ها باید دارای این خاصیت باشند که برای هر چهار شی A، B، C و D که $(A, B) \neq (C, D)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \phi$$

(iii). به‌ازای هر سه شی A، B و C، قانون ترکیب

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

با ضابطه $(g, f) \mapsto gf$ موجود باشد به گونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) **شرکت‌پذیری.** اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$، آن‌گاه

$$h(gf) = (hg)f$$

۲) **همانی.** به‌ازای هر شی A از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ موجود می‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ داشته باشیم $f1_A = f$ و $1_A g = g$

۲.۱.۱ تعریف. رسته $\mathcal{C}$ را جمعی گوییم هرگاه:

۱) به‌ازای هر دو شی A و B متعلق به رسته $\mathcal{C}$، مجموعه $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ یک گروه آبلی (جمعی) باشد.

۲) به‌ازای اشیاء A، B، C و D و ریخت‌های مناسب بین آنها، خاصیت توزیع‌پذیری برقرار باشد. یعنی در دیاگرام زیر

$$A \xrightarrow{h} B \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C \xrightarrow{k} D$$

داشته باشیم:

$$(f+g)h = fh + gh \ , \ k(f+g) = kf + kg$$

۳) رسته $\mathcal{C}$ دارای شی صفر باشد.

۴) رسته $\mathcal{C}$ نسبت به حاصل‌جمع مستقیم و حاصل‌ضرب مستقیم دو شی بسته باشد. یعنی به‌ازای هر دو شی متعلق به رسته $\mathcal{C}$ مانند A، B، $A\prod B$ و $A\coprod B$ نیز متعلق به اشیاء رسته $\mathcal{C}$ باشند.

۳.۱.۱ مثال. به‌ازای یک حلقه جابه‌جایی و یکدار R، رسته Rـمدول‌ها و R ـهمومورفیسم‌ها (Rـهم‌ریختی‌ها) رسته‌هایی جمعی هستند. در حالت کلی رسته گروه‌ها یک رسته جمعی نیست.

۴.۱.۱ تعریف. به ریخت $f: C \longrightarrow D$ از رسته $\mathcal{C}$، تکریختی گوییم، هرگاه به‌ازای هر شی B و ریخت‌های $g,h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ از $fg = fh$ نتیجه شود $g = h$.

به ریخت $f: C \longrightarrow D$، برویختی گوییم، هرگاه به‌ازای هر شی E و ریخت‌های $k,t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,E)$ از $kf = tf$ نتیجه شود $k = t$.

۵.۱.۱ مثال. براحتی می‌توان دید یک ریخت در رسته مجموعه‌ها تکریختی (برویختی) است، اگر و تنها اگر یک به یک (پوشا) باشد.

۶.۱.۱ تعریف. در رسته جمعی $\mathcal{C}$، هسته و هم‌هسته ریخت $f : B \longrightarrow C$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

هسته $f : B \longrightarrow C$، ریختی مانند $i : A \longrightarrow B$ است که $fi = 0$ و اگر $j : A' \longrightarrow B$ ریخت دیگری باشد به‌طوری‌که $fj = 0$، آن‌گاه ریخت یکتای $p : A' \longrightarrow A$ موجود باشد به قسمتی که $j = ip$، در این صورت می‌نویسیم $A = \ker f$.

هم‌هسته ریخت $f : B \longrightarrow C$ ریختی مانند $\pi : C \longrightarrow D$ است به قسمی که $\pi f = 0$ و اگر $\gamma : C \longrightarrow D'$ ریخت دیگری باشد که $\gamma f = 0$ آن‌گاه ریخت منحصربه‌فرد $\gamma' : D \longrightarrow D'$ موجود باشد به قسمی که $\gamma = \gamma' \pi$، در این صورت می‌نویسیم $D = \operatorname{coker} f$

۷.۱.۱ تعریف. رسته جمعی $\mathcal{C}$ را آبلی گوییم هرگاه:

۱) هر ریخت در $\mathcal{C}$ دارای هسته و هم‌هسته باشد.

۲) به‌ازای هر دو شی دلخواه A و B متعلق به رسته $\mathcal{C}$ و هر ریخت $f : A \longrightarrow B$،

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coker} i \arrow[r, "\bar{f}", "\cong"'] & \ker \pi \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

ریخت القایی $\bar{f}$ در دیاگرام فوق، یکریختی باشد.

۸.۱.۱ مثال. به‌ازای یک حلقه جابه‌جایی و یکدار R، رسته Rـمدول‌ها یک رسته آبلی است. رسته گروه‌های آبلی مثالی دیگر از رسته‌های آبلی می‌باشد. رسته گروه‌ها، یک رسته آبلی نیست، زیرا جمعی نیست.

اکنون مثالی از رسته‌ای ارائه می‌نماییم که جمعی بوده ولی آبلی نیست.

۹.۱.۱ مثال. رسته Rـمدول‌های تصویری که آن را با نماد $\mathcal{P}(R)$ نمایش می‌دهیم، رسته‌ای جمعی بوده اما چون هم‌هسته‌ی هر همریختی بین دو Rـمدول تصویری، تصویری نیست لذا رسته‌ی Rـمدول‌های تصویری، آبلی نیست. (به هم‌هسته‌ی $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$، یعنی $\mathbb{Z}_2$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$ مدول توجه شود)

در سرتاسر این پایان‌نامه R را حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار درنظر می‌گیریم. رسته Rـمدول‌ها را با نماد $\mathcal{C}(R)$ و همچنین رسته Rـمدول‌های با تولید متناهی را با نماد $\mathcal{C}^f(R)$ و رسته گروه‌های آبلی را با نماد $\mathcal{A}b$ نمایش می‌دهیم.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم A، B و C هرکدام Rـمدول‌هایی دلخواه باشند. در این صورت اگر رشته

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

دقیق باشد، آن را دنباله دقیق کوتاه می‌گوییم.

دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

را شکافنده گوییم، هرگاه نگاشت $\psi' : C \longrightarrow B$ موجود باشد به‌طوری‌که $\psi\psi' = 1_C$.

۱۱.۱.۱ تعریف. نگاشت $T : \mathcal{C}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$ را یک تابعگون همورد (پادورد) گوییم هرگاه:

(i). به‌ازای هر شی A در $\mathcal{C}(R)$، TA یک شی در $\mathcal{A}b$ باشد.

(ii). اگر $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی در $\mathcal{C}(R)$ باشد، آن‌گاه $Tf : TA \longrightarrow TB$ ($Tf : TB \longrightarrow TA$) یک ریخت در $\mathcal{A}b$ می‌باشد به گونه‌ای که:

۱) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ همریختی‌هایی در $\mathcal{C}(R)$ باشند آن‌گاه $T(gf) = TgTf$ ($T(gf) = TfTg$)،

۲) برای هر شی A در $\mathcal{C}(R)$ داشته باشیم: $T(1_A) = 1_{TA}$.

۱۲.۱.۱ تعریف. تابعگون همورد $T : \mathcal{C}(R) \longrightarrow \mathcal{A}b$ را دقیق چپ می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دنباله دقیق کوتاه از Rـمدول‌ها و Rـهمریختی‌ها مانند $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$، دنباله زیر دقیق باشد

$$0 \longrightarrow T(M) \xrightarrow{T(\phi)} T(N) \xrightarrow{T(\psi)} T(K)\,.$$

همچنین تابعگون همورد T را دقیق راست گوییم، هرگاه به‌ازای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مانند بالا، دنباله‌ی

$$T(M) \xrightarrow{T(\phi)} T(N) \xrightarrow{T(\psi)} T(K) \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. تابعگون T دقیق نامیده می‌شود. هرگاه هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد. مشابه تعاریف بالا برای تابعگون پادورد نیز قابل بیان است.

۱۳.۱.۱ مثال. فرض کنیم A و B متعلق به رسته Rـمدول‌ها باشند، آنگاه

- تابعگون $\mathrm{Hom}_R(A,-) : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ همورد و دقیق چپ می‌باشد.
- تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-,B) : \mathcal{C}(R)) \longrightarrow Ab$ پادورد و دقیق چپ می‌باشد.
- تابعگون $- \otimes_R B : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ همورد و دقیق راست می‌باشد.
- تابعگون $A \otimes_R - : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ همورد و دقیق راست می‌باشد.

۱۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه باشد. همبافت X از Rـمدول‌ها یک دنباله به‌صورت

$$X = \ldots \xrightarrow{\sigma^X_{n+1}} X_n \xrightarrow{\sigma^X_n} X_{n-1} \xrightarrow{\sigma^X_{n-1}} \ldots$$

از Rـمدول‌ها و هم‌ریختی‌های Rـمدولی است به‌طوری‌که $\sigma^X_n \sigma^X_{n+1} = 0$. مدول X_n را مدول درجه‌ی n از $\mathcal{X}$ می‌نامیم. همبافت X را دقیق گوییم هرگاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم $\ker \sigma^X_n = \mathrm{Im}\, \sigma^X_{n+1}$.

۱۵.۱.۱ تعریف. همبافت X را کراندار گوییم هرگاه به‌ازای $|n| \gg 0$ داشته باشیم $X_n = 0$.

۱۶.۱.۱ تعریف. همبافت X را از نوع متناهی گوییم هرگاه به‌ازای هر i، X_i با تولید متناهی باشد.

از این به بعد فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد و کلیه همبافت‌های مطرح شده را به‌عنوان همبافت‌های روی R درنظر می‌گیریم.

۱۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X و X' دو همبافت باشند. منظور از نگاشت زنجیری $f : X \longrightarrow X'$ دنباله‌ای از ریخت‌ها به‌صورت $f_n : X_n \longrightarrow X'_n$ می‌باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر عدد صحیح n داشته باشیم

$f_n \circ \sigma_{n+1} = \sigma'_{n+1} \circ f_{n+1}$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابه‌جا شود:

$$\begin{array}{ccccccccc} X = \dots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\sigma_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ X = \dots & \longrightarrow & X'_{n+1} & \underset{\sigma'_{n+1}}{\longrightarrow} & X'_n & \underset{\sigma'_n}{\longrightarrow} & X'_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

۱۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X و X' دو همبافت باشند. دو نگاشت زنجیری $f, g : X \longrightarrow X'$ هموتوپ نامیده می‌شوند و به‌صورت $f \simeq g$ نمایش داده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، همریختی $S_n : X_n \longrightarrow X'_{n+1}$ موجود باشد به گونه‌ای که

$$\forall n \in \mathbb{Z} \,;\ f_n - g_n = \sigma'_{n+1} S_n + S_{n-1}\sigma_n.$$

۱۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک همبافت باشد. به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، n امین گروه همولوژی همبافت X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_n(X) = \ker \sigma_n / \operatorname{Im} \sigma_{n+1}.$$

به‌علاوه فرض کنیم $f : X \longrightarrow X'$ یک نگاشت زنجیری بین همبافت‌ها باشد. در این صورت به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، نگاشتی بین گروه‌های همولوژی با ضابطهٔ

$$H_n(f) \ :\ H_m(X) \longrightarrow H_n(X')$$

$$Z_n + \operatorname{Im} \sigma_{n+1}(X) \mapsto f_n(Z_n) + \operatorname{Im} \sigma'_{n+1}(X')$$

القا می‌شود. به‌راحتی دیده می‌شود که این نگاشت یک همریختی خوش‌تعریف بین گروه‌های همولوژی است. نگاشت $H_n(f)$ را نگاشت القایی بوسیله f نامیده و معمولاً آن را با f_* نمایش می‌دهیم.

۲۰.۱.۱ تعریف. نگاشت زنجیری $f : X \longrightarrow X'$ را شبه‌یکریختی گوییم، اگر به‌ازای هر عدد صحیح n، $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(X')$ یکریختی باشد.

۲۱.۱.۱ تذکر. فرض کنیم دو نگاشت زنجیری g و f هموتوپ باشند. آن‌گاه به‌ازای هر n داریم

$$H_n(f) = H_n(g)$$

اثبات. به [18,Theorem.6.14] مراجعه شود.

۲۲.۱.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه باشد. کلاس تمام Rـهمبافت‌ها و نگاشت‌های زنجیری یک رسته است.

۲۳.۱.۱ تعریف. گوییم دنباله‌ی $\circ \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \longrightarrow \circ$ یک دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها است، هرگاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ دنباله‌ی $\circ \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{g_n} W_n \longrightarrow \circ$ دنباله‌ای دقیق باشد.

۲۴.۱.۱ قضیه. اگر $\circ \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق از همبافت‌ها باشد، آن‌گاه یک دنباله دقیق از مدول‌ها به‌صورت

$$\ldots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(W) \xrightarrow{\sigma_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \ldots$$

وجود دارد که در آن σ_n همریختی اتصال است.

اثبات. به [18,Theorem.6.3] مراجعه شود.

۲۵.۱.۱ تذکر. فرض کنیم $\circ \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق از همبافت‌ها باشد. اگر A' و A'' دقیق باشند یعنی به‌ازای $i \in \mathbb{Z}$

$$H_i(A'') = \circ = H_i(A'),$$

به‌راحتی از قضیه فوق نتیجه می‌شود که

$$H_i(A) = \circ.$$

۲۶.۱.۱ لم پنج. دیاگرام جابه‌جایی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle t_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & & \downarrow{\scriptstyle t_3} & & \downarrow{\scriptstyle t_4} & & \downarrow{\scriptstyle t_5} \\
B_1 & \xrightarrow[h_1]{} & B_2 & \xrightarrow[h_2]{} & B_3 & \xrightarrow[h_3]{} & B_4 & \xrightarrow[h_4]{} & B_5
\end{array}$$

۱) اگر $t_۲$ و $t_۴$ پوشا باشند و $t_۵$، یک به یک باشد، آن‌گاه $t_۳$ نیز پوشا خواهد بود.

۲) اگر $t_۲$ و $t_۴$ یک به یک باشند و $t_۱$، پوشا باشد، آن‌گاه $t_۳$ نیز یک به یک خواهد بود.

به‌ویژه، اگر $t_۱$، $t_۲$، $t_۴$ و $t_۵$ یکریختی باشند، آن‌گاه $t_۳$ نیز یکریختی خواهد بود.

اثبات. به [18,lemma.3.32] مراجعه شود.

۲۷.۱.۱ تعریف. مدول P را تصویری گوییم هرگاه تابعگون

$$\mathrm{Hom}_R(P,-)\ :\ \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$$

دقیق باشد.

Rـمدول E را انژکتیو گوییم هرگاه تابعگون

$$\mathrm{Hom}_R(-,E)\ :\ \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$$

دقیق باشد. همچنین Rـمدول F را یکدست گوییم هرگاه تابعگون

$$F \otimes_R -\ :\ \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$$

دقیق باشد.

۲۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M مدولی ناصفر روی حلقه‌ی R باشد. یک تحلیل تصویری برای M، همبافت دقیق به‌صورت

$$\ldots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \longrightarrow M \longrightarrow ۰$$

است، که در آن P_iها Rـمدول‌هایی تصویری می‌باشند. همبافت

$$\ldots \longrightarrow P_۲ \xrightarrow{d_۱} P_۱ \xrightarrow{d_۰} P_۰ \longrightarrow ۰$$

را تحلیل تصویری محذوف M نامیده و آن را با نماد $P_{\bullet M}$ نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب یک تحلیل انژکتیو برای M را دنباله‌ای دقیق به‌صورت

$$۰ \longrightarrow M \longrightarrow E^۰ \longrightarrow E^۱ \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^i \longrightarrow \ldots$$

تعریف می‌کنیم که در آن E^iها Rـمدول‌هایی انژکتیو می‌باشند. همبافت

$$0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^i \longrightarrow \ldots$$

را تحلیل انژکتیو محذوف M نامیده و با $E^\bullet_M$ نمایش می‌دهیم.

۲۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $T : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ تابعگونی همورد باشد. به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ تابعگون $L_nT : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ را nامین تابعگون مشتق شده چپ T می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید M یک Rـمدول و $P_\circ M$ تحلیل تصویری محذوفی از M باشد. آن‌گاه L_nT روی M به‌صورت

$$L_nT(M) = H_n(TP_\circ M)$$

می‌شود. اگر $f : M \longrightarrow M'$ یک Rـهمریختی باشد، آن‌گاه نگاشت زنجیری به‌صورت $\tilde{f} : P_{\bullet M} \longrightarrow P_{\bullet M'}$ روی f وجود خواهد داشت که در آن $P_{\bullet M}$ و $P_{\bullet M'}$ به ترتیب تحلیل‌های تصویری محذوفی از M و M' می‌باشند. در این صورت L_nT روی f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$L_nT(f) : L_nT(M) \longrightarrow L_nT(M')$$
$$x + \operatorname{Im} T(d_{n+1}) \mapsto f_n(x) + \operatorname{Im} T(d'_{n+1})$$

در جبر همولوژی ثابت می‌شود که L_nT تابعگون جمعی، همورد و خوش‌تعریف است.

۳۰.۱.۱ مثال. فرض کنیم $T = - \otimes_R N$ آن‌گاه، به‌ازای هر Rـمدول M، داریم

$$L_nT(M) = H_n(P_{\bullet M} \otimes_R N)$$

به طوری‌که $P_{\bullet M}$، تحلیل تصویری محذوفی از M است. در جبر همولوژیک کلاسیک $L_nT(M)$ با $\operatorname{Tor}_n^R(M, N)$ نمایش داده می‌شود.

۳۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $T : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ تابعگونی همورد باشد. به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ تابعگون $R^nT : \mathcal{C}(R) \longrightarrow Ab$ را nامین تابعگون مشتق شده راست T می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید N یک Rـمدول و $E_N^\bullet$ تحلیل انژکتیو محذوفی از N باشد. آن‌گاه R^nT روی N به‌صورت

$$R^nT(N) = H^n(TE_N^\bullet)$$

تعریف می‌شود. اگر $f : N \longrightarrow N'$ یک Rـهمریختی باشد، نگاشت زنجیری به‌صورت $\tilde{f} : E_N^\bullet \longrightarrow E_{N'}^\bullet$ روی f وجود خواهد داشت به‌طوری‌که $E_N^\bullet$ و $E_{N'}^\bullet$ به‌ترتیب تحلیل‌های انژکتیو محذوفی از N و N' می‌باشند. در این صورت R^nT روی f را چنین تعریف می‌کنیم

$$R^nT(f) : R^nT(N) \longrightarrow R^nT(N'),$$
$$x + \operatorname{Im} T(d_{n-۱}) \mapsto f_n(x) + \operatorname{Im} T(d'_{n-۱}).$$

در جبر همولوژی ثابت می‌شود که R^nT تابعگونی جمعی، همورد و خوش‌تعریف است.

۳۲.۱.۱ مثال. فرض کنیم $T = \operatorname{Hom}_R(M, -)$ باشد. آن‌گاه داریم

$$R^nT(N) = H^n(\operatorname{Hom}_R(M, E_N^\bullet))$$

به طوری‌که $E_N^\bullet$، تحلیل انژکتیو محذوفی از Rـمدول N است. در جبر همولوژیک کلاسیک $R^nT(N)$ با $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ نمایش داده می‌شود.

۳۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول ناصفر باشد. گوییم مدول M بعد تصویری حداکثر n دارد و می‌نویسیم $\operatorname{pd}_R(M) \leq n$ ، هرگاه M دارای تحلیل تصویری به‌صورت

$$۰ \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_۱ \longrightarrow P_۰ \longrightarrow M \longrightarrow ۰$$

باشد. اگر n کوچکترین عدد با خاصیت فوق باشد، آن‌گاه گوییم بعد تصویری مدول M، دقیقاً n است. همچنین اگر Rـمدول M، هیچ تحلیل تصویری متناهی نداشته باشد، می‌گوییم بعد تصویری مدول M نامتناهی است و می‌نویسیم $\operatorname{pd}_R(M) = \infty$. اگر M، مدول صفر باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم $\operatorname{pd}_R(M) = -\infty$.

۳۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم N یک Rـمدول ناصفر باشد. گوییم مدول N بعد انژکتیو حداکثر n دارد و می‌نویسیم $\mathrm{id}_R(N) \leq n$، هرگاه N دارای تحلیل انژکتیو به‌صورت زیر باشد

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$$

اگر n کوچکترین عدد با خاصیت فوق باشد، آن‌گاه گوییم بعد انژکتیو مدول N، دقیقاً n است. همچنین اگر Rـمدول N، هیچ تحلیل انژکتیو متناهی نداشته باشد، می‌گوییم بعد انژکتیو مدول N نامتناهی است و می‌نویسیم $\mathrm{id}_R(N) = \infty$. اگر N، مدول صفر باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم $\mathrm{id}_R(N) = -\infty$.

۳۵.۱.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه و M یک Rـمدول چپ و $n \geq 0$ باشد. شرایط زیر معادل‌اند:

۱) بعد تصویری مدول M روی حلقه R حداکثر n است.

۲) برای هر Rـمدول N و هر $k \geq 1$، $\mathrm{Ext}_R^{n+k}(M, N) = 0$.

۳) برای هر Rـمدول N، $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$.

۳۶.۱.۱ تذکر. فرض کنیم R یک حلقه و N یک Rـمدول و $n \geq 0$ شرایط زیر معادل‌اند:

۱) بعد انژکتیو مدول N روی حلقه R حداکثر n است.

۲) برای هر Rـمدول M و هر $k \geq 1$، $\mathrm{Ext}_R^{n+k}(M, N) = 0$.

۳) برای هر Rـمدول M، $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$.

۳۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد. گوییم M دارای تحلیل تصویری از نوع متناهی است هرگاه تحلیل تصویری برای M موجود باشد به گونه‌ای که همه جملات آن با تولید متناهی است.

۳۸.۱.۱ تذکر. M تحلیل تصویری از نوع متناهی دارد اگر و تنها اگر M تحلیل آزاد از نوع متناهی داشته باشد.

اثبات. اگر M تحلیل آزاد از نوع متناهی داشته باشد، واضح است که همان تحلیل، تحلیل تصویری از نوع متناهی است. برای اثبات حالت عکس، فرض کنیم M تحلیل تصویری از نوع متناهی

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

دارد. می‌دانیم که P_0 تصویر همریخت یک Rـمدول آزاد با تولید متناهی F_0 است. دراین‌صورت Rـمدول Q_0 وجود دارد به‌طوری‌که $F_0 = P_0 \oplus Q_0$.

حال با اضافه کردن

$$0 \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{1} Q_0 \longrightarrow 0$$

به همبافت دقیق

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

همبافتی

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\bar{d}_2} P_1 \oplus Q_0 \xrightarrow{\bar{d}_1} P_0 \oplus Q_0 \xrightarrow{\bar{d}_0} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

را داریم که در آن نگاشت‌های $\bar{d}_2$، $\bar{d}_1$ و $\bar{d}_0$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{d}_0 \ : P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow M$$

$$(p_0, q_0) \mapsto d_0(p_0)$$

$$\bar{d}_1 \ : P_1 \oplus Q_0 \longrightarrow P_0 \oplus Q_0$$

$$(p_1, q_0) \mapsto (d_1(p_1), q_0)$$

$$\bar{d}_2 \ : P_2 \longrightarrow P_1 \oplus Q_0$$

$$p_2 \mapsto (d_2(p_2), 0)\,.$$

کافی است نشان دهیم همبافت (*) دقیق است.

$\ker \bar{d}_1 = (d_1(p_1), q_0)$. بنابراین $q_0 = 0$ و در نتیجه $\ker \bar{d}_1 = \ker d_1 = \operatorname{Im} d_2$ از طرف دیگر $\operatorname{Im} \bar{d}_2 = \operatorname{Im} d_2$. دراین‌صورت داریم $\ker \bar{d}_1 = \operatorname{Im} \bar{d}_2$. $\ker \bar{d}_0 = \ker d_0 \oplus Q_0 = \operatorname{Im} d_1 \oplus Q_0$. از طرف دیگر $\operatorname{Im} \bar{d}_1 = \operatorname{Im} d_1 \oplus Q_0$. دراین‌صورت داریم $\ker \bar{d}_0 = \operatorname{Im} \bar{d}_1$.

پس دنباله $(*)$ دقیق می‌باشد و Rـمدول $P_0 \oplus Q_0$ آزاد است. در مرحله بعد با اضافه کردن

$$0 \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{1} Q_1 \longrightarrow 0$$

به همبافت

$$\dots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{\bar{d}_2} P_1 + Q_0 \xrightarrow{\bar{d}_1} P_0 \oplus Q_0 \xrightarrow{\bar{d}_0} M \longrightarrow 0$$

همبافتی

$$\longrightarrow P_3 \xrightarrow{\bar{d}_3} P_2 \oplus Q_1 \xrightarrow{\bar{\bar{d}}_2} P_1 \oplus Q_0 \oplus Q_1 \xrightarrow{\bar{\bar{d}}_1} P_0 \oplus Q_0 \xrightarrow{\bar{d}_0} M \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

را داریم که در آن نگاشت‌های $\bar{d}_3$ و $\bar{\bar{d}}_2$ و $\bar{\bar{d}}_1$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{d}}_1 &: P_1 \oplus Q_0 \oplus Q_1 \longrightarrow P_0 \oplus Q_0 \\
&(p_1, q_0, q_1) \longmapsto (d_1(p_1), q_0) \\
\bar{\bar{d}}_2 &: P_2 \oplus Q_1 \longrightarrow P_1 \oplus Q_0 \oplus Q_1 \\
&(p_2, q_1) \longmapsto (d_2(p_2), 0, q_1) \\
\bar{\bar{d}}_3 &: P_3 \longrightarrow P_2 \oplus Q_1 \\
&p_3 \longmapsto (d_3(p_3), 0)\,.
\end{aligned}$$

کافی است نشان دهیم همبافت $(**)$ دقیق است.

$\operatorname{Im} d_3 = \ker d_2 = \ker \bar{\bar{d}}_2$. از طرف دیگر $\operatorname{Im} \bar{d}_3 = \operatorname{Im} d_3$. دراین‌صورت داریم $\operatorname{Im} \bar{d}_3 = \ker \bar{\bar{d}}_2$.

$\operatorname{Im} d_2 \oplus Q_1 = \ker d_1 \oplus Q_0 = \ker \bar{\bar{d}}_1$. از طرف دیگر $\operatorname{Im} \bar{\bar{d}}_2 = \operatorname{Im} d_2 \oplus Q_1$. دراین‌صورت داریم $\operatorname{Im} \bar{\bar{d}}_2 = \ker \bar{\bar{d}}_1$.

$\operatorname{Im} d_0 \oplus Q_0 = \ker d_0 \oplus Q_0 = \ker \bar{d}_0$. از طرف دیگر $\operatorname{Im} \bar{\bar{d}}_1 = \operatorname{Im} d_1 \oplus Q_0$. دراین‌صورت $\operatorname{Im} \bar{\bar{d}}_1 = \ker \bar{d}_0$.

پس همبافت $(**)$ دقیق می‌باشد. با ادامه همین روند یک تحلیل آزاد از نوع متناهی برای M بدست می‌آوریم.