دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی — تحقیق در عملیات

موضوع:

مطالبی پیرامون جستجوی خطی غیریکنوا

نگارش:

مسعود حاتمیان

اساتید راهنما:

دکتر محمدرضا پیغامی

دکتر سید مقتدی هاشمی پرست

استاد مشاور:

دکتر محمود هادی‌زاده یزدی

مهرماه ۱۳۸۹

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان نامه: بررسی روش‌های جستجوی خطی غیر یکنوا

استاد راهنما: آقای دکتر محمدرضا پیغامی

نام دانشجو: مسعود حاتمیان

شماره دانشجویی: ۸۷۰۴۶۳۴

اینجانب مسعود حاتمیان دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تقدیم به عزیزانم

مادر فداکار و پدر گرامیم

و

آنانکه برای کسب دانایی و رسیدن به هدف والا مشتاقانه در تلاشند

تشکر و قدردانی

در این مجال که مرحله‌ای دیگر از تحصیلاتم را با موفقیت به پایان رسانده‌ام بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که نه تنها در دوران تحصیل بلکه در تمامی مراحل مشوق و پشتیبانم بوده‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم.

و فرصت را مغتنم شمرده، زحمات استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا پیغامی را برای راهنمایی‌ها و حمایت‌هایشان در طول دوران کارشناسی ارشد و اتمام این رساله ارج نهاده و بهترین‌ها را برایشان آرزو می‌کنم. هم‌چنین از جناب آقای دکتر مقتدی هاشمی‌پرست به عنوان استاد راهنمای دوم، استاد مشاورم، جناب آقای دکتر محمود هادیزاده و تمامی کسانی که مرا در اتمام این پایان نامه یاری رسانده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده رساله

دراین پایان‌نامه سعی بر آن شده‌است که صورت‌های کلی روش‌های جستجوی خطی غیریکنوایی که تاکنون مورد مطالعه قرارگرفته‌اند، معرفی گردد. علاوه بر آن، همگرایی سراسری آنها نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهدگرفت. همان‌طور که خواهیم دید نتایج عددی حاصل روی مسائل آزمونی، برتری روش‌های غیریکنوا را نسبت به روش‌های یکنوا نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی نامقید؛ بهینه‌سازی مقید کراندار؛ جستجوی خطی غیریکنوا؛ قاعده‌F؛ همگرایی سراسری.

پیش‌گفتار:

جستجوی خطی غیریکنوا که به علت ضعف روش‌های جستجوی خطی یکنوا توسط برخی محققین این رشته پا به عرصه ظهور گذاشت، توانست با موفقیت در روند افزایش مرتبه همگرایی الگوریتم‌ها در نزدیکی جواب، جای خود را به عنوان یک روش موفق باز کند.

ایده اولیه این روش اولین بار توسط گریپو[۱] و همکارانش در سال ۱۹۸۰ به عنوان یک روش جایگزین برای جستجوی خطی آرمیژو[۲] معرفی گردید. این روش عملاً مواقعی به کار می‌آید که جواب بهینه در کف یک دره باریک قرار گرفته و تکرارها به این ناحیه نزدیک می‌شوند. از آنجا که در اکثر مواقع جواب‌های بهینه مسائل در چنین موقعیتی قرار می‌گیرند، اهمیت به کارگیری این روش مورد توجه قرار گرفت.

هر چند روش جستجوی خطی غیریکنوا برای مسائل مقید نیز بکار می‌رود، ما در این پایان نامه روش را روی مسأله نامقید کلی به صورت زیر مورد بحث قرار می‌دهیم:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \tag{۱}$$

که در آن $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی به طور پیوسته مشتق پذیر است. به طور معمول در تکرار جاری x_k، اگر $g_k=\bigtriangledown f(x_k)\neq ۰$، آنگاه روش جستجوی خطی جهت d_k را با استفاده از روش‌های موجود تعریف کرده و طول گام α_k مطلوب را با به کار بردن جستجوی خطی در امتداد d_k پیدا می‌کند. در این صورت نقطه بعدی به صورت $x_{k+۱}=x_k+\alpha_k d_k$ خواهد بود.

روش‌های جستجوی خطی یکنوا در هر تکرار به طور یکنوا شرط $f_{k+۱}\leq f_k$ (کاهش تابع هدف) را رعایت می‌کنند. این خاصیت روش‌های سنتی باعث می‌گردد زمانی که به یک دره باریک نزدیک می‌شویم، طول گام‌ها کوتاه شده و یا دچار پدیده زیگزاگ[۳] شویم. که این مشکلات باعث افزایش تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب می‌گردد که به طور منطقی کاهش سرعت همگرایی را به دنبال دارد. به همین دلیل در روش جستجوی خطی غیریکنوا، با نادیده گرفتن شرط کاهش یکنوای تابع هدف، در تعداد گام‌های محدود و کنترل شده، شرایط را برای جلوگیری از کاهش طول گام‌ها فراهم می‌کنند. آزمایشات عددی متعدد نشان داده‌اند که این روش برای مسائل بهینه‌سازی مقید و نامقید موثر و قابل رقابت با روش‌های بهینه‌سازی دیگر می‌باشد.

---

[۱] L.Grippo
[۲] Armijo
[۳] Zigzag

اخیراً، سان[۴] و همکارانش [۳۳] تلاش کرده‌اند تا با تلفیق تابع اجبار [۵] و روش غیریکنوا به نتایج بهتری در زمینه بهینه‌سازی نامقید دسترسی پیدا کنند. این روش به قاعده‌F غیریکنوا[٦] شهرت پیدا کرده‌است و روش‌های جستجوی خطی غیریکنوای رایج از قبیل جستجوی خطی غیریکنوای آرمیژو، گلدشتاین[۷] و ولف[۸] حالت خاصی از جستجوی خطی غیریکنوای قاعده‌F می‌باشند. سان و همکارانش برای رسیدن به همگرایی سراسری، شرایط لازم زیر را روی جهت d_k اعمال کردند:

$$|\frac{-g_k^T d_k}{\|d_k\|}| \geq \sigma(\|g_k\|), \qquad k = ۰, ۱, ..., \tag{۲}$$

و

$$\|d_k\| \leq c_۱ \|g_k\| \tag{۳}$$

که در آن $\sigma(.)$ یک تابع اجبار و $c_۱ \geq ۰$ می‌باشد.

شرایط (۲) و (۳) نقش مهمی را در جستجوی خطی غیریکنوا ایفا می‌کنند. واضح است که کوچک بودن گرادیان در شرط (۳) مانع تشکیل جهت‌هایی با نرم بزرگ‌تر می‌شود، به عنوان مثال در همسایگی یک نقطه زینی و یا در کف یک دره باریک این اتفاق خواهد افتاد. این مشکل را می‌توان با انتخاب $c_۱$ بزرگتری از پیش روی برداشت و همین موضوع نشان دهنده غیر ضروری بودن شرط (۳) می‌باشد.

در مرجع [۱۳] دای[۹] نشان داد که اگر $\nabla f(x)$ پیوسته لیپ شیتس باشد آنگاه شرط (۳) را می‌توان با شرط زیر جایگزین کرد:

$$\|d_k\|^۲ \geq \beta + \gamma k \qquad k = ۱, ۲, ۳, ..., \tag{۴}$$

که در آن β و γ مقادیر ثابت مثبتی هستند و تحت شرط (۴) و شرط کاهش کافی

$$g_k^T d_k \leq -c_۲ \|g_k\|^۲, \tag{۵}$$

با ثابت مثبت $c_۲$، آنها ثابت کردند که شرایط همگرایی ضعیف زیر برقرار است:

$$\lim_{k \to \infty} \inf \|g_k\| = ۰. \tag{٦}$$

---

[۴] Wenyu Sun
[۵] Forcing Function (F-function)
[٦] nonmonotone F-rule
[۷] Goldstein
[۸] Wolfe
[۹] Y.H. Dai

در این رساله به تشریح و بسط روش غیریکنوای جدیدی می‌پردازیم که توسط یو[۱۰] و پو[۱۱] با نام قاعده F غیریکنوای جدید برای بهینه‌سازی نامقید، با الهام از روش ناحیه اعتماد غیریکنوای مرجع [۳۶] ارائه شده است. با استفاده از این روش غیریکنوای جدید می‌توان با حذف شرط (۳) شرایط همگرایی قوی را فراهم نمود. به علاوه، شرط لازم فشردگی مجموعه $\Omega = \{x|f(x) \leq f(x_\circ)\}$ که در مرجع [۳۳] توسط سان و همچنین پیوسته لیپ شیتس بودن $\nabla f(x)$ که در مرجع [۱۳] توسط دای لحاظ شده است، دیگر مورد نیاز نمی‌باشد.

در فصل اول این رساله، برخی مفاهیم و تعاریف پیش نیاز را مطالعه می‌کنیم، سپس در فصل دوم روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی نامقید را به اختصار بیان نموده و در فصل سوم مروری بر جستجوی‌های خطی یکنوا و غیریکنوا انجام می‌دهیم. در فصل چهارم با روش غیریکنوای مورد نظر و توسیع آن به بهینه‌سازی مقید کراندار آشنا می‌شویم و در پایان نتایج عددی برخی از روش‌های مورد مطالعه را مشاهده می‌کنیم.

---

[۱۰] Zhensheng Yu

[۱۱] Dingguo Pu

فهرست مندرجات

مقدمه ۱

۱ **مفاهیم و تعاریف اولیه** ۷

۱.۱ مفاهیم توپولوژیک ۷

۲.۱ مجموعه‌ها و توابع محدب ۱۲

۳.۱ آهنگ همگرایی ۱۳

۱.۳.۱ همگرایی Q−خطی ۱۳

۲.۳.۱ همگرایی R−خطی ۱۴

۲ **روش‌های حل مسائل بهینه سازی نامقید** ۱۵

۱.۲ روش جستجوی خطی ۱۵

۲.۲ روش ناحیه اعتماد ۱۷

۳ **مقدمه‌ای بر جستجوی خطی غیریکنوا** ۱۸

۱.۳ روش جستجوی خطی غیریکنوای گریپو ۱۸

۱.۱.۳ اولین روش جستجوی خطی غیریکنوا ۲۱

۲.۳ روش جستجوی خطی غیریکنوای سان ۲۸

۱.۲.۳ همگرایی سراسری ۳۰

۳.۳ روش جستجوی خطی غیریکنوای دای ۳۶

۱.۳.۳ تحلیل روش‌های غیریکنوا برای توابع کلی ۳۶

۲.۳.۳ ارتباط جستجوی خطی غیریکنوا و همگرایی R−خطی ۴۱

۳.۳.۳ جستجوی خطی غیریکنوای اصلاح شده ۴۷

۴.۳ روش جستجوی خطی غیریکنوای شی و شن ۵۱

۱.۴.۳ همگرایی سراسری ۵۳

۲.۴.۳ نرخ همگرایی ۵٦

۴ یک روش جستجوی خطی غیریکنوای جدید برای مسائل بهینه‌سازی مقید و نامقید ٦۳

۱.۴ قاعدهF غیریکنوای یو و پو ٦۳

۱.۱.۴ همگرایی سراسری ٦۴

۲.۴ توسیع روش غیریکنوا برای مسائل بهینه‌سازی مقید کراندار ۷۱

۱.۲.۴ همگرایی سراسری ۷۳

۵ نتایج عددی ۷۷

۱.۵ نتایج عددی ۷۷

کتاب نامه ۸۸

فهرست الگوریتم‌ها ۹۳

فهرست مندرجات ٦

فهرست جداول ٩٣

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل سعی بر آن شده است که تعاریف و مفاهیم ضروری که در فصل‌های آتی مجالی برای عنوان کردن آنها وجود ندارد، آورده شود.

۱.۱ مفاهیم توپولوژیک

در اینجا به دلیل عدم نیاز به تحلیل‌های آنالیزی، تنها به تعاریف حسابی آنها که برای مخاطبان بیشتری قابل درک هستند، اکتفا می‌کنیم. برای تعاریف این بخش از کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی نوشتهٔ ریچارد ا.سیلورمن و حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشتهٔ تام م.آپوستل استفاده شده است.

نامساوی کشی—شوارتز[۱]

اگر $a_۱, \cdots, a_n$ و $b_۱, \cdots, b_n$ عددهای حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه داریم:

$$\left(\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k\right)^۲ \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\right)$$

به علاوه، اگر حداقل یکی از a_iها صفر نباشد، آنگاه تساوی برقرار است هرگاه عددی حقیقی مانند x وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $۱ \leq k \leq n$،

$$a_k x + b_k = ۰.$$

[۱] Cauchy-Schwartz

به نامساوی فوق با شرایط ذکر شده نامساوی کشی—شوارتز گویند.

همگرایی دنباله

دنباله $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$، یا ساده تر $\{x_k\}$، همگرا به حد x گفته می‌شود، هرگاه داشته باشیم، $|x_k - x| \longrightarrow 0$. به عبارت دیگر،

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad s.t. \quad \forall n \geq M; \quad |x_n - L| < \varepsilon$$

اگر دنباله $\{x_k\}$ به x همگرا باشد، می‌نویسیم $x_k \longrightarrow x$ یا $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

نقطه حدی

نقطه‌ای مانند x، یک نقطه حدی دنبالهٔ $\{x_k\}$ است هرگاه زیردنباله‌ای از $\{x_k\}$ وجود داشته باشد که همگرا به x باشد. بنابراین x یک نقطه حدی $\{x_k\}$ است اگر زیرمجموعه‌ای مانند K از اعداد صحیح مثبت وجود داشته باشد به طوری که دنبالهٔ $\{x_k\}_{k\in K}$ همگرا به x باشد.

همسایگی باز

یک همسایگی باز حول x به شعاع $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای به صورت $\{y : |y - x| < \varepsilon\}$، می‌باشد که در آن $|.|$ بیان کننده نرم برداری است.

مجموعه‌های باز و بسته

زیرمجموعه S از $\mathbb{R}^n$ باز است هرگاه برای هر نقطه در S، یک همسایگی باز از آن نقطه مشمول در S وجود داشته باشد. مجموعه P بسته است هرگاه هر نقطه حدی آن عضوی از P باشد.

مجموعه کراندار

فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بوده و عددی چون B وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در S،

$$x \leq B$$

در این صورت می‌گویند S از بالا به B کراندار است. تعریف کران پایین را می‌توان به طور مشابه تنظیم کرد.

مجموعه‌ای که از بالا و پایین کراندار باشد، کراندار نامیده می‌شود.

مجموعه فشرده

در فضای $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه فشرده است هرگاه بسته و کراندار باشد.

پیوستگی

تابع حقیقی f، تعریف شده بر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، در نقطه x پیوسته نامیده می‌شود هرگاه از همگرایی $x_k \to x$ همگرایی $f(x_k) \to f(x)$ نتیجه شود. به عبارت دیگر، f در نقطه x پیوسته است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای $|y-x| < \delta$، داشته باشیم $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$.
به بیان ریاضی

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$$

قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته

فرض کنید f در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. دو نقطهٔ دلخواه $x_1 < x_2$ در $[a,b]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x_1) \neq f(x_2)$. در این صورت f هر مقدار بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را در نقطه‌ای از بازهٔ (x_1, x_2) اخذ می‌کند.

قضیه مقدار میانگین برای توابع پیوسته

هرگاه f تابعی پیوسته در بازه $[a,b]$ و روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقطه‌ای چون $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که:

$$f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پیوستگی یکنواخت

تابع $f(x)$ در یک بازه پیوسته یکنواخت است در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x_1 و x_2 در آن بازه، شرط $|x_1 - x_2| < \delta$ ایجاب کند که $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

قضیه زیر رابطه بین بسته بودن بازه تعریف $f(x)$ و پیوستگی یکنواخت آن را شرح می‌دهد.

قضیه ۱.۱ اگر $f(x)$ در یک بازه بسته پیوسته باشد آنگاه بر بازه بسته پیوسته یکنواخت است.

پیوستگی لیپ شیتس

تابع حقیقی مقدار یا ماتریسی f را روی مجموعه S پیوسته لیپ شیتس گوییم، هرگاه عدد مثبت L وجود داشته باشد به طوری که

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||, \qquad \forall x, y \in S.$$

که در آن، نماد $||.||$ برای توابع حقیقی قدر مطلق و برای توابع ماتریسی نرم ماتریسی می‌باشد.

به طور پیوسته مشتق پذیر

تابع پیوسته f را به طور پیوسته مشتق پذیر گوییم هرگاه دارای مشتق اول پیوسته باشد. به همین ترتیب، تابع f را nبار به طور پیوسته مشتق پذیر گوییم هرگاه مشتق مرتبه nام آن به طور پیوسته مشتق پذیر باشد.

گرادیان تابع

اگر تابع حقیقی f بر فضای $\mathbb{R}^n$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد،آنگاه گرادیان f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_۱}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_۲}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T.$$

در محاسبات ماتریسی، بردار گرادیان به صورت بردار ستونی در نظر گرفته می‌شود.

هسی تابع [۲]

اگر تابع f دوبار به طور پیوسته مشتق پذیر باشد، آنگاه هسی تابع f در نقطه x را با نماد $\nabla^۲ f(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla^۲ f(x) = \left[\frac{\partial^۲ f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}.$$

به دلیل پیوستگی تابع f و مشتقات آن، ماتریس $\nabla^۲ f(x)$ یک ماتریس متقارن است.

[۲] hessian

نقطه ایستا

نقطه c عضو درون دامنه تابع f را نقطه ایستا برای این تابع گوییم، هرگاه $f'(c) = 0$.

مینیمم موضعی و مینیمم موضعی قوی (اکید)

تابع حقیقی مقدار f در نقطه x_0 از دامنه‌اش دارای مینیمم موضعی است، هرگاه به ازای یک $\varepsilon > 0$ همسایگی $B(x_0, \varepsilon)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in B(x_0, \varepsilon)$ رابطه $f(x_0) \leq f(x)$ برقرار باشد. تابع f در این نقطه دارای مینیمم موضعی قوی خواهد بود هرگاه $f(x_0) < f(x)$.

اثر ماتریس[۳]

در جبر خطی، اثر ماتریس مربعی $n \times n$ A را مجموع عناصر روی قطر اصلی آن تعریف می‌کنیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

به طوری که a_{ii}ها عناصر روی قطر اصلی هستند.

تصویر متعامد[۴]

تبدیل خطی P از فضای برداری V به خودش را به طوری که $P^2 = P$ باشد، تصویر متعامد گویند.

مثال ۱.۱ تبدیل خطی زیر از فضای برداری $\mathbb{R}^3$ به خودش، یک تصویر متعامد است،

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

[۳] Trace

[۴] Orthogonal Projection

۲.۱ مجموعه‌ها و توابع محدب

برای تعاریف این بخش از کتاب برنامه ریزی خطی و غیرخطی نوشته دیوید جی. لوئنبرگر ترجمه دکتر نظام الدین مهدوی و محمد حسین پور کاظمی استفاده شده است.

مجموعهٔ محدب

مجموعهٔ $C \in \mathbb{R}^n$ محدب[۵] گفته می‌شود هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in C$ و هر عدد حقیقی α، با $۰ \leq \alpha \leq ۱$، نقطهٔ $\alpha x_۱ + (۱-\alpha)x_۲$ متعلق به C باشد.

این تعریف را می‌توان به طریق هندسی چنین تعبیر کرد: یک مجموعه محدب است هرگاه با انتخاب دو نقطهٔ دلخواه در مجموعه، هر نقطه روی خط واصل بین آن دو نقطه نیز عضوی از مجموعه باشد.

گزاره زیر نشان می‌دهد که تحدب تحت برخی عملیات معمول بر روی مجموعه‌ها حفظ می‌شود.

گزاره ۱.۱ مجموعه‌های محدب در $\mathbb{R}^n$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

(الف) اگر C مجموعه‌ای محدب باشد و β عددی حقیقی، آنگاه مجموعهٔ

$$\beta C = \{x : \ x = \beta c, \ c \in C\}.$$

نیز محدب است.

(ب) اگر C و D مجموعه‌هایی محدب باشند، آنگاه مجموعهٔ

$$C + D = \{x : \ x = c + d, \ c \in C, \ d \in D\}.$$

نیز محدب است.

(ج) اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های محدب، مجموعه‌ای محدب است.

تابع محدب

تابع حقیقی f، تعریف شده روی مجموعه محدب C، محدب نامیده می‌شود هرگاه به ازای جمیع مقادیر $x_۱, x_۲ \in C$، و هر α با شرط $۰ \leq \alpha \leq ۱$، داشته باشیم:

$$f(\alpha x_۱ + (۱-\alpha)x_۲) \leq \alpha f(x_۱) + (۱-\alpha) f(x_۲).$$

---
[۵] convex

اگر به ازای هر α، با $\circ < \alpha < 1$ و $x_1 \neq x_2$، داشته باشیم:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

آنگاه f را اکیداً محدب گویند.

از دیدگاه هندسی، تابع را محدب گویند هرگاه خط واصل بین دو نقطه از منحنی نمایش آن در هیچ جا زیر منحنی قرار نگیرد. در فضای دو بعدی، تابع محدب است اگر منحنی آن به شکل پیاله باشد.

تابع به طور یکنواخت محدب

تابع $g : E \to (-\infty, \infty]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید X یک زیر مجموعه محدب از E باشد، در این صورت تابع g روی مجموعه X به طور یکنواخت محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، یک $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که

$$||y-x|| \geq \varepsilon \Longrightarrow g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2} - \delta$$

حال به تعریف تابع مقعر می‌پردازیم.

تابع مقعر

تابع g، روی مجموعه محدب C، مقعر نامیده می‌شود هرگاه تابع $f = -g$ محدب باشد. تابع g را اکیداً مقعر گویند هرگاه تابع $f = -g$ اکیداً محدب باشد.

۳.۱ آهنگ همگرایی

در مبحث آنالیز عددی، سرعتی را که یک دنباله به نقطه حدی خود همگرا می‌شود، آهنگ یا نرخ همگرایی گویند. از مهم ترین آهنگ‌های همگرایی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در ضمن برای تعاریف این بخش از مرجع [۲۲] استفاده شده است.

۱.۳.۱ همگرایی Q−خطی

تعریف ۱.۱ فرض کنید دنباله $\{x_k\}$ همگرا به عدد L باشد. گوییم این دنباله به صورت خطی به L همگراست هرگاه $\mu \in (\circ, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|} = \mu.$$

عدد μ، آهنگ همگرایی نامیده می‌شود. هرگاه $\mu = 0$، آنگاه گوییم دنباله دارای آهنگ همگرایی زبر خطی است و اگر $\mu = 1$، آنگاه دنباله دارای آهنگ همگرایی زیرخطی است.

همچنین، گوییم دنباله $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه $q > 1$ به L است هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - L|}{|x_k - L|^q} = \mu \qquad \mu > 0 \text{ با }.$$

به ویژه، همگرایی با مرتبه دو همگرایی مربعی یا درجه دوم و همگرایی با مرتبه سه همگرایی مکعبی نامیده می‌شود.

مفاهیم همگرایی فوق گاهی اوقات با نام همگرایی Q$-$خطی، همگرایی Q$-$درجه دوم و ... نیز نامیده می‌شود.

۲.۳.۱ همگرایی R$-$خطی

یکی از معایب تعریف ۱.۱ این است که این تعریف نمی‌تواند دنباله‌هایی را که سرعت همگرایی متغیری دارند، به درستی برآورد نمایند. به همین دلیل گاهی اوقات از تعریف توسعه یافته زیر استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۱ دنباله $\{x_k\}$ همگرا به L با نرخ حداقل q است هرگاه دنباله $\{\varepsilon_k\}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|x_k - L| \leq \varepsilon_k \qquad \forall k.$$

که در آن دنباله $\{\varepsilon_k\}$ طبق تعریف ۱.۱ همگرا به صفر با مرتبه همگرایی q می‌باشد. برای متمایز کردن این همگرایی از تعریف قبل، آن را همگرایی R$-$خطی، همگرایی R$-$درجه دوم و نظایر آن می‌نامند.