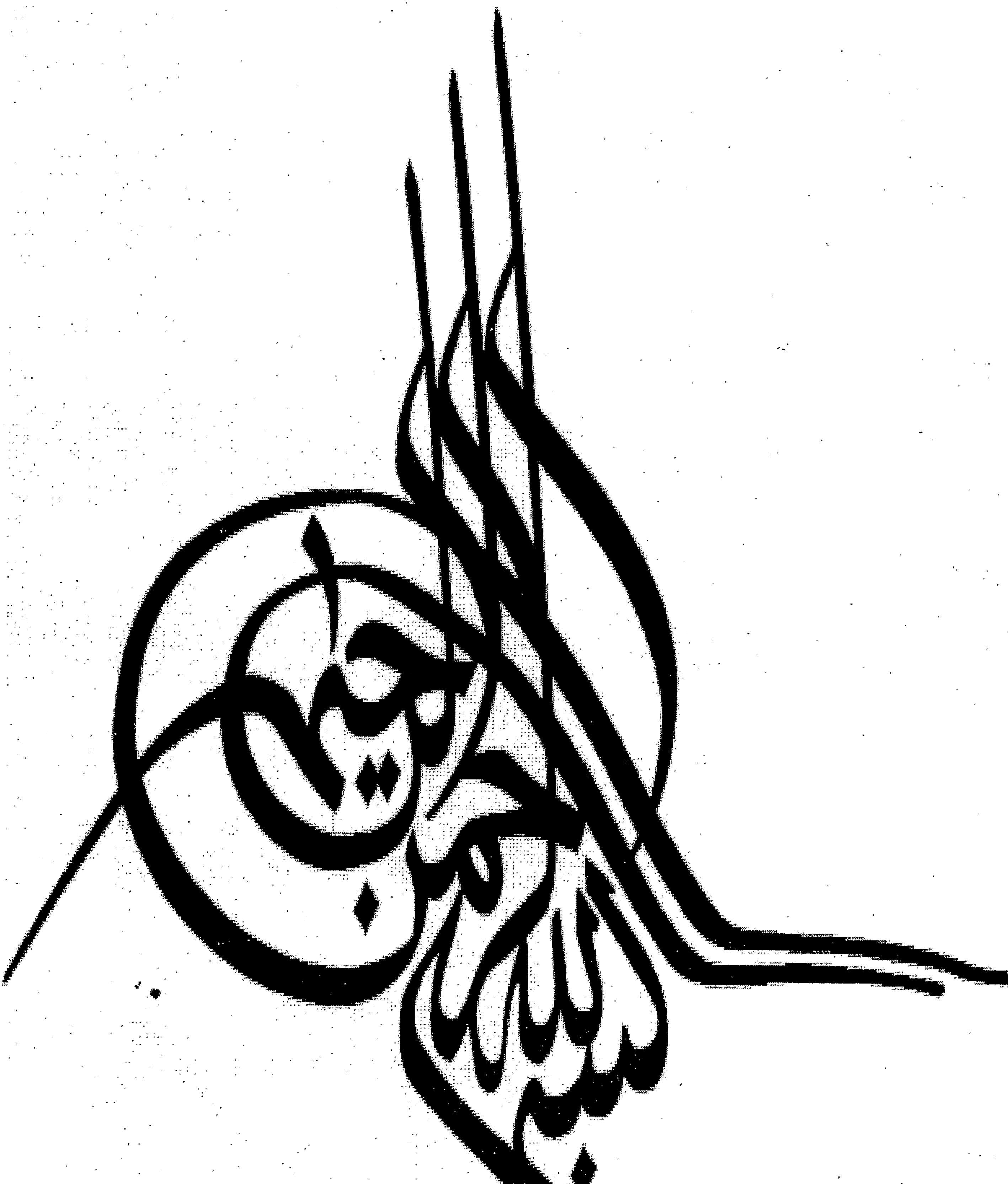

١٠٢٨٤٥١

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته.آنالیز ریاضی...........

دانشکده..علوم پایه..............

گروه علمی..ریاضی......................

عنوان پایان نامه:

تعمیم فضاهای برگمن وزن دار

استاد راهنما:

دکتر بهرام خانی رباطی

استاد مشاور:

دکتر احمد خاکساری

نگارش:

راهام رحمانی جعفربیگی

ماه و سال

۱۳۸۷/۱۰/۳۰

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان :

که توسط راهام رحمانی جعفربیگی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشـد.

تاریخ دفاع: ۱۳۸۷/۱۰/۳۰ نمره: ۱۸/۵ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر بهرام خانی رباطی	استاد راهنما	دانشیار	
۲- دکتر احمد خاکساری	استاد مشاور	دانشیار	
۳- دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
۴- دکتر سیروس اتردی	نماینده تحصیلات تکمیلی	**استادیار**	

تقدیم به:

مادر مهربانم که خاک پایش همواره طوتیای چشمانم بوده است.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر خانی واستاد مشاورم جناب آقای دکتر خاکساری که این حقیررا یاری نمودند تقدیر و تشکر می نمایم.

کرانداری و فشردگی عملگر ترکیبی روی فضاهای گوناگون ازتوابع تحلیلی قبلاتوسط نویسندگان دیگر تحقیق شده است اخیراً مطالعات جالبی روی فضاهای برگمن وزن دار با وزن‌هایی متفاوت از وزنهای شناخته شده صورت گرفته است.

دراین پایان نامه ما فضای برگمن وزن دار تعمیم یافته ی $B_{w,\omega}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

گردایه تمام توابع تحلیلی $f : U \to \mathbb{C}$ بطوریکه $\| f \|_{B_{w,\omega}} = \int_U w(| f(z) |)\omega(z)dm(z) < \infty$ که در آن w یک تابع قدر مطلق و ω وزن حداکثر کلاسیک است.

در ادامه عملگر ترکیبی را روی $B_{w,\omega}$ مطالعه خواهیم کرد و همچنین پیوستگی و فشردگی عملگر ترکیبی C_φ را روی فضای $B_{W,\omega}$ تحقیق خواهیم کرد.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه:

کرانداری و فشردگی عملگر ترکیبی روی فضاهای گوناگون ازتوابع تحلیلی قبلاتوسط نویسندگان دیگر تحقیق شده است به عنوان مثال([9]،[10]،[4]،[5]،[2])راببینید. اخیراً مطالعات جالبی روی فضاهای برگمن وزن دار با وزن‌هایی متفاوت از وزنهای شناخته شده صورت گرفته است.

دراین مقاله ماعملگرترکیبی را روی فضای برگمن وزن دار تعمیم یافته ی $B_{W,\omega}$ مطالعه خواهیم کرد.درفصل ۲، خواص پایه‌ای را که برای فصل ۳ از آن استفاده خواهیم کرد معرفی می‌کنیم و درفصل۳ پیوستگی و فشردگی عملگر ترکیبی C_φ روی فضای $B_{W,\omega}$ را تحقیق خواهیم کرد.

اینک به بیان تعاریف و قضایایی که در طول این پایان نامه با آن سروکار داریم می پردازیم.

فرض کنید Uدیسک واحد در صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$باشدو $dm(z)=rdr\left(\frac{d\theta}{\pi}\right)$ اندازه‌ی لبگ مساحت نرمال شده روی U و $H(U)$فضای تمام توابع تحلیلی روی Uباشدوفرض کنیم $\omega:[0,1)\to(0,\infty)$یک تابع پیوسته باشد.

ω را روی U بوسیله‌ی $\omega(z)=\omega(|z|)$ توسیع می‌دهیم و فرض می‌کنیم وزن‌هایمان نرمال شده هستند، یعنی داریم $\int_U \omega(z)dm(z)=1$ ،می‌گوئیم وزن ω حداکثر کلاسیک است اگر در شرط زیر صدق کند:

برای هر تابع پیوسته‌ی $\delta:[0,1]\to(0,1)$ ثابت مثبت $C_\omega=C(\delta,\omega)$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$\sup_{0\le r<1}\frac{\omega(r)}{\omega(r+\delta(r)(1-r))}\le C_\omega$$

البته وزن‌های کلاسیک $\omega(r)=((\alpha+1)(\alpha+2)/2)(1-r)^\alpha$، $\alpha>-1$ حداکثر کلاسیک نیز هستند زیرا:

$$\sup_{0\le r<1}\frac{\omega(r)}{\omega(r+\delta(r)(1-r))}=\sup\frac{((\alpha+1)(\alpha+2)/2)(1-r)^\alpha}{((\alpha+1)(\alpha+2)/2)(1-r-\delta(r)(1-r))^\alpha}$$
$$=\sup_{0\le r<1}\frac{(1-r)^\alpha}{(1-r)^\alpha(1-\delta(r))^\alpha}=\sup_{0\le r<1}\frac{1}{(1-\delta(r))^\alpha}\qquad 0\le r<1$$

حال با توجه به اینکه $\delta:[0,1]\to(0,1)$ پیوسته است داریم:

m_1,m_2ای وجوددارندکه $0<m_1\le m_2<1$ ، $m_1\le\delta(r)\le m_2$ درنتیجه $-m_2\le-\delta(r)\le-m_1$ حال

دوحالت داریم:

اگر $\alpha>0$ آنگاه $(1-m_2)^{\alpha}\le(1-\delta(r))^{\alpha}\le(1-m_1)^{\alpha}$ درنتیجه:

$(1-\delta(r))^{-\alpha}\le(1-m_2)^{-\alpha}$ پس داریم:

$$Sup(1-\delta(r))^{-\alpha}\le(1-m_2)^{-\alpha}=C$$

اگر $\alpha<0$ آنگاه $(1-\delta(r))^{\alpha}\ge(1-m_1)^{\alpha}$ درنتیجه $(1-\delta(r))^{-\alpha}\le(1-m_1)^{-\alpha}$ پس داریم:

$Sup(1-\delta(r))^{-\alpha}\le(1-m_1)^{-\alpha}=C$ درنتیجه یک C وجوددارد که:

$$Sup\frac{\omega(r)}{\omega(r+\delta(r)(1-r))}\le C$$

برای مشاهده لیستی از وزن‌های حداکثر کلاسیک به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

دراین پایان‌نامه از نماد $D(a;r)$ برای نشان دادن مجموعه $\{z:|z-a|<r\}$ استفاده می کنیم،که درآن $a\in\mathbb{C},r>0$.

تعریف ۱-۱:

مجموعه‌ی باز همبند ساده در صفحه مختلط را دامنه می‌گوئیم.در سرتاسر این پایان نامه Ω یک دامنه است.

تعریف ۱-۲:

گوئیم تابع u تعریف شده در مجموعه‌ی باز Ω در صفحه زیر همساز است اگر از چهار خاصیت زیر برخوردار باشد:

۱) به ازای هر $z\in\Omega$، $-\infty\le u(z)<\infty$

۲) u در Ω پیوسته باشد.

۳) هرگاه $\overline{D}(a;r)\subset\Omega$ آنگاه $u(a)\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$

۴)هیچکدام از انتگرال‌های ۳، $-\infty$ نشود.

قضیه ۱-۳:

تابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار G را روی دامنه‌ی کراندار Ω زیر همساز می‌نامیم اگر برای هر دامنه‌ی D با $\overline{D} \subset \Omega$ و هر تابع همساز u در D و پیوسته روی $\overline{D}$ که روی مرز D، $G(z) \le u(z)$ باشد.آنگاه روی D رابطه‌ی $G(z) \le u(z)$ برقرار باشد.([۳]، ۳-۵)

قضیه ۱-٤:

فرض کنید u یک تابع زیرهمساز پیوسته در U باشدو $0 \le r < 1, m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta})d\theta$،هرگاه-$r_1 < r_2$ آنگاه: $m(r_1) \le m(r_2)$.

([۱]قضیه‌ی ۵-۱۷)

نامساوی هارناک(۱-۵):

اگر u نامنفی‌وهمساز روی $D(a';R)$ باشد،آنگاه:

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right)u(a') \le u(a'+re^{i\theta}) \le \left(\frac{R+r}{R-r}\right)u(a') \text{ ، } 0 \le r < R .$$ ([۳]،۲-۱٤)

تعریف(۱-٦):

فرض کنید X فضای توپولوژیک و Y فضای برداری توپولوژیک باشد،تابع $f: X \to Y$ موضعاً" کراندار یکنواخت نامیده می شود،اگرهر نقطه از X یک همسایگی داشته باشد که تصویر آن تحت f کراندار یکنواخت باشد.

توجه کنید که اگر $f: X \to Y$ کراندار یکنواخت باشد آنگاه بطور موضعا" کراندار یکنواخت نیز خواهد بود،چون اگر $B(x,\varepsilon)$ یک همسایگی از نقطه‌ی دلخواه x در X باشد،تصویر آن در Y کراندار یکنواخت است.

قضیه‌مونتل(۱-۷):

رده‌ی تمام توابع تحلیلی روی U را مساوی $H(U)$ می‌گیریم،هر دنباله به طورموضعاً یکنواخت کراندار $\{f_n\}$ در $H(U)$ دارای زیر دنباله‌ی همگرای $\{f_{n_k}\}$است.

لم شوارتز(۱–۸):

βرا مجموعه‌ی تمام توابع تحلیلی از U به داخل بستار Uدر نظـر بگیریـد،اگر $\varphi \in \beta$ و $\varphi(0)=0$ آنگاه به‌ازای $z \neq 0$، $|\varphi(z)| \leq |z|$و $|\varphi'(0)| \leq 1$و در نامساویهای اخیـر تـساوی برقـرار اسـت،اگروفقط اگر $\varphi(z)=e^{iC}z$ که Cمقدار ثابت حقیقی است.([٦] صفحه‌ی ۱)

قضیه(۱–۹):

هرگاه uیک تابع حقیقی پیوسته بر مرز قرص $D(a;R)$بوده‌و uدر $D(a;R)$باانتگرال پواسن تعریف شود:

$$u\left(a+re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}u\left(a+\mathrm{Re}^{it}\right)dt$$

آنگاه uبر $\overline{D}(a;R)$پیوسته بوده‌ودر $D(a;R)$همساز است([۱]،۱۰–۱۱)

تعریف(۱–۱۰):

گوئیم تابع پیوسته‌ی u در مجموعه‌ی باز Ω دارای خاصیت مقدار میانگین است اگر به هـر $z \in \Omega$ دنباله‌ای مانند $\{r_n\}$ چنان نظیر باشد که $r_n > 0$ وهرگاه nبه سمت بینهایـت میـل کنـد، r_nبـه سـمت 0میل کندوبعلاوه به‌ازای هر $n \in N$ داشته باشیم:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u\left(z+r_n e^{it}\right)dt \qquad (۱)$$

به عبارت دیگر $u(z)$ مساوی مقدار میانگین u بر دوایر به شعاع r_n و مرکز z است.

قضیه تبعیت لیتلوود(۱–۱۱):

اگر φ نگاشت تحلیلی از دیسک واحد به داخل خودش باشد که $\varphi(0)=0$ و G تابعی زیر همـساز در Uباشد، آنگاه به ازای $0<r<1$, $\int_0^{2\pi}G(\varphi(re^{i\theta})d\theta \leq \int_0^{2\pi}G(re^{i\theta})d\theta$.([۸] صفحه‌ی ۳۰)

برهان:

با توجه به قضیه‌ی (۱–۹) فرض کنید Hتابع همساز در rD و پیوسته روی $\overline{rD}$ باشد که با Gروی دایره‌ی به شعاع r برابر است، با استفاده ازلم شوارتزداریم: $(|\varphi(z)| \leq |z| \leq r)$پس $|\varphi(z)| \leq r$ برای $|z| \leq r$.بنابراین $\varphi(z) \in rD$پس $H(\varphi(z))$ روی rD خوش تعریف است و همچنین Gروی rDطبق فرض قضیه زیر همساز نیز است،پس طبق تعریف زیرهمساز(۱–۲)، $H(z) \geq G(z)$روی rDبرقرار

است. $H(\varphi(z))$ نیز درشرایط فرض فوق صدق می‌کند،پس روی rD، $G(\varphi(z)) \le H(\varphi(z))$ ،همچنین چون $\varphi(0)=0$ پس $H(\varphi(0)) = H(0)$ وداریم:

$$\int_0^{2\pi} G(\varphi(re^{i\theta}))\frac{d\theta}{2\pi} \le \int_0^{2\pi} H(\varphi(re^{i\theta}))\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= H(\varphi(0)) = H(0) = \int_0^{2\pi} H(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

نتیجه لم شوارتز(۱-۱۲):

اگر $f : U \to \overline{U}$ تحلیلی باشد داریم:

$$|f(z)| \le \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$$

برای اثبات به([٦] نتیجه ۱-۳)مراجعه شود.

قضیه(۱-۱۳):

فرض کنیم u یک تابع زیر همساز پیوسته در Ω باشد و K یک زیر مجموعه فشرده Ω بوده و hیک تابع حقیقی پیوسته بر K باشد که درون Vاز Kهمساز است و در تمام نقاط مرزی K، $u(z) \le h(z)$، در این صورت به ازای هر $z \in K$ $u(z) \le h(z)$.([۱] قضیه‌ی ٤-۱۷)

قضیه (۱-١٤):

شرط لازم و کافی برای اینکه تابع پیوسته‌ی $g(z)$ در U زیر همساز باشد این است که به ازای هر $z_0 \in U$ یک $\rho_0 > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه دیسک $|z - z_0| < \rho_0$ در U بوده وبه ازای هر $\rho < \rho_0$ $g(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho e^{i\theta})d\theta,$ ([٥] صفحه‌ی۷).

لم(۱-۱٥):

در حالت کلی اگر $u(z)$ در دامنه‌ی کراندار Dهمساز باشد آنگاه $|u(z)|^P$ به ازای $P \ge ۱$زیر همساز است.

برهان:

با توجه به فرمول پواسن به ازای هر تابع همساز u و هر r که $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$ رابطه(۱) برقرار است. ([۱]، ۱۱-۱۲)

اگر $p=1$ واضح بوده و اگر $p>1$ با اعمال نامساوی هولدر بر $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z+r_n e^{it})dt$ داریم:

$$|u(z)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_\circ+\varphi e^{i\theta})\times 1d\theta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_\circ+\varphi e^{i\theta})\right|^{p}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}1^{q}\,d\theta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_\circ+\varphi e^{i\theta})\right|^{p}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\times(2\pi)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_\circ+\varphi e^{i\theta})\right|^{p}d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

در نتیجه داریم:

$$|u(z)|^{p}\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u(z_\circ+\varphi e^{i\theta})\right|^{p}d\theta$$

حال با توجه به قضیه (۱-۱٤)حکم نتیجه می‌شود.

قضیه(۱-۱٦):

اگر $\{f_n\}\subset H(\Omega)$ و $\{f_n\}$ روی مجموعه‌ی فشرده $K\subset\Omega$ بطور یکنواخت به f همگراباشد،در اینصورت $f\in H(\Omega)$ و $\{f_n'\}$ روی مجموعه‌ی فشرده $K\subset\Omega$ بطور یکنواخت به f' همگرا خواهد شد.([۱]قضیه‌ی ۱۰- ۲۸)

قضیه (۱-۱۷):

اگر u در U زیر همساز بوده و φ تابع محدب غیر نزولی روی R^1 باشد،آنگاه $\varphi\, o u$ زیرهمساز است.([۱] قضیه‌ی ۲-۱۷)

تعریف(۱-۱۸):

نگاشت پیوسته f از فضای توپولوژیک X به فضای Y در نقطه ی $x\in X$ موضعاًیک به یک است،اگر همسایگی مانند N از x وجود داشته باشد که تحدید f به N نگاشت یک به‌یک - باشد.هرگاه f درهرنقطه‌ی X موضعاًیک به‌یک باشد، f راروی X موضعاًیک به یک می نامند.

تعریف(۱-۱۹):

مجموعه‌ی A را فشرده نسبی می نامند،هرگاه بستار A فشرده باشد.

تعریف (۱-۲۰):

مجموعه‌ی A را کراندار کلی گوییم،اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ تعداد متناهی نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وجود داشته باشند که $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

قضیه(۱-۲۱):

اگر مجموعه‌ی A کراندار کلی باشد،هر دنباله از آن دارای زیردنباله‌ای کشی است.

اثبات:

فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط A باشد،زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ می‌سازیم که کشی باشد.نخست A را با تعدادی متناهی از گویهای به شعاع ۱ می‌پوشانیم.دست کم یکی از این گویها مثلاً B_1 به ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n،شامل $\{x_n\}$ است.فرض کنیم J_1 زیرمجموعه‌ای از Z_+ باشد که عبارت است از اندیسهایی مانند n که به ازای آنها $x_n \in B_1$.

بار دیگر A را با تعدادی متناهی از گویهای به شعاع $\frac{1}{2}$ می‌پوشانیم.چون J_1 نامتناهی است،حداقل یکی از این گویها مثلاً B_2،باید به ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n در J_1 شامل x_nها باشد، J_2 را مجموعه‌ی اندیسهایی مانند n انتخاب می‌کنیم که به ازای آنها $n \in J_1$ و $x_n \in B_2$.

در حالت کلی به‌ازای مجموعه‌ی نامتناهی مفروض J_K از اعداد صحیح مثبت، J_{K+1} را زیرمجموعه‌ای نامتناهی از J_K می‌گیریم،بطوریکه یک گوی مانند B_{K+1} به شعاع $\frac{1}{K+1}$ موجود باشد که به‌ازای هر n که $n \in J_{K+1}$، x_n در B_{K+1} باشد. n_1 را از J_1 انتخاب می‌کنیم. به‌ازای n_kی مفروض n_{k+1} را از J_{K+1} چنان انتخاب می‌کنیم که $n_{k+1} > n_k$،این کار ممکن است، زیرا J_{K+1} مجموعه‌ای نامتناهی است. اما به‌ازای $i \geq k$ و $j \geq k$،اندیسهای n_i, n_j هردو متعلق به J_K هستند(زیرا، $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ دنباله‌ای تودرتو از مجموعه‌هاست).بنابراین به‌ازای‌هر i, j که $i \geq k$ و $j \geq k$ ، نقاط x_{n_i}, x_{n_j} در گویی مانند B_k به شعاع $\frac{1}{k}$ واقع می‌شوند. از اینجا نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $\{x_{n_i}\}$ یک دنباله‌ی کشی است.

تعریف (۱-۲۲):
یک فضای برداری توپولوژیک X یک فضای برداری روی هیأت F همراه با یک توپولوژی τ با خواص زیر است:

الف) به ازای هر $x \in X$ مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

ب) تابع مجموع $X \times X \to X$ با ضابطه $(x, y) \to x + y$ پیوسته است.

ج) تابع ضرب اسکالر $F \times X \to X$ با ضابطه $(\alpha, x) \to \alpha x$ پیوسته است.

قضیه (۱-۲۳):
اگر Ω یک ناحیه بوده و $f \in H(\Omega)$ و f متحد با صفر نباشد، آنگاه $\log(|f|)$ زیرهمساز خواهد بود. ([۱] قضیه‌ی ۳-۱۷)

به‌ازای $0 < p < \infty$، فضای برگمن وزن‌دار $A^P_\omega = A^P_\omega(U)$، فضای تمام توابع تحلیلی $f : U \to \mathbb{C}$ است که $\|f\|^p_{A^P_\omega} = \int_U |f(z)|^P \omega(z)dm(z) < \infty$.

واضح است که به ازای $p \geq 1$، A^P_ω فضای باناخ است چون $L^P_\omega(U)$ (فضای تمام توابع اندازه‌پذیری که $\int_U |f(z)|^P \omega(z)dm(z) < \infty$) یک فضای باناخ است، کافیست نشان دهیم A^P_ω در L^P_ω بسته است، برای اینکار فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع در A^P_ω باشد که به سمت f در L^P_ω همگراست، کافیست ثابت کنیم که f روی U تحلیلی است.

با توجه به لم(۱-۱۵)، $|u(z)|^P$ به ازای $u(z)$ همساز، زیر همساز می باشد و با استفاده از لم۱ که بعد خواهیم دید داریم:

$$|(f_n - f)(z)|^P \leq \frac{C_k}{2G(r_0)} \int_U |(f_n - f)(\xi)|^P \omega(\xi) dm(\xi)$$

که درآن $G(r_0) = \int_0^{r_0} \omega(\rho)\rho d\rho$ و $r_0 < 1 - |z|$ با توجه به اینکه U گوی واحد است،اگر $K \subset U$ فشرده باشد،عدد r_0 وجود دارد که $|z| < 1 - r_0$ به ازای هر $z \in K$ برقرار است و در نتیجه $r_0 < 1 - |z|$،حال اگر قرار دهیم:

$$K_1 = \{z | dis(z, K) \leq r_0\}$$

می‌بینیم K_1 فشرده است وچون به‌ازای‌هر $z \in K$، $\overline{B(z, r_0)}$ داخل K_1 است،پس $K \subset K_1$ وچون ω پیوسته است،روی K_1 ماکزیمم و مینیمم‌خود را اختیار می کند و با توجه به اینکه ω همواره مخالف صفر است ،برای $z \in K, \rho \in [0, r_0]$ مقادیر ثابت C_1, C_2, d_1, d_2 وجود دارند که $C_1 < \omega(\rho) < C_2$ و $d_1 < \omega(z + \rho e^{i\theta}) < d_2$، قرار می دهیم : $C_K = \frac{C_2}{d_1}$،حال چون f_n به f

همگراست پس به ازای‌هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی مانند Nوجود خواهد داشت بقسمی که اگر $n \geq N$ داریم:

$$\left|(f_n - f)(z)\right|^p \leq \frac{C_K}{2G(r_0)} \int_U \left|(f_n - f)(\zeta)\right|^p \omega(\zeta) dm(\zeta) \leq \frac{C_K}{2G(r_0)} \varepsilon^p$$

اگر قرار دهیم $M = \dfrac{C_K}{2G(r_0)}$ خواهیم داشت: $\left|(f_n - f)(z)\right|^P \leq M\varepsilon^P$ پس$\{f_n\}$روی زیر مجموعه‌های فشرده از Uبه طور یکنواخت‌کراندار است،پس طبق قضیه‌ی مونتل $\{f_n\}$در $H(U)$دارای زیردنباله‌ای همگرا است و می‌دانیم این زیردنباله به f همگراست،حال باتوجه به قضیه(۱-۱٦)نتیجه می شود $f \in H(U)$.

فرض کنیم w تابعی حقیقی مقدار باشد که روی $[0,\infty)$ تعریف شده است، اگر w در شرایط زیر صدق کند، می‌گوئیم w یک تابع قدرمطلق است:

(a). $w(x+y) \leq w(x) + w(y)$

(b). wدر صفر از سمت راست پیوسته باشد

(c). $x = 0$اگروفقط اگر $w(x) = 0$

(d). wاکیداً صعودی باشد.

برای دیدن تعریف بالا،مرجع[۲]را ببینید.

واضح است که شرایط (a) و (b) و (c) نتیجه می‌دهند $w \in C[0,\infty)$،یعنی w روی $[0,\infty)$ پیوسته است. چون:

شرط (b) پیوستگی w در صفر از سمت راست را نشان می دهد و برای پیوستگی در سایر نقاط داریم:

$\lim_{h \to 0^+} w(h) = 0$و wاکیداً صعودی و $x \in (0,+\infty)$،پس نتیجه می شود: $0 < w(x)$حال دو حالت داریم:

اگر $h > 0$چون $0 \leq w(x+h) - w(x) \leq w(h)$ درنتیجه داریم:

$$\lim_{h \to 0^+} w(x+h) - w(x) = 0$$

اگر $h < 0$ چون $w(x) > 0$داریم: $w(x) = w(x+h-h) \leq w(x+h) + w(-h)$

درنتیجه $-w(-h) \leq w(x+h) - w(x) \leq 0$ پس داریم

$$\lim_{h \to 0^-} w(x+h) - w(x) = 0$$

بنابراین w پیوسته است.معمولاً به جای شرط (d) نویسندگان فرض می‌کنند: w غیر نزولی است. برای دوری از بعضی مشکلات فنی شرط (d) را برای w به کار می‌بریم.

اخیراً مطالعات جالبی روی فضاهای برگمن وزن دار با وزن‌هایی متفاوت از وزنهای شناخته شده صورت گرفته است.به عنوان مثال([۱۸],[۱۲],[۹],[۸],[۱])را ببینید.

فرض کنید w یک تابع قدر مطلق باشد و ω وزن حداکثر کلاسیک باشد.تعمیم فضاهای برگمن وزن دار $\left(B_{w,\omega}(U)=B_{w,\omega}\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
گردایه تمام توابع تحلیلی $f:U\to \mathbb{C}$ بطوریکه $\|f\|_{B_{w,\omega}}=\int_U w(|f(z)|)\omega(z)dm(z)<\infty$ فضای $B_{w,\omega}$ نامیده می شود.
به راحتی می‌توان دید که $B_{w,\omega}$ فضای برداری توپولوژیک متریک پذیر است، با متر تحت انتقال پایای $d(f,g)=\|f-g\|_{B_{w,\omega}}$، وزنها ممکن است روی بازه‌های $[0,\sigma]$، $0<\sigma<1$ تعدیل یابند،بدون اینکه فضا تغییری بکند.

$B_{w,\omega}$ فضای برداری است:

به ازای هر $f,g\in B_{w,\omega}$

$$\|f+g\|_{B_{w,\omega}}=\int_U w(|f+g|)\,\omega(z)dm(z)<\int_U w(|f(z)|)\omega(z)dm(z)$$
$$+\int_U w(|g(z)|)\omega(z)dm(z)<\infty$$
$$\|\alpha f\|_{B_{w,\omega}}=\int_U w(|\alpha f(z)|)\omega(z)dm(z)=\int_U w(|\alpha||f(z)|)\omega(z)dm(z)$$

اگر $|\alpha|\le 1$ آنگاه $|\alpha||f|\le|f|$ و چون w صعودی است پس $\mathrm{W}(|\alpha||f|)\le \mathrm{w}(|f|)$ درنتیجه:

$$\|\alpha f\|_{B_{W,\omega}}=\int_U w(|\alpha||f(z)|)\omega(z)dm(z)\le\int_U w(|f(z)|)\omega(z)dm(z)=\|f\|_{B_{W,\omega}}<\infty$$

پس داریم: $\alpha f\in B_{W,\omega}$

حال اگـر $|\alpha|>1$ باشـد، $0\le\beta<1$ وجـود دارد کـه $\alpha f = n\frac{\alpha}{|\alpha|}f+\beta\frac{\alpha}{|\alpha|}f$ توجـه کنیـد کـه اگـر $\alpha = re^{i\theta}$ داریم: $\frac{\alpha}{|\alpha|}=e^{i\theta}$ و $r=n+\beta$

بنـــابر اســـتقرا داریـــم $n\frac{\alpha}{|\alpha|}f\in B_{W,\omega}$ وهمچنـــین $\beta\frac{\alpha}{|\alpha|}f\in B_{W,\omega}$، پـــس بنـــابر قـــسمت اول پس در هر حالت داریـم: $\alpha f = n\frac{\alpha}{|\alpha|}f+\beta\frac{\alpha}{|\alpha|}f\in B_{W,\omega}$، یعنـی $\alpha f\in B_{W,\omega}$ فـضای بـرداری $B_{W,\omega}$ است.

فضای توپولوژیک متریک‌پذیر بودن $B_{w,\omega}$:

توجـــه کنیـــد کـــه اگـــر $\{f_n\},\{g_n\}$ در $B_{w,\omega}$ بـــه ترتیـــب همگـــرا بـــه g,f باشـــند،به‌ازای هر $\frac{\varepsilon}{2}>0$، $n_0,n_1\in N$ وجود دارند که به‌ازای $n_i\ge n_0, n_j\ge n_1$ داریم:

$$\|g_{n_j}-g\|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ و } \|f_{n_i}-f\|_{B_{w,\omega}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

حال اگر قرار دهیم $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ به‌ازای‌هر $\varepsilon>0$ و $n\ge n_2$ داریم:

$$\begin{aligned}
\|(f_n+g_n)-(f+g)\|_{B_{W,\omega}} &= \int_U w(|(f_n+g_n)(z)-(f+g)(z)|)\omega(z)dm(z)\\
&\le \int_U w(|(f_n-f)(z)|)\omega(z)dm(z)+\int_U w(|(g_n-g)(z)|)\omega(z)dm(z)\\
&=\|f_n-f\|_{B_{w,\omega}}+\|g_n-g\|_{B_{w,\omega}}<\varepsilon
\end{aligned}$$

پس $\{f_n+g_n\}$ به $f+g$ همگراست.حال به ازای اسکالر α داریم:

فرض کنید $\alpha_n\to\alpha$ نشان می دهیم $\alpha_n f_n\to\alpha f$:

ابتدا فرض می کنیم $f_n\in B_{W,\omega}$ و کرانداریاشد.

$$\|\alpha_n f_n-\alpha f\|_{B_{W,\omega}}=\|\alpha_n f_n-\alpha f_n+\alpha f_n-\alpha f\|_{B_{W,\omega}}\le\|\alpha(f_n-f)\|_{B_{W,\omega}}+\|(\alpha_n-\alpha)f_n\|_{B_{W,\omega}}$$

اگر $|\alpha|\le 1$:

$$\|\alpha f_n-\alpha f\|_{B_{w,\omega}}=\int_U w(|\alpha||(f_n-f)(z)|)\omega(z)dm(z)\le\|f_n-f\|_{B_{w,\omega}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $|\alpha|>1$:

$0\le\beta<1$ وجود دارد که $\alpha(f_n-f)=n\frac{\alpha}{|\alpha|}(f_n-f)+\beta\frac{\alpha}{|\alpha|}(f_n-f)$،پس داریم:

$$\|\alpha f_n-\alpha f\|_{B_{w,\omega}}=\int_U w\left(\left|(n+\beta)(\frac{\alpha}{|\alpha|})(f_n-f)\right|\right)\omega(z)dm(z)$$

$$\le n\|f_n-f\|_{B_{w,\omega}}+\|f_n-f\|_{B_{w,\omega}}<n\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}$$

از طرفی چون $\alpha_n\to\alpha$ پس به ازای هر $\varepsilon>0$عدد طبیعی Nوجود دارد که به ازای هر $n\ge N$ داریم:

$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ از طرفی $f_n\in B_{W,\omega}$ و کراندار است، پس عدد ثابت مثبت M وجود دارد که $|f_n|\le M$.

حال با توجه به اینکه w صعودی است،داریم:

$$w(|(\alpha_n-\alpha)f_n|)\le w(|M\varepsilon|)$$

اگر $\varepsilon\to 0$با توجه به اینکه w پیوسته است $w(M\varepsilon)\to w(0)=0$ پس به ازای هر $\varepsilon_1>0$،مقدار ثابت $\delta>0$ وجود دارد که اگر $M\varepsilon<\delta$ آنگاه $w(|M\varepsilon|)<\varepsilon_1$. پس

$$w(|(\alpha_n-\alpha)f_n|)\le w(|M\varepsilon|)<\varepsilon_1$$

پس داریم: $\|(\alpha_n-\alpha)f_n\|_{B_{W,\omega}}=\int_{\xi}w(|(\alpha_n-\alpha)f_n|)\omega(\zeta)dm(\zeta)<\varepsilon_1$.

درحالت کلی با توجه به اینکه چند جمله ایها در $B_{W,\omega}$ چگال هستند(درفصل بعد نشان داده می شود)پس می توان کرانی مانند M برای f_n پیدا کرد.

پس داریم:

$$\|\alpha_n f_n-\alpha f\|_{B_{W,\omega}}=\|\alpha_n f_n-\alpha f_n+\alpha f_n-\alpha f\|_{B_{W,\omega}}$$

$$\le\|\alpha(f_n-f)\|_{B_{W,\omega}}+\|(\alpha_n-\alpha)f_n\|_{B_{W,\omega}}\le\varepsilon_1+n\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

یا $\|\alpha_n f_n-\alpha f\|_{B_{W,\omega}}\le\varepsilon_1+\frac{\varepsilon}{2}$

درنتیجه $\{\alpha_n f_n\}$به αf همگراست.

فضای $B_{W,\omega}$ غیرتهی است، چون حداقل تابع ثابت صفر را شامل می‌شود: