بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم مریم عبدی‌دیزجی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۵۱۰۲۰ تحت عنوان: «ساختار تقریباً هرمیتی روی خمینه ۴- بعدی واکر» را در تاریخ ۱۳۹۲/۸/۲۶ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی رجایی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلا به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ ~~رساله دکتری~~ نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۲ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی ~~سرکار خانم~~/جناب آقای دکتر عباس حیدری ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر — از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مریم عبدی دیزجی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مریم عبدی دیزجی

تاریخ و امضا: ۹۲/۱۰/۲ دی

ایین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش‌اموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درامدهای حاصل از انها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید اورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌اموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا اثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس ائین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این ایین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیات رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب مریم عبدی برجی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۹۱-۹۰ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در ائین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد ائین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر ان به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس براورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۲/۱۰/۲

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

گروه ریاضی محض

ساختار تقریباً هرمیتی روی خمینه‌ی ۴-بعدی واکر

نگارنده:

مریم عبدی دیزجی

استاد راهنما:

دکتر عباس حیدری

آبان ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

که وجودشان تاج افتخاریست بر سرم و نامشان دلیلی بر بودنم

و بوسه می زنم بر دستهایشان،

دست هایی که آرامش را بر زندگی من تابانده اند...

و

همسر عزیزم

که وجودش بزرگترین نشانه ی لطف الهی در زندگی من است...

در آغاز خدا را شکر می کنم

و

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عباس حیدری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

چکیده

در این پایان‌نامه نشان داده می‌شود که هر ساختار تقریباً هرمیتی سره برخمینه‌ی ۴-بعدی واکر ایزوتروپیک‌کیلر است. هم‌چنین توصیفی موضعی از ساختارهای تقریباً کیلری سره که خوددوگان، *-اینشتین یا اینشتین هستند ارائه می‌شود و ثابت می‌شود که هر ساختار بطور اکید تقریباً کیلری اینشتین سره خوددوگان، ریچی تخت و *-ریچی تخت است. از این مطالب برای ارائه‌ی مثال‌هایی از ساختارهای تقریباً کیلری ناکیلری تخت و مثال نقض برای حدس گلدبرگ درحالت ۴-بعدی استفاده می‌شود.
پایان‌نامه به تشریح مرجع[۷] می‌پردازد.

واژگان کلیدی: متریک واکری، ساختار تقریباً مختلط سره، ساختار تقریباًکیلری، *-اینشتین، اینشتین، متریک خوددوگان، حدس گلدبرگ

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

تأثیر خمیدگی بر خمینه‌ها در مفاهیم گوناگونی ظاهر می‌شود. یکی از مهمترین تأثیرات خمیدگی بر یک خمینه این است که وجود شرط‌های ویژه‌ای از خمیدگی بر روی خمینه ممکن است باعث به وجود آمدن ساختارهای گوناگونی بر روی آن شود. یکی از مسائل مهم در هندسه‌ی تقریباً هرمیتی بررسی ارتباط میان ویژگی‌های ساختار (g, J, ω) و خمیدگی (M, g) است. برای مثال حدس گلدبرگ [۱۲]، بیان می‌کند" ساختارهای تقریباًمختلط روی خمینه‌های تقریباً کیلری اینشتین فشرده انتگرال‌پذیر هستند ".

سکیگاوا [۱] ثابت‌کرده‌است که حدس گلدبرگ با شرط اضافی نامنفی بودن خمیدگی اسکالر صحیح است [۲۸] [۲۹]. در سال ۱۹۷۰ ، الکسوسکی [۲] وجود مثال‌های نقضی را برای حالت نافشرده نتیجه گرفت [۱]، هم‌چنین نوروسکی [۳] و پرزانووسکی [۴] مثال نقض صریحی برای حالت نافشرده در بعد ۴ [۲۲] ارائه کردند. آپوستلو [۵] نیز مثال‌های نقضی

[۱] Sekigawa

[۲] Alekseevsky

[۳] Nurowski

[۴] Przanowski

[۵] Apostolov

برای حالت نافشرده ارائه کرده‌است [۲]. در [۲۱] ساختارهای تقریباً کیلری اینشتین روی خمینه‌ی ۸-بعدی واکر مورد بررسی قرار گرفته‌است و مثالی از یک ساختار تقریباًکیلری ناکیلری اینشتین روی چنبره‌ی ۸-بعدی ارائه شده‌است که در واقع مثال نقضی برای حدس گلدبرگ است.

اگرچه حدس گلدبرگ دارای ماهیت سراسریست اما با گذاشتن شرط‌های اضافی مربوط به خمیدگی می توان انتگرال‌پذیری ساختار تقریباً مختلط را بطور موضعی نشان داد. برای مثال در بعد ۴ متریک‌های تقریباً کیلری اینشتین که *-اینشتین نیز باشند، کیلری هستند [۲۳] (شرط *-اینشتین را می‌توان با شرط پادخوددوگانی نیز جایگزین کرد که در این صورت باز هم انتگرال‌پذیری نتیجه می‌شود [۳]). هم‌چنین با توجه به [۴] [۲۳] [۲۴] واضح است که هر متریک معین تقریباً کیلری با خمیدگی برشی ثابت، کیلری است.

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است که در فصل اول آن پیش نیازها آورده می‌شود. در فصل دوم به بررسی متریک واکری و مثال‌هایی از آن پرداخته می‌شود. فصل پایانی نیز به شرح و اثبات قضایای مرجع اصلی پایان نامه [۷] می‌پردازد و ثابت می‌شود که هر ساختار تقریباً کیلری اینشتین سره و ناکیلری، خوددوگان، ریچی‌تخت و *-ریچی‌تخت است و با استفاده از این مطلب مثال‌هایی از ساختارهای تقریباً کیلری ناکیلری تخت در حالت متریک نامعین(که در اینجا متریک واکری ۴-بعدی با صفحات پوچ موازی از بعد ماکسیمم در نظرگرفته‌شده‌است) ارائه می شود. هم‌چنین توصیفی موضعی از ساختارهای تقریباً کیلری اکید اینشتین سره با خمیدگی برشی ثابت ارائه می شود و در نهایت مثالی از ساختارهای تقریباً کیلری اکید با خمیدگی برشی ثابت در حالتی که متریک نامعین باشد به‌دست می‌آید.

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم اولیه

دراین فصل پیش نیازها و تعاریف اولیه مورد نیاز در فصل های آتی آورده می‌شود.مراجع اصلی این فصل [۸]، [۱۵]، [۱۷]و [۲۵] می‌باشد.

۱.۱ خمینه ی شبه ریمانی

فرض کنید Vیک فضای برداری باشد. یک فرم دوخطی روی V عبارتست از تابع $\mathbb{R}-$دوخطی

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

نگاشت دوخطی فوق را متقارن گویند هرگاه

$$\forall v, w \in V : b(v, w) = b(w, v).$$

فرم دوخطی b روی V را

- مثبت [منفی]معین گوییم هرگاه برای هر $v \neq ۰$، $b(v, v) > ۰$ $[< ۰]$.

- مثبت [منفی] نیم معین گوییم هرگاه برای هر $v \in V$، $0 \geq b(v,v)$ $[\leq 0]$.
- و ناتبهگون گوییم هرگاه $b(v,w) = 0$ برای هر $w \in V$، نتیجه بدهد $v = 0$.

اندیس ν برای فرم دوخطی b روی V عبارتست از بعد بزرگترین زیرفضای $W \subseteq V$ که $b\mid_W$ منفی معین باشد.

تعریف ۱.۱.۱. تانسور متر g روی خمینه‌ی هموار M عبارتست از یک میدان تانسوری نوع $(0,2)$ ناتبهگون و متقارن روی M که دارای اندیس ثابت باشد.

در واقع تانسور متر g روی خمینه‌ی M به‌طور هموار به هر نقطه‌ی $p \in M$ یک ضرب اسکالر(فرم دوخطی متقارن و ناتبهگون) g_p روی فضای مماس T_pM نسبت می‌دهد که اندیس g_p برای هر $p \in M$ یکسان است. خمینه‌ی هموار M به همراه تانسور متر g یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی نامیده می‌شود. همچنین خمینه‌ی شبه‌ریمانی (M,g) را ریمانی گویند هرگاه اندیس آن برابر صفر باشد. اگر P زیرخمینه‌ای از خمینه‌ی شبه‌ریمانی M و

$$j : P \longrightarrow M$$

نگاشت شمول باشد. در این صورت P را زیرخمینه‌ی شبه‌ریمانی M نامیم هرگاه$j^*(g)$ یک تانسور متر روی P باشد. زیرخمینه‌های شبه‌ریمانی با نقص بعد یک، ابررویه‌ی شبه ریمانی نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. اگر (M,g_M) و (N,g_N) دو خمینه‌ی شبه‌ریمانی باشند، یک طولپایی از M به Nعبارتست از وابرسانی $\phi : M \longrightarrow N$ که حافظ متریک نیز باشد یعنی $\phi^*(g_N) = g_M$.

فرض کنید M یک زیرخمینه‌ی شبه‌ریمانی از $\overline{M}$باشد. یک $\overline{M}$ میدان برداری روی M عبارتست از یک میدان برداری روی $\overline{M}$ در امتداد نگاشت شمول $j : M \longrightarrow \overline{M}$. مجموعه‌ی تمام $\overline{M}$میدان‌های برداری روی M رابا $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (M,g) یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی باشد. زیرفضای W از T_pM تبهگون نامیده می‌شود هرگاه بردار ناصفر $v \in W$ موجود باشد به‌طوریکه برای هر $w \in W$ $g(v,w) = 0$، به عبارت دیگر هرگاه $g|_W$ تبهگون باشد.

فرض کنید (M,g) یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی و W زیرفضایی از T_pM باشد

$$W^{\perp} = \{x \in T_pM : g(x,y) = 0 \forall y \in W\}$$

لم ۴.۱.۱. زیرفضای W از T_pM تبهگون است اگروتنهااگر $W + W^{\perp} \neq T_pM$ ($W \cap W^{\perp} \neq 0$)

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید (M,g) یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی باشد. زیر فضای W از T_pM

- پوچ نامیده می‌شود هرگاه $W \subseteq W^{\perp}$ ($\forall v,w \in W$، $g(v,w) = 0$) و
- کلاًپوچ نامیده می‌شود هرگاه $W = W^{\perp}$.

تذکر ۶.۱.۱. هر زیرفضای صفر پوچ و هر زیرفضای پوچ ناصفر تبهگون است.

گزاره ۷.۱.۱. زیرفضای W از T_pM تبهگون است اگروتنهااگر $W^{\perp}$ تبهگون باشد.

تعریف ۸.۱.۱. یک هموستار ∇ روی خمینه‌ی هموار M عبارتست از یک تابع

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(V,W) \longmapsto \nabla_V W$$

بطوریکه

i. $\nabla_V W$ نسبت به V ، $C^{\infty}(M)-$ خطی است.

ii. $\nabla_V W$ نسبت به W ، $\mathbb{R}$-خطی است.

iii. $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V(W) \quad \forall f \in C^\infty(M)$

قضیه ۹.۱.۱. روی خمینه‌ی شبه‌ریمانی M هموستار یکتای ∇ موجود است که برای هر $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

i. $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$ (بدون تاب بودن ∇)

ii. $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$ (سازگاری با متریک)

این هموستار، هموستار لوی-چویتا روی M نامیده می‌شود و با استفاده از فرمول زیر(فرمول کزول)مشخص می‌شود

$$۲g(\nabla_V W, X) = Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) - g(V, [W, X])$$
$$+ g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]).$$

فرض کنید ∇ هموستار لوی-چویتا روی خمینه‌ی هموار M و(U, x) نقشه‌ای از M باشد. در این صورت ضرایب کریستوفل ∇ نسبت به این نقشه عبارتند از توابع حقیقی مقدار Γ_{ij}^k روی U به‌طوریکه

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

گزاره ۱۰.۱.۱. برای نقشه‌ی (U, x) از خمینه‌ی شبه ریمانی (M, g)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{km}}{۲}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) \qquad (۱.۱)$$

که در آن (g_{ij}) ماتریس gو (g^{ij}) ماتریس وارون g است.

مشتق کواریان (لوی-چویتا) (r,s)−تانسور A روی خمینه‌ی هموار M عبارتست از $(r,s+1)$− تانسور ∇A به‌طوریکه برای هر $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ و $\theta_j \in \Lambda^1(M)$

$$(\nabla A)(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s) =$$
$$V.A(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s) - \sum_{i=1}^{r} A(\theta_1, \cdots, \nabla_V \theta_i, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, X_s) \quad (2.1)$$
$$- \sum_{j=1}^{s} A(\theta_1, \cdots, \theta_r, X_1, \cdots, \nabla_V X_j, \cdots, X_s)$$

تعریف ۱۱.۱.۱. میدان برداری $X \in \mathfrak{X}(M)$ را موازی گویند هرگاه $\nabla X = 0$.

لم ۱۲.۱.۱. اگر M یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی، $\alpha : I \longrightarrow M$ یک خم هموار، $a \in I$ و $v \in T_{\alpha(a)}M$ باشد، میدان موازی $X \in \mathfrak{X}(M)$ در امتداد α حول $\alpha(a)$ موجود است که $X(\alpha(a)) = v$.

باتوجه به لم فوق برای هر $a, b \in I$ نگاشت زیر خوش‌تعریف است

$$P : P_a^b : T_{\alpha(a)}M \longrightarrow T_{\alpha(b)}M$$
$$v \longmapsto P(v) = X(\alpha(b))$$

که در آن X میدان برداری موازی‌ای است که $X(\alpha) = v$. این نگاشت را انتقال موازی در امتداد α گویند.

گزاره ۱۳.۱.۱. اگر M زیرخمینه‌ی شبه‌ریمانی $\overline{M}$ باشد، برای هر $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ و برای هر $p \in M$ همسایگی U حول p ومیدان موضعی $\overline{X}$ روی $\overline{M}$ موجود است که $\overline{X}|_{U \cap M} = X$.

اگر $\overline{\nabla}$ هموستار لوی-چویتا روی $\overline{M}$ باشد، نگاشت زیر هموستار القاشده روی زیرخمینه‌ی M می‌باشد

$$\mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$$

$$(V, X) \longmapsto \overline{\nabla}_V X := \overline{\nabla}_{\overline{V}} \overline{X}$$

که در آن $\overline{X}$ و $\overline{V}$ گسترش X و V مانند گزاره‌ی قبل هستند.

لم ۱۴.۱.۱. $\overline{\nabla}_V X$ یک $\overline{M}$ میدان برداری خوش‌تعریف روی M است.

فرض کنید M یک زیرخمینه‌ی شبه‌ریمانی از $\overline{M}$ باشد. در این صورت برای هر $p \in M$، T_pM یک زیرفضای ناتبهگون از $T_p\overline{M}$ است.بنابراین طبق لم (۴.۱.۱)

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp} \tag{۳.۱}$$

با توجه به (۷.۱.۱)در تجزیه‌ی فوق $T_pM^{\perp}$ نیز زیرفضایی ناتبهگون از $T_p\overline{M}$ است. حال با توجه به (۳.۱) برای هر $x \in T_p\overline{M}$ نمایش یکتای زیر را داریم

$$x = tanx + norx$$

که در آن $norx \in T_pM^{\perp}$ و $tanx \in T_pM$. بردارهای موجود در $T_pM^{\perp}$ را بردارهای نرمال و بردارهای موجود در T_pM را بردارهای مماس بر M گویند.همچنین میدان برداری $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ را نرمال بر M گویند هرگاه به ازای هر $p \in M$، Z_p یک بردار نرمال بر M باشدو مجموعه میدان‌های برداری نرمال بر M را با $\overline{\mathfrak{X}}(M)^{\perp}$ نشان می‌دهیم. بنابراین

نگاشت‌های

$$tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \qquad nor : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

$$X \longmapsto tanX \qquad X \longmapsto norX$$

$$(tanX)_p := tanX_p \qquad (norX)_p := norX_p$$

خوش تعریف هستند.

لم ۱۵.۱.۱. اگر $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ آن‌گاه $\nabla_V W = tan\overline{\nabla}_V W$ ،که در آن ∇ هموستار لوی-چویتا روی M است.

لم ۱۶.۱.۱. تابع

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

$$(V,W) \longmapsto nor\overline{\nabla}_V W$$

یک نگاشت متقارن و $C^\infty(M)-$ دوخطی است.

II در لم فوق، تانسور شکل(یا دومین فرم بنیادی) $M \subseteq \overline{M}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید$\overline{M}$ یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی، $M \subset \overline{M}$ یک ابررویه‌ی شبه‌ریمانی و U میدان برداری نرمال یکه روی M باشد. $(۱,۱)-$ تانسورS روی M به‌طوریکه

$$\forall V,W \in \chi(M) \quad g(S(V),W) = g(II(V,W),U)$$

عملگر شکل $M \subset \overline{M}$ حاصل از U نامیده‌می‌شود.

پس S در هرنقطه‌ی $p \in M$ عملگر خطی $S : T_pM \longrightarrow T_pM$ را مشخص می کند.

لم ۱۸.۱.۱. اگر S عملگر شکل $M \subset \overline{M}$ ناشی از U و $\overline{\nabla}$ هموستار لوی-چویتا روی $\overline{M}$ باشد دراین‌صورت $S(v) = -\overline{\nabla}_v U$ و در هر نقطه عملگر خطی S روی T_pM، خودالحاق است.

۱.۱.۱ خمیدگی

فرض کنید M یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی و ∇ هموستار لوی-چویتا رویM باشد. تابع $R : \mathfrak{X}(M)^۳ \to \mathfrak{X}(M)$ که $R_{X,Y}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$یک (۱،۳)-تانسور روی M است که تانسور خمیدگی ریمانی روی M نامیده‌می‌شود.

گزاره ۱۹.۱.۱. اگر $x,y,z,v,w \in T_pM$ آن‌گاه

۱) $R_{xy} = -R_{yx}$

۲) $g(R_{xy}v,w) = -g(R_{xy}w,v)$

۳) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = ۰$

۴) $g(R_{xy}v, w) = g(R_{vw}x, y)$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیدM یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی، R تانسور خمیدگی ریمانی رویM ، $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ و $x, y, z, t \in T_pM$باشند، در این‌صورت

- $\rho(X, Y) = trace\{Z \longmapsto R_{X,Z}Y\}$ تانسور خمیدگی ریچی،
- $\tau = trace\rho$ خمیدگی اسکالر،
- $K(x, y) = \frac{g(R_{x,y}x,y)}{g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^۲}$ خمیدگی برشی نسبت به صفحه‌ی ناتبهگون $\Pi = span\{x, y\}$ ،
- $G = \rho - \frac{۱}{n}\tau g$ تانسور اینشتین و
- $$W(x,y,z,t) = R(x,y,z,t) + \frac{\tau}{(n-۱)(n-۲)}\{g(x,t)g(y,z) - g(x,z)g(y,t)\}$$
$$-\frac{۱}{n-۲}\{g(x,t)\rho(y,z) - \rho(x,z)g(y,t) + \rho(x,t)g(y,z) - g(x,z)\rho(y,t)\}$$
تانسورخمیدگی ویل نامیده می‌شوند.

تذکر ۲۱.۱.۱. مقدار $K(\Pi)$ مستقل از انتخاب پایه‌ی Π است.

تعریف ۲۲.۱.۱. ([۲۱]) خمینه‌ی شبه‌ریمانی (M^n, g) را اینشتین نامیم هرگاه Gصفر باشد یعنی $\rho = \frac{\tau}{n}g$.

فرض کنید (M, g) یک خمینه‌ی شبه‌ریمانی و $p \in M$ باشد. بردار $z \in T_pM$

- زمان‌گون نامیده می‌شود هرگاه $g(z, z) < ۰$