دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای در یافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

یک الگوریتم قابل اطمینان از روش آنالیز هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی

استاد راهنما

آقای دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور

آقای دکتر حسین خیری

پژوهشگر

سعیده میرزاجانی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحيم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیز گام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف در نیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان، و گواهی می‌دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو، و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو، و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان، و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

تقدیم به:

یگانه منجی عالم

و تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

و لَمْ یَشکُر المَخلوق لَمْ یَشکُر الخالقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر قدرت عبادی، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جانب آقای دکتر حسین خیری که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر مهرداد لکستانی که داوری این رساله را با نهایت دقت و وقت زیاد انجام دادند تشکر می‌نمایم. از تمام دوستان دوران تحصیلم و مخصوصاً از خانم سمیه راشدی کمال تشکر و قدردانی را دارم. در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

نام خانوادگی دانشجو: میرزاجانی نام: سعیده

عنوان: یک الگوریتم قابل اطمینان از روش آنالیز هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی

استاد راهنما : آقای دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور: آقای دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۱۰۹

کلید واژه‌ها: معادله دیفرانسیل کسری، روش اختلال هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی، مشتق کسری کاپوتو

چکیده

در این پایان‌نامه که برمبنای روش آنالیز هموتوپی پایه‌گذاری شده است، یک الگوریتم قوی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه کسری بسط داده می‌شود. الگوریتم پیشنهاد شده روش ساختن مجموعه توابع پایه را معرفی می‌کند و معادله تغییر شکل مرتبه بالا را در یک فرم ساده می‌دهد. متفاوت از همه روشهای تحلیلی دیگر، این الگوریتم یک روش ساده فراهم می‌سازد تا ناحیه همگرایی سری جواب را با معرفی یک پارامتر کمکی h تنظیم و کنترل کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر پدیده‌های زیادی در مکانیک سیالات، فیزیک، مهندسی، زیست شناسی و سایر رشته‌های علمی با استفاده از مشتقات و انتگرال‌های کسری به طور چشمگیری مدل سازی شده‌اند. در دهه‌های گذشته ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان تلاش قابل توجهی را برای پیدا کردن روش‌های تحلیلی و پایدار عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری اختصاص دادند. چندین روش عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی کسری، معادلات انتگرال، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی کسری معرفی شده است، که عمومی‌ترین آن‌ها: روش تجزیه آدومیان، روش تکرار تغییراتی، روش دیفرانسیل کسری، روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته، روش تفاضل متناهی، روش اختلال هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی می‌باشد. بین همه این روش‌ها، روش آنالیز هموتوپی یک روش موثری برای جواب‌های عددی و ضمنی یک رده وسیعی از سیستم‌های دیفرانسیل متناظر با مسایل فیزیکی حقیقی فراهم می‌آورد. براساس هموتوپی که یک مفهوم اساسی در توپولوژی است اعتبار روش آنالیز هموتوپی مستقل از وجود پارامترهای کوچک در معادله مطرح شده است. بعلاوه متفاوت از همه روش‌های تحلیلی و عددی آن یک روش ساده فراهم می‌سازد تا ناحیه همگرایی سری جواب را تنظیم و کنترل کنیم. بنابراین روش آنالیز هموتوپی می‌تواند بر محدودیت‌های قبلی تکنیک‌های اختلال غلبه کند. در فصل اول پایان‌نامه به معرفی محاسبه‌های کسری پرداخته شده و در فصل دوم روش اختلال هموتوپی هی [1] و همگرایی آن بررسی شده و سپس این روش برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مرتبه کسری تعمیم داده شده است. در فصل سوم روش آنالیز هموتوپی لیائو[2] معرفی شده و همگرایی این روش بررسی شده است. همچنین با استفاده از این روش یک الگوریتم قوی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه کسری بسط داده شده است.

[1] J.H. He

[2] Liao

مطالب این پایان‌نامه براساس مقاله

A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equation, Applied. Mathematical, Modelling, 34 (2010) 593-600.

گردآوری شده است.

فصل ۱

محاسبه‌های کسری

این فصل شامل مفاهیم پایه‌ی محاسبه‌های کسری، تعریف انتگرال کسری، تعاریف مختلف مشتق کسری و معرفی معادلات دیفرانسیل کسری می‌باشد [۲].

۱.۱ خلاصه تاریخچه

سوال اساسی که منجر به پیدایش محاسبه‌های کسری شد این بود :آیا می‌توان معنی یک مشتق مرتبه صحیح را به حالتی که n یک کسر است تعمیم داد؟ سوال اخیر به این صورت تغییر یافت که آیا n می تواند هر عددی باشد: کسری، گنگ، یا مختلط. برای پاسخگویی صحیح به این سوال نام محاسبه‌های کسری نامی غلط تلقی شده و شاید بهتر است انتگرال‌گیری ومشتق‌گیری از هر مرتبه دلخواه نامیده شود. لایپ نیتز[1] نماد $\frac{d^ny}{dx^n}$ را ساخت شاید آن یک بازی ساده با نمادها بود که در سال ۱۶۹۵هوپیتال [2] را به پرسش از او برانگیخت: اگر $n=\frac{1}{2}$ نتیجه چه خواهد شد؟ لایپ‌نیتز پاسخ داد: این یک تناقض آشکاری است که روزی نتایج مفیدی از آن به دست خواهد آمد. در مکاتبه‌های لایپ‌نیتز با برنولی[3] ، لایپ‌نیتز مشتقات مرتبه عمومی را ذکر کرد. در مکاتبه‌هایی که لایپ‌نیتز با والیس[4] داشت، درباره حاصلضرب نامتناهی والیس برای $\frac{1}{2}\pi$ بحث شد و لایپ‌نیتز توضیح داد که ممکن است محاسبه‌های کسری برای به دست آوردن این نتایج به کار برده شوند. او نماد $d^{\frac{1}{2}}y$ را برای مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ به کار برد. موضوع محاسبه‌های کسری مورد توجه اویلر[5] هم قرار گرفت. در سال ۱۷۳۰ او نوشت: وقتی n یک عدد صحیح مثبت، p تابعی بر

[1] Leibniz
[2] Hopital
[3] Bernoulli
[4] Wallis
[5] Euler

حسب x باشد $\frac{d^n p}{dx^n}$ را همیشه از راه جبر می‌توان بدست آورد مثلا اگر $n = 2$ و $p = x^3$

$$\frac{d^2 x^3}{dx^2} = 6x.$$

حال سوالی که مطرح شد این بود: اگر n یک کسر باشد این نسبت چه‌طور بدست می آید؟ مشکل این حالت به آسانی قابل فهم است. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد d^n، با مشتق گیری متوالی بدست می آید و اگر n یک کسر باشد با چنین روشی آن بدیهی نیست. لاگرانژ[6] به محاسبه‌های کسری به طور غیر مستقیم کمک کرد. او در سال ۱۷۷۲ قانون نماها را برای عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه صحیح بسط داد و بیان کرد:

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$$

بعدها وقتی نظریه محاسبه‌های کسری گسترش یافت ریاضی‌دانان علاقه‌مند شدند که بدانند چه محدودیت‌هایی باید روی $y(x)$ تحمیل شود تا یک قانون مشابهی برای m و n بیان شود. در سال ۱۸۱۲ لاپلاس[7] یک مشتق کسری را بوسیله یک انتگرال تعریف کرد. و در سال ۱۸۱۹ اولین تعریف مشتق مرتبه دلخواه در یک متن ظاهر شد. لاکرویکس[8] کمتراز دو صفحه از کتاب ۷۰۰ صفحه‌ای خود را به این موضوع اختصاص داد. او با $y = x^m$ که m یک عدد صحیح مثبت است شروع کرد و به آسانی مشتق مرتبه n ام را به صورت

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \qquad m \geqslant n$$

بسط داد. سپس با استفاده از نماد لژاندر برای حالت تعمیم یافته فاکتوریل (تابع گاما) بدست آورد:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

---

[6] *Lagrange*

[7] *Laplace*

[8] *Lacroix*

به عنوان مثال قرار داد $y = x$ و $n = \frac{1}{2}$ و نتیجه گرفت:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{۱.۱}$$

جالب است به این نکته توجه کنید که نتیجه بدست آمده توسط لاکرویکس با آنچه که امروزه با استفاده از تعریف مشتق کسری ریمن—لیوویل بدست می‌آید یکسان است. ولی لاکرویکس هیچ راهنمایی را به عنوان یک کاربرد ممکن برای مشتق از مرتبه دلخواه پیشنهاد نکرد.

نفر بعدی که مشتقات مرتبه دلخواه را ذکر کرد فوریه[9] بود. تعریف عملیات کسری فوریه از معرفی انتگرال فوریه بدست آمده بود:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} cosp(x-\alpha)dp$$

حال

$$\frac{d^n}{dx^n}cosp(x-\alpha) = p^n cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}n\pi]$$

برای n صحیح .

با جانشینی n با u، فوریه نتیجه کلی زیر را بدست آورد:

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u cos[p(x-\alpha) + \frac{1}{2}u\pi]dp$$

فوریه شرح داد: عدد u که در بالا ظاهر می‌شود به هر کمیت چه مثبت یا منفی وابسته خواهد بود.

---

[9] *Fourier*

۱.۱.۱ سهم آبل و لیوویل

لایپ نیتز، اویلر، لاپلاس، لاکرویکس و فوریه به مشتقات مرتبه دلخواه اشاره‌ای کردند. اما اولین کاربرد عملیات کسری در سال ۱۸۲۳ توسط آبل [10] ساخته شد. آبل محاسبه‌های کسری را در حل یک معادله انتگرالی که در فرمول‌بندی مسئله تعیین شکل منحنی به طوری که زمان سقوط توده(جرم) نقطه‌ای بی‌اصطکاک که تحت جاذبه زمین پایین می‌لغزد مستقل از نقطه شروع است، بوجود آمده به کار برد. اگر زمان لغزیدن یک ثابت مشخص باشد آنگاه معادله انتگرالی آبل به صورت زیر است.

$$k = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)dt. \qquad (۲.۱)$$

انتگرال (۲.۱) به استثنای فاکتور ضربی $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ یک حالت خاص یک انتگرال معین هست که انتگرال کسری مرتبه $\frac{1}{2}$ را تعریف می‌کند. در معادلات انتگرالی مانند (۲.۱) تابع f که زیر علامت انتگرال قرار دارد مجهول است و باید تعیین شود. آبل طرف راست (۲.۱) را به صورت $\sqrt{\pi}[\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}]f(x)$ نوشت سپس در طرفین معادله $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}$ را به کار گرفت و بدست آورد:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} k = \sqrt{\pi} f(x) \qquad (۳.۱)$$

توجه: عملگرهای کسری دارای خاصیت $D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} f = D^0 f = f$ می‌باشند.

بنابراین وقتی مشتق کسری مرتبه $\frac{1}{2}$ ثابت k در(۳.۱) محاسبه شود، $f(x)$ تعیین می‌شود. این یک دستاورد قابل توجه آبل در محاسبه‌های کسری هست. توجه کنید که مشتق کسری یک عدد ثابت همیشه مساوی با صفر نیست. موضوع محاسبه‌های کسری تقریبا یک دهه غیر فعال شد تا زمانی که کارهای لیوویل آشکار شد. ریاضی‌دانان جواب آبل را مورد توجه قرار دادند. شاید فرمول انتگرال فوریه و جواب آبل بود که توجه لیوویل را جلب کرده بود تا اولین مطالعه

[10] $Abel$

عمده محاسبه‌های کسری را شروع کند. نقطه شروع برای گسترش تئوری نتیجه بدست آمده برای مشتقات مرتبه صحیح بود:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$$

که در روشی طبیعی به مشتقات مرتبه دلخواه تعمیم داد:

$$D^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax} \tag{۴.۱}$$

او فرض کرد که مشتق دلخواه یک تابع $f(x)$ که به فرم سری

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \qquad Rea_n > 0 \tag{۵.۱}$$

بسط داده شده برابر

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x} \tag{۶.۱}$$

است. فرمول (۶.۱) بعنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته شده است. لیوویل در روشی طبیعی مشتق مرتبه دلخواه ν را تعمیم داد که ν، گویا، گنگ یا مختلط است. اما عیب آشکار آن این است که تنها برای توابعی که به فرم (۵.۱) هستند قابل کاربرد می‌باشد. شاید لیوویل به این محدودیت‌ها آگاه بود که تعریف دومی هم فرمول‌بندی کرد. او برای بدست آوردن تعریف دوم با یک انتگرال مشخص وابسته به تابع گاما شروع کرد:

$$I = \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du \qquad a > 0, x > 0$$

تغییر متغیر $xu = t$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} I &= x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \\ &= x^{-a} \Gamma(a) \end{aligned}$$

سپس در دوطرف معادله بالا D^{ν} را به کار برد و بدست آورد:

$$D^{\nu}x^{-a} = \frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} u^{a+\nu-1}e^{-xu}du$$

بنابراین طبق تعریف دوم یک مشتق کسری را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$D^{\nu}x^{-a} = \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\nu} \qquad a>0 \tag{۷.۱}$$

اما تعریف‌های لیوویل محدودیت‌هایی داشتند. تعریف اول به توابع کلاس (۵.۱) محدود شده بود و تعریف دوم برای توابع به فرم $x^{-a}(a>0)$ کاربرد داشت. و هیچیک برای یک کلاس وسیع از توابع مناسب کارایی نداشتند. لیوویل اولین کسی بود که تلاش می‌کرد معادلات دیفرانسیل شامل عملگرهای کسری را حل کند. موضوع تحقیق وی یک تابع متمم، آشنا به توابعی که معادلات دیفرانسیل را مطالعه کرده است بود. در سال ۱۸۳۴ در یکی از مقالاتش وجود یک تابع متمم را تصدیق کرد و نوشت: معادله دیفرانسیل معمولی $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ دارای جواب

$$y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$$

می‌باشد بنابراین $\frac{d^u y}{dx^u} = 0$ باید یک جواب متمم متناظر داشته باشد. لیوویل روش جواب متمم‌اش را منتشر کرد.

۲.۱.۱ مبدا تعریف ریمن — لیوویل

کار و تلاش زود هنگام که سرانجام منجر شد به آنچه که امروزه تعریف ریمن — لیوویل نامیده می‌شود، در سال ۱۸۶۹ توسط سونین [11] در مقاله‌ای که مشتق‌گیری با مرتبه اختیاری نامیده شد،

[11] $Sonin$

پدیدار شد. نقطه شروع وی فرمول انتگرال کوشی بود. لتنیکوف [12] از سال ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ چهار مقاله پژوهشی درباره این موضوع نوشت. عنوان مقاله وی توضیح مفهوم اصلی نظریه مشتق گیری با مرتبه اختیاری بود که یک توسیع مقاله‌ی سونین هست.

مشتق مرتبه‌ی n ام فرمول انتگرال کوشی بصورت

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_c \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

از آنجایی که $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$، هیچ مشکلی در تعمیم $n!$ به مقادیر دلخواه وجود ندارد. بعدها لورنت [13] مقاله‌اش را که نظریه‌ی عملگرهای تعمیم یافته یک تراز در پیشرفت آن به عنوان یک نقطه حرکت برای ریاضی‌دانان مدرن بدست آورد منتشر کرد. تئوری محاسبه‌های کسری با تئوری عملگرها پیوند خورده است. عملگرهای D یا $\frac{d}{dx}$ و D^2 یا $\frac{d^2}{dx^2}$ قانون تبدیل یک تابع به توابع دیگر علامت گذاری شده‌اند که مشتقات معمولی اولی و دومی می‌باشند. نقطه شروع لورنت هم فرمول انتگرال کوشی بود. منحنی ساده بسته لورنت یک مسیر باز روی یک سطح ریمن در تقابل با مسیر سونین و لتنیکوف بود.

روش انتگرال گیری کانتور تعریف

$${}_cD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \qquad Re\nu > 0 \tag{۸.۱}$$

را برای انتگرال گیری از یک مرتبه دلخواه فراهم کرد. روش بکار رفته اکثرا وقتی رخ می‌دهد که $c = 0$ باشد

$${}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \qquad Re\nu > 0 \tag{۹.۱}$$

[12] $Letnikov$

[13] $Laurent$